

J. Calavera  
Dr. Ingeniero de Caminos

# Proyecto y Cálculo de Estructuras de Hormigón

Tomo II



INTEMAC

INSTITUTO TÉCNICO DE MATERIALES Y CONSTRUCCIONES

## NOTACIONES DE REFERENCIAS

1. Se recuerda que las referencias a otros apartados del libro se realizan por su número  
P. ej. "Véase 10.8 ..."
2. La notación entre corchetes indica fórmulas  
[10.2]
3. La notación entre paréntesis indica referencias bibliográficas  
P. ej. (10.2)  
es la segunda referencia bibliográfica del Capítulo 10

© José Calavera Ruiz  
INTEMAC, S.A.  
Depósito legal:  
ISBN: 84 88764 07 3 Tomo II  
ISBN: 84 88764 05 7 (Obra completa)  
Impreso en España por  
INFOPRINT, S.A.

## UNIDADES

En este libro se ha adoptado el Sistema Internacional de Unidades y Medidas (S.I.). Este sistema es el adoptado por la Instrucción española EHE, por el Eurocódigo EC-2 de Estructuras de Hormigón y por el MODEL CODE CEB-FIP 1990.

El sistema es el correspondiente a la Norma Internacional ISO 1000 (3ª Edición, 1 de Noviembre de 1992) "S.I. units and recommendation for the use of these multiples and of certain other units".

De acuerdo con ello, las unidades básicas son las siguientes:

Cantidad básica	Unidad básica S.I.	
	Nombre	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s

De ellas se derivan las que figuran a continuación:

Cantidad derivada	Unidad S.I. derivada		
	Nombre especial	Símbolo	Expresión en términos de unidades básicas o derivadas S.I.
Frecuencia	Hercio	Hz	1 Hz = 1 s <sup>-1</sup>
Fuerza	Newton	N	1 N = 1 kg·m/s <sup>2</sup>
Presión, tensión	Pascal	Pa	1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup>

## UNIDADES DE EXPRESIÓN DE LAS FÓRMULAS

En general todas las fórmulas de este libro están expresadas en *mm* y *N*. En los casos en que se usan otras (múltiplos o submúltiplos), se **indica expresamente** en cada caso.

En cambio, los datos se expresan en los múltiplos de uso habitual en la normalización europea, transformándose en las unidades S.I. antes de sustituirlos en las fórmulas. A continuación se indican los más habituales.

Cantidad	Unidades S.I.	
	Símbolos	Equivalencias
1. Densidad	kg/m <sup>3</sup>	-
2. Peso específico	kN/m <sup>3</sup>	1 kN/m <sup>3</sup> = 10 <sup>-6</sup> N/mm <sup>3</sup>
3. Longitudes dimensionales de las piezas de la estructura		
Luces	m	1 m = 1000 mm
Anchos	mm	-
Cantos	mm	-
Recubrimientos, etc.	mm	-
4. Áreas de las armaduras	mm <sup>2</sup>	-
5. Áreas de las secciones transversales de las piezas	mm <sup>2</sup>	-
6. Capacidades mecánicas de las áreas de armaduras	kN	1 kN = 1000 N
7. Esfuerzos axiales	kN	1 kN = 1000 N
8. Esfuerzos cortantes	kN	1 kN = 1000 N
9. Esfuerzos rasantes	kN	1 kN = 1000 N
10. Momentos flectores	m kN	1 m kN = 10 <sup>6</sup> mm N
11. Momentos torsores	m kN	1 kN = 1000 N
12. Módulos de elasticidad	N/mm <sup>2</sup>	-
13. Módulos resistentes	mm <sup>3</sup>	-
14. Momentos de inercia	mm <sup>4</sup>	-
15. Acciones		
- Puntuales	kN	1 kN = 1000 N
- Lineales uniformemente repartidas	kN/m	1 kN/m = 1 N/mm
- Superficiales uniformemente repartidas	kN/m <sup>2</sup>	1 kN/m <sup>2</sup> = 10 <sup>-3</sup> N/mm <sup>2</sup>
16. Tensiones	N/mm <sup>2</sup>	-
17. Resistencias del hormigón	MPa (Megapascuales)	1 MPa = 1 N/mm <sup>2</sup>

## CAPÍTULO 34

### TRACCIÓN CENTRADA O EXCÉNTRICA<sup>1</sup>

#### 34.1 INTRODUCCIÓN

El empleo más frecuente de las piezas en tracción simple o compuesta en las estructuras es como tirantes en edificios colgados y en naves industriales, como vigas-tirante en edificios con pilares en V y como tirantes en puentes. En algunos casos, la viga-tirante recibe una carga directa transversal apreciable debida al forjado, lo cual corresponde al caso de flexotracción<sup>1</sup>. Un empleo adicional es como tirante en algunos tipos de zapatas de medianería, como veremos en el Capítulo 63.

De acuerdo con lo que expusimos en el Capítulo 31, se desprecia la resistencia a tracción del hormigón y como toda la sección está traccionada esto equivale a no contar con el hormigón y a resistir por tanto todos los esfuerzos con la armadura<sup>2</sup>.

Según vimos también en el Capítulo 31, se considera que la pieza ha alcanzado su estado límite último cuando la armadura más traccionada alcanza el alargamiento del 10‰.

La posición del esfuerzo axial de tracción de cálculo,  $N_d$ , vendrá dado directamente si es el único esfuerzo actuante sobre la sección (fig. 34-1). Para el caso más general,

---

1 Se trata aquí el caso de que toda la sección esté en tracción. Los casos de flexotracción se tratan en el capítulo 37.

2 De esto no se desprende que el hormigón no desempeñe *ninguna función*, pues, si bien es cierto que no se considera su colaboración en cuanto a resistir las tracciones paralelas a la directriz, su papel es esencial en cuanto a proteger la armadura contra la corrosión, por lo que deberemos, en este tipo de piezas, comprobar la condiciones de fisuración de acuerdo con el Capítulo 47. Por otra parte, el hormigón es necesario para el equilibrio de fuerzas en los empalmes por solape, imprescindibles en tirantes largos. (Ver Capítulo 44). Una tercera función del hormigón en este tipo de piezas, es, a pesar de la fisuración, reducir el alargamiento de los tirantes, debido al fenómeno de "tensión-stiffening" que expondremos en el Capítulo 47.

en que sobre la sección actúe un esfuerzo axial de tracción  $N_d$  y un momento flector  $M_d$ , el problema se reduce a considerar la sección sometida a un esfuerzo único, que es el axial  $N_d$  trasladado a una distancia  $e = \frac{M_d}{N_d}$ . Por lo tanto, en lo que sigue consideramos

el caso general de una sección sometida a un esfuerzo axial de tracción  $N_d$ , no coincidente, en general, con la directriz de la pieza.

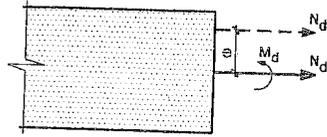


Figura 34-1

Las formas de agotamiento más frecuentes se indican en la figura 34-2. El caso 34-2 a) corresponde al estado límite de servicio por fisuración excesiva. Una vez roto el hormigón por tracción, el esfuerzo es resistido exclusivamente por la armadura hasta que ésta alcanza su rotura, con la fragmentación total de la pieza (fig. 34-2 b)). Eventualmente, puede presentarse el estado límite de deformación excesiva.

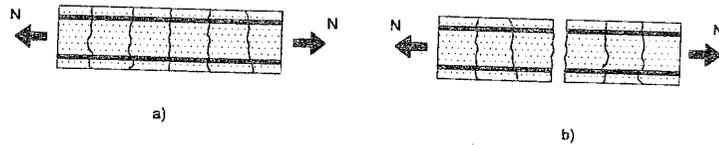


Figura 34-2

## 34.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO

### 34.2.1 TRACCIÓN CENTRADA

Estamos en el caso de tracción centrada cuando el esfuerzo  $N_d$  está aplicado en el baricentro plástico de la armadura. Por baricentro plástico se entiende el c.d.g. de las

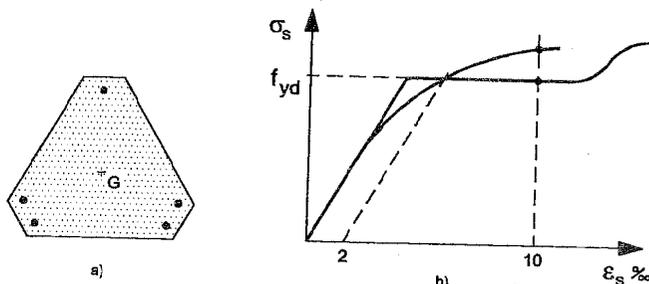


Figura 34-3

áreas de las armaduras (fig. 34-3 a)), afectada cada área de un coeficiente de ponderación igual a la tensión  $\sigma_{sd\ 0,01}$  correspondiente en el diagrama de cálculo del acero a una deformación total de 10‰<sup>1</sup>. Como puede verse en la figura 34-3 b),  $\sigma_{sd\ 0,01} = f_{yd}$ , si el acero tiene escalón de relajamiento largo, pero es diferente y mayor que  $f_{yd}$  en otros tipos de acero y debe, en ese caso, ser obtenida en el diagrama correspondiente de cálculo<sup>2</sup>.

Llamando  $A_s$  al área de la armadura,  $N_d$  al esfuerzo axial característico de tracción y  $\sigma_{sd\ 0,01}$  a la tensión de cálculo del acero ya enunciada, tendremos:

a) Dimensionamiento

$$\sum A_s \sigma_{sd\ 0,01} = N_d \quad [34.1]$$

$$\text{siendo } N_d = \sum \gamma_g N_g + \sum \gamma_q N_q.$$

Si todos los aceros tienen igual tensión  $\sigma_{sd\ 0,01}$

$$A_s \sigma_{sd\ 0,01} = N_d \quad [34.2]$$

Conocido el diagrama del acero y por lo tanto la tensión  $\sigma_{sd\ 0,01}$  y el valor de  $N_d$ , de [34.2] se obtiene el área necesaria de armadura

$$A_s = \frac{N_d}{\sigma_{sd\ 0,01}} \quad [34.3]$$

El área  $A_s$  ha de distribuirse en la sección, de forma que su baricentro plástico coincida con el punto de aplicación de  $N_d$ .

b) Comprobación

Dada la pieza dimensionada y el valor de cálculo  $N_d$ , se obtiene<sup>3</sup>.

$$N_u = A_s \sigma_{sd\ 0,01} \quad [34.4]$$

debiendo cumplirse

$$N_u \geq N_d \quad [34.5]$$

- 1 Si toda la armadura es del mismo tipo, el baricentro plástico se corresponde con el c.d.g. de las áreas de las armaduras.
- 2 El gráfico GT-81 contiene los diagramas de cálculo de los aceros estirados, trefilados o laminados en frío, que deben ser utilizados, salvo que se disponga de otra información garantizada por el Fabricante. (Actualmente en España no se fabrican aceros estirados en frío).
- 3 En lo que sigue, consideramos que toda la armadura tiene la misma tensión  $\sigma_{sd\ 0,01}$ . La extensión al caso en que no lo sea es inmediata, de acuerdo con [34.1].

### 34.2.2 TRACCIÓN COMPUESTA

Sea la sección de la figura 34-4 a), sometida al esfuerzo de tracción  $N_d$ . Las fuerzas en las armaduras serán  $A_{s2} \sigma_{s2}$  y  $A_{s1} \sigma_{s1}$ , donde  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$  son las áreas correspondientes y  $\sigma_{s1}$  y  $\sigma_{s2}$  las tensiones de las armaduras en el agotamiento. Estudiaremos los casos siguientes:

#### a) Dimensionamiento

Se conoce la sección de la pieza, la posición de las armaduras y el valor y posición de  $N_d$ .

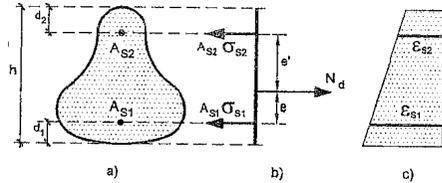


Figura 34-4

El equilibrio de fuerzas conduce a:

$$A_{s1} \sigma_{s1} + A_{s2} \sigma_{s2} = N_d \quad [34.6]$$

y el de momentos, tomándolos respecto a la armadura  $A_{s1}$ , a:

$$A_{s2} \sigma_{s2} (h - d_1 - d_2) = N_d e \quad [34.7]$$

El mejor aprovechamiento del acero se consigue alcanzando sus tensiones máximas, que en este caso vienen limitadas por la deformación plástica excesiva del acero. Esta tensión, según vimos en el Capítulo 31, es  $\sigma_{sd0,01}$ , es decir, la tensión correspondiente en el diagrama de cálculo del acero a una deformación de 0,01<sup>1</sup>.

Introduciendo  $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{sd0,01}$  en [34.6] y [34.7] y resolviendo el sistema, se obtiene

$$A_{s1} = \frac{N_d}{\sigma_{sd0,01}} \left[ 1 - \frac{e}{h - d_1 - d_2} \right] \quad [34.8]$$

$$A_{s2} = \frac{N_d}{\sigma_{sd0,01}} \cdot \frac{e}{h - d_1 - d_2} \quad [34.9]$$

Es inmediato observar de [34.8] y [34.9] que:

<sup>1</sup> Se recuerda que en aceros con escalón de relajamiento prolongado  $\sigma_{sd0,01} = f_{yd}$ .

$$\frac{A_{s1} \sigma_{sd0,01}}{A_{s2} \sigma_{sd0,01}} = \frac{e'}{e}$$

$$\text{con } A_{s1} \sigma_{sd0,01} + A_{s2} \sigma_{sd0,01} = N_d$$

Es decir, las fuerzas en las armaduras se obtienen repartiendo  $N_d$  en proporción inversa a su distancia a las mismas.

#### b) Comprobación

Se conoce la sección, completamente definida y el esfuerzo axial  $N_d$  en magnitud y posición.

Resolviendo el sistema [34.6], [34.7] se obtiene:

$$\sigma_{s1} = \frac{N_u}{A_{s1}} \left( 1 - \frac{e}{h - d_1 - d_2} \right) \quad [34.10]$$

$$\sigma_{s2} = \frac{N_u}{A_{s2}} \cdot \frac{e}{h - d_1 - d_2} \quad [34.11]$$

De [34.10] y [34.11] se obtienen los siguientes valores  $\frac{\sigma_{s1}}{N_u}$ ,  $\frac{\sigma_{s2}}{N_u}$ . Seleccionando

el mayor y haciendo en él  $\sigma_{si} = \sigma_{sd0,01}$  se obtiene de [34.10] ó [34.11], según corresponda

$$N_u = \frac{\sigma_{sd0,01} A_{s1}}{\left( 1 - \frac{e}{h - d_1 - d_2} \right)} \quad [34.12]$$

o bien

$$N_u = \frac{\sigma_{sd0,01} A_{s2}}{\frac{e}{h - d_1 - d_2}} \quad [34.13]$$

debiendo cumplirse  $N_u \geq N_d$ . La tensión en la otra armadura puede obtenerse sustituyendo el valor de  $N_u$  hallado, en la fórmula [34.10] ó [34.11] a la que haya correspondido el menor valor  $\frac{\sigma_{s1}}{N_u}$ ,  $\frac{\sigma_{s2}}{N_u}$ .

### 34.2.3 ESTIMACIÓN DE LAS TENSIONES ANTES DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN

Para esfuerzos de tracción muy moderados, puede obtenerse una aproximación del estado tensional de la pieza en servicio.

En efecto, en cualquier sección, los alargamientos del acero y del hormigón (siempre que éste no esté fisurado) serán iguales.

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s \quad [34.14]$$

Aceptando que tanto el acero como el hormigón están en régimen lineal, es decir que existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones,

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_{ct}}{E_c} \quad [34.15]$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad [34.16]$$

donde  $\sigma_{ct}$ ,  $\sigma_s$  son las tensiones del hormigón y del acero y  $E_c$ ,  $E_s$  sus módulos de deformación y elasticidad, respectivamente.

Sustituyendo en [34.14]

$$\sigma_s = \sigma_{ct} \frac{E_s}{E_c} \quad [34.17]$$

El valor  $\frac{E_s}{E_c}$ , aunque naturalmente depende de muchos factores y en especial de la duración de aplicación de la carga, suele tomarse variando de 10 a 15. Llamando

$$m = \frac{E_s}{E_c}$$

$$\sigma_s = m\sigma_{ct} \quad [34.18]$$

Si  $A_c$  es la sección neta<sup>1</sup> de hormigón (es decir la total de la pieza menos la ocupada por las armaduras), se tiene

$$A_c = A_t - A_s \quad [34.19]$$

siendo  $A_t$  el área de la sección recta de la pieza y  $A_s$  la de la armadura.

El equilibrio de esfuerzos exige

$$A_c \sigma_{ct} + A_s \sigma_s = N \quad [34.20]$$

Recuérdese que  $N$  es un valor de servicio, de magnitud moderada.

Sustituyendo [34.18] en [34.20] y despejando, se obtiene:

$$\sigma_{ct}(A_c + mA_s) = N$$

$$\sigma_{ct} = \frac{N}{A_c + mA_s} \quad [34.21]$$

y de [34.18]

$$\sigma_s = \frac{mN}{A_c + mA_s} \quad [34.22]$$

La expresión  $A_c + mA_s$  suele denominarse “área homogeneizada” de la sección.

Todo lo anterior sólo es válido mientras no se rebase la resistencia a tracción del hormigón. Por tanto, la condición de validez, aceptando como expresión de la resistencia a tracción en función de la de compresión, la adoptada por EHE, resulta, para unidades en N y mm:

$$\sigma_{ct} = \frac{N}{A_c + mA_s} \leq f_{ct,k} = 0,21\sqrt{f_{ct}^2} \quad [34.23]$$

Para valores superiores, el hormigón, en general, estará fisurado de acuerdo con lo que veremos en el capítulo 1. En las fisuras, el esfuerzo de tracción  $N$  es resistido íntegramente por el acero y las fórmulas [34.21] y [34.22] se transforman en

$$\sigma_{ct} = 0 \quad [34.24]$$

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s} \quad [34.25]$$

#### 34.2.4 INFLUENCIA DE LA RETRACCIÓN SOBRE LAS TENSIONES EN SERVICIO

Supongamos una pieza cuyo baricentro de las secciones de hormigón y armadura coinciden (fig. 34-5).

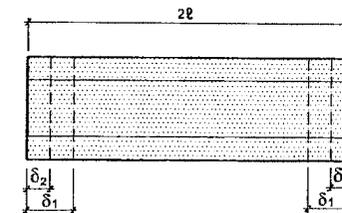


Figura 34-5

<sup>1</sup> La distinción aquí entre secciones neta y total tiene su justificación en el hecho de que en los tirantes las cuantías suelen ser altas y no puede, por tanto, despreciarse el área ocupada por las armaduras pasivas.

<sup>1</sup> Salvo en casos muy particulares, en los que se necesite una excepcional protección de la armadura, las piezas en tracción se proyectan de acuerdo con lo visto en 34.2 y 34.3 y estarán, por lo tanto, fisuradas en servicio. Evitar esta fisuración sería antieconómico. En cambio, el ancho de fisura se limita de acuerdo con lo que expondremos en el Capítulo 47, evitando el riesgo de corrosión.

Supongamos también la pieza aislada en el espacio, sin coacción de ningún elemento de apoyo y sometida a una retracción que produce en el hormigón un acortamiento  $\varepsilon_{cs}$ . Los valores de  $\varepsilon_{cs}$  se calculan de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 28, y en particular con la Tabla T-28.5.

Si no existiese armadura dentro del hormigón, éste se acortaría una longitud  $\delta_1$  en cada extremo de la pieza, tal que

$$\delta_1 = \varepsilon_{cs} l \quad [34.26]$$

La armadura restringe parcialmente el acortamiento de la pieza a un valor  $\delta_2 < \delta_1$ , con lo cual el acero está comprimido y el hormigón traccionado. Como no existen fuerzas exteriores aplicadas a la pieza, en cualquier sección la resultante de las tracciones  $\sigma_{ct}$  aplicadas a la sección de hormigón de área  $A_c$  ha de ser igual y contraria a la resultante de las compresiones  $\sigma_s$  aplicadas a la sección de armadura, de área  $A_s$ .

El acortamiento unitario de la armadura habrá resultado

$$\varepsilon_s = \frac{\delta_2}{l} \quad [34.27]$$

y la tensión de compresión correspondiente

$$\sigma_s = \frac{\delta_2}{l} E_s \quad [34.28]$$

El alargamiento unitario del hormigón habrá resultado

$$\varepsilon_c = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l} \quad [34.29]$$

y la tensión de tracción correspondiente

$$\sigma_{ct} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l} E_c \quad [34.30]$$

El equilibrio exige

$$-\sigma_{ct} A_c = \sigma_s A_s \quad [34.31]$$

y sustituyendo [34.26], [34.28] y [34.30] en [34.31] y teniendo en cuenta que  $\frac{\delta_2}{l} = \varepsilon_s$ , se obtiene, llamando  $q = \frac{A_s}{A_c} \therefore$

$$\sigma_{ct} = \frac{-q \varepsilon_{cs} E_s}{1 + mq} \quad [34.32]$$

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_{cs} E_s}{1 + mq} \quad [34.33]$$

#### EJEMPLO 34.1

En la figura 34-6 se representan las tensiones [34.32] y [34.33] en un tirante de  $250 \cdot 250$  mm, para  $m = 15$  y ambiente seco. ( $HR = 50\%$ ). De acuerdo con la Tabla T-28.5

$$\text{con } e_f = \frac{2 \cdot 250 \cdot 250}{4 \cdot 250} = 125 \text{ mm y por tanto } \varepsilon_{cs} = 0,31\%$$

$$\sigma_{ct} = -\frac{0,00031 \cdot q}{1 + 15q} \cdot E_s = \frac{62q}{1 + 15q}$$

$$\sigma_s = \frac{62}{1 + 15q}$$

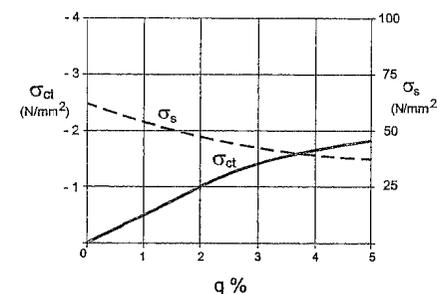


Figura 34-6

Como puede apreciarse en la figura 34-6, las tensiones de tracción en el hormigón crecen con la cuantía y lo contrario ocurre con las de compresión del acero. Si la armadura del tirante fuera, por ejemplo  $6 \text{ } \varnothing 20$ ,  $q = \frac{6 \cdot 314}{62 \cdot 500 - 6 \cdot 314} = 0,03$  (que es un valor posible), la tracción en el hormigón sería de  $1,4 \text{ N/mm}^2$  y la compresión en la armadura de  $45 \text{ N/mm}^2$ .

El fenómeno estudiado puede por tanto llegar a fisurar la pieza, incluso sin entrar ésta en carga, en especial si el curado es deficiente. Las tracciones inducidas son tanto más altas cuanto más armadura contenga la pieza. Esto, si bien es cierto en sí, se compensa por el hecho de que cuanto mayor sea la cuantía de acero, mejor reparto de fisuras se consigue. De hecho, la presencia de una cantidad de armadura adecuada es,

1 En general, estas tensiones se suman a las proporcionadas por [34.21] y [34.22].

como veremos más adelante, el único camino para distribuir la inevitable fisuración en muchas fisuras muy finas, sin riesgo de corrosión y sin perjuicio estético de la estructura<sup>1</sup>.

Es importante resaltar que las tensiones debidas a la retracción, al no tener resultante externa, no alteran la capacidad resistente en estado límite último de la pieza, ya que son anuladas en el proceso de carga hasta rotura.

### 34.2.5 CUANTÍA MÍNIMA

La Instrucción establece que en cualquier sección sometida a tracción simple o compuesta, provista de armaduras  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  deberán cumplirse las siguientes limitaciones de cuantía mínima.

$$(A_{s1} + A_{s2}) f_{yd} \geq 0,20 A_c f_{cd} \quad [34.34]$$

donde:

$f_{yd}$  del Bateos:  $\frac{4020}{1,15}$  para  $\gamma_s = 1,15$

$f_{cd}$  del H-500:  $\frac{500}{1,5}$  "  $f_c = 1,50$

$f_{cd}$  = Resistencia de cálculo del hormigón en compresión. =  $\frac{f_{ck} \cdot \alpha_{90} \cdot \alpha_{100}}{1,5}$

$A_c$  = Área de la sección total de hormigón.

$f_{yd}$  = Límite elástico de cálculo del acero<sup>2</sup>.  $\sigma_{s,0,01}$  cuando tiene reacción de adhérencia, luego  $f_{yk} > \sigma_{s,0,01}$  (veremos en el capítulo 47).

que puede escribirse

gráfico GT-81

$$\frac{U_s}{U_c} \geq 0,20 \quad [34.35]$$

La anterior condición de cuantía mínima se deriva del deseo de evitar la rotura frágil de la pieza. El concepto es importante y puede analizarse fácilmente si consideramos el caso pésimo, que es el de tracción centrada, en cuyo caso [34.34] y [34.35] se transforman en

$$f_{yd} A_s \geq 0,20 f_{cd} A_c \quad [34.36]$$

siendo  $A_s$  y  $A_c$  las secciones totales de armaduras y hormigón, respectivamente.

1 De hecho, la relajación de tensiones de tracción en el hormigón y la ganancia de resistencia a tracción de éste con la edad, moderan notablemente la situación expuesta.

2 EHE emplea el valor  $f_{yd}$ . Como veremos es más lógico emplear el valor  $\sigma_{s,0,01}$ .

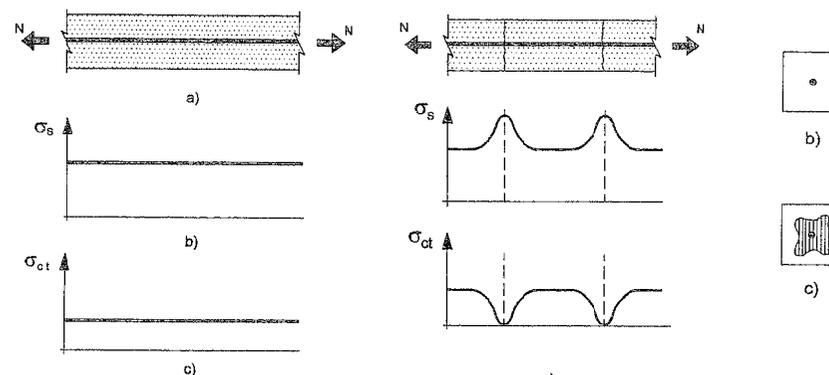


Figura 34-7

Figura 34-8

El tirante de la figura 34-7, al ser sometido a un esfuerzo creciente de tracción,  $N$ , de valor moderado, repartirá dicho esfuerzo entre el hormigón y la armadura, de acuerdo con lo visto en 34.2.3 y, si se ha producido retracción, se sumarán las tensiones calculadas en 34.2.4. En la figura se indica la distribución de tensiones, que es constante a lo largo de la directriz de la pieza, tanto para el hormigón como para el acero.

Si se forma una fisura, sea cualquiera su causa, el estado tensional de la pieza se altera profundamente y los diagramas de tensiones se indican en la figura 34-8 a). Si la fisura ha seccionado la pieza completamente (fig. 34-8 b)), entre labios de fisuras el acero resistirá íntegramente el esfuerzo  $N$  y la tensión del hormigón será nula. A medida que la armadura se aleja de la fisura, sus propiedades adherentes le permiten transmitir parte de la fuerza de tracción desarrollada en la grieta al hormigón circundante adherido. La tensión del acero se reduce y aparecen de nuevo tracciones en el hormigón. El fenómeno se invierte al acercarse a la fisura inmediata. El cálculo del ancho y separación de fisuras será abordado en detalle en el Capítulo 47. Si la fisura no ha seccionado totalmente la sección (fig. 34-8 c)), el estado será intermedio entre los dos analizados.

Cuando decimos que entre labios de fisuras el acero resiste él solo el esfuerzo  $N$ , que inmediatamente antes resistían el acero y el hormigón conjuntamente, se entiende que ello es posible. Si, al producirse una fisura, el acero resiste menos de lo que estaban resistiendo el hormigón sin fisurar y el acero conjuntamente, sobrevendría una *rotura frágil*, es decir, instantánea y sin aviso previo. La pieza, aunque tuviera un coeficiente de seguridad alto, carecería de una de las más estimables cualidades del hormigón armado, que es su *capacidad de aviso*.

Las fórmulas [34-34] y [34-35] de la Instrucción EHE intentan evitar este riesgo de forma simplificada.

Supongamos que el acero se agota al alcanzar su límite elástico característico,  $f_{yk}$ , y que el hormigón se agota al alcanzar su resistencia a tracción. La Instrucción EHE expresa, como dijimos en el Capítulo 28, la resistencia característica superior a tracción mediante la expresión<sup>1</sup>

1 Es claro que en este caso lo inseguro es una mayor resistencia a tracción del hormigón.

$$f_{cr,k} = 0,39\sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad [34.37]$$

donde:

$f_{cr,k}$  = Resistencia característica a tracción.

$f_{ck}$  = Resistencia característica a compresión.

La expresión [34.37] puede sustituirse con aceptable aproximación, por

$$f_{cr,k} = \frac{f_{ck}}{8,5} \quad [34.38]$$

Cuando el hormigón alcanza

$$\sigma_{cr} = \frac{f_{ck}}{8,5} \quad [34.39]$$

la tensión en el acero, de acuerdo con lo visto en 34.4 y tomando  $m = 10$ , será

$$\sigma_s = 10 \frac{f_{ck}}{8,5} \quad [34.40]$$

El esfuerzo axial actuante será por tanto

$$N = A_c \frac{f_{ck}}{8,5} + 10A_s \frac{f_{ck}}{8,5} \quad [34.41]$$

$$N = \frac{f_{ck}}{8,5} (A_c + 10A_s) \quad [34.42]$$

Al formarse la primera grieta, el esfuerzo  $N$  deberá ser resistido solamente por la armadura  $A_s$ , trabajando a su límite elástico característico  $f_{yk}$ , luego para que la rotura no presente carácter frágil

$$A_s f_{yk} \geq \frac{f_{ck}}{8,5} (A_c + 10A_s) \quad [34.43]$$

1 Dentro del campo  $25 \leq f_{ck} \leq 50$  MPa.

Si expresamos [34.43], para mayor comodidad, en valores de cálculo, con  $\gamma_c = 1.5$  y  $\gamma_s = 1,15$ , se obtiene:

$$A_s f_{yd} = \frac{0,15 A_c f_{cd}}{1 - 1,53 \frac{f_{cd}}{f_{yd}}} \quad [34.44]$$

que alcanza su máximo para el máximo valor de  $\frac{f_{cd}}{f_{yd}}$  que con hormigón H-50 y acero

B400S es 0,096, con lo  $\frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{yd}}$  que  $\approx 0,18$ , muy próximo al valor de 0,20 adoptado por EHE.

Si se adopta para  $f_{cd}$  el valor de cálculo  $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$ , donde  $f_{ck}$  es la resistencia característica a 28 días, eso garantiza la no fragilidad a 28 días, pero, al aumentar la resistencia del hormigón con la edad, la pieza se iría volviendo progresivamente frágil. Partiendo de que la resistencia del hormigón a largo plazo puede llegar a ser del orden de vez y media la resistencia a 28 días, los valores anteriores de cuantías mínimas deberían multiplicarse por 1,5, si se quiere garantizar la no fragilidad con carácter permanente. No se hace así porque la relajación de tensiones de tracción en el hormigón compensa este incremento.

#### 34.2.6 CUANTÍA MÁXIMA

La Instrucción EHE no establece limitaciones de cuantía máxima y, desde un punto de vista puramente resistente, no existen razones para hacerlo. De hecho se han construido tirantes con cuantías extraordinariamente elevadas.

Sin embargo, existen tres aspectos que hacen aconsejable no emplear cuantías muy elevadas:

- La dificultad de hormigonado.
- La congestión en las zonas de empalme por solape, cuando las piezas rebasan la longitud comercial de las barras, que es de 12 m.
- La sensibilidad al fuego que presentan, en general, las piezas de elevada cuantía.

En nuestra opinión, el empleo de cuantías geométricas superiores a 0,20 requiere precauciones especiales.

#### 34.2.7 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS VARIAS

La Instrucción EHE no especifica nada en este caso. Conviene seguir las recomendaciones siguientes:

- Las piezas en tracción deben llevar estribos de diámetro no inferior a la cuarta parte del diámetro de la barra longitudinal más gruesa.

- La separación de estribos no será superior a 0,85 veces la menor dimensión transversal de la pieza. Esta separación debe reducirse a la mitad en las zonas de solape de armaduras longitudinales.
- La separación entre armaduras longitudinales consecutivas no será superior a 350 mm.
- Para recubrimientos y detalles constructivos varios, véase el Capítulo 41.

#### EJEMPLO 34.2

Dado el tirante cuya sección se representa en la figura 34-9 (cotas en mm), sometido a una fuerza  $N$  de tracción actuando en  $P$ , con valores  $N_g = 177$  kN,  $N_d = 40,7$  kN calcular los valores de  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$  cuando se emplea acero B 400S. Adóptese  $\gamma_{fs} = 1,35$ ,  $\gamma_{fd} = 1,5$ . Ármese el tirante con cuatro redondos.

*Solución*

$$N_d = 1,35 \cdot 177 + 40,7 \cdot 1,5 = 300 \text{ kN}$$

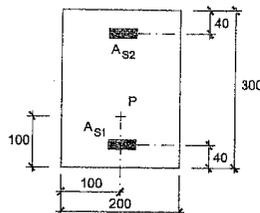


Figura 34-9

Como es acero laminado en caliente

$$\hat{f}_{yd} = \sigma_{sd0,01} = \frac{400}{1,15} = 348 \text{ N/mm}^2$$

y aplicando [34.8] y [34.9]

$$A_{s1} = \frac{300.000}{348} \left( 1 - \frac{100 - 40}{300 - 40 - 40} \right) = 627 \text{ mm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{300.000}{348} \cdot \frac{100 - 40}{300 - 40 - 40} = 235 \text{ mm}^2$$

de donde

$$A_{s1} = 2 \phi 20$$

$$A_{s2} = 2 \phi 12$$

#### EJEMPLO 34.3

Dado el tirante de la figura 34-10 (cotas en mm), sometido a una fuerza  $N$  de tracción actuante en  $P$ , y construido con acero B 500S, calcular el máximo valor de cálculo  $N_d$  con  $\gamma_s = 1,15$ .

A partir de [34.10] y [34.11]

$$\frac{\sigma_{s1}}{N_u} = \frac{1}{402} \left( 1 - \frac{90}{300 - 30 - 30} \right) = 0,00156$$

$$\frac{\sigma_{s2}}{N_u} = \frac{1}{226} \cdot \frac{90}{300 - 30 - 30} = 0,00166$$

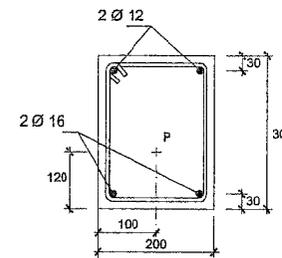


Figura 34-10

y tomando el valor mayor, de [34.13]

$$N_u = \frac{\sigma_{sd0,01} A_{s2}}{90} = \frac{487 \cdot 226}{90} = 293,5 \text{ kN}$$

El valor de  $\sigma_{sd0,01}$  se obtiene del gráfico GT-81 para acero 500 y  $\gamma_s = 1,15$ ,  $\sigma_{sd0,01} = 487 \text{ N/mm}^2$

$$N_u = \frac{487 \cdot 226}{90} = 293,499; \quad N_u = 293,5 \text{ kN}$$

$$N_d = 293,5 \text{ kN}$$

### 34.3 PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

Aunque la aplicación fundamental del pretensado se realiza en casos de tracción simple, analizaremos sucesivamente este caso y el de tracción compuesta.

Planteamos el caso general, y el más frecuente, de que la pieza tenga armaduras activas y pasivas. El caso de piezas con sólo armadura activa, muy raro en la práctica, se obtiene haciendo  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ .

#### 34.3.1 TRACCIÓN SIMPLE

Consideremos la pieza de la figura 34-11, correspondiente a la sección transversal de un tirante con armadura activa de área  $A_p$  y pasiva  $A_s$ , sometido a un esfuerzo de tracción actuando en el baricentro plástico de la sección.

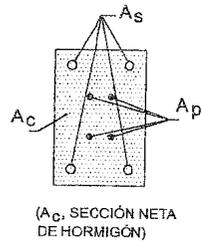


Figura 34-11

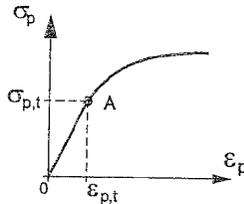


Figura 34-12

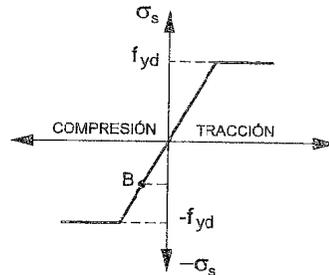


Figura 34-13

Sea  $\sigma_{par}$  la tensión antes del acortamiento elástico instantáneo de la pieza debido al pretensado y  $\sigma_{pt}$  la tensión tras el acortamiento elástico. Su cálculo es inmediato de acuerdo con lo visto en el Capítulo 29.

Para el caso de armaduras postesas y pretesas se tiene:

Adoptando para ambas armaduras  $m_p = \frac{E_p}{E'_c}$  y  $m_s = \frac{E_s}{E'_c}$

$$\sigma_{par} = \sigma_{po} - \frac{\sum P_i}{A_p} \quad [34.45]$$

$$\sigma_{pt} = \frac{\sigma_{par}}{1 + m_p \frac{A_p}{A_c + m_s A_s}} \quad [34.46]$$

(Véase fórmulas [29-22] a [29-24], con  $e_o = 0$ ).

$\sum P_i$  es la suma de pérdidas de fuerza anteriores al acortamiento elástico.

En las fórmulas anteriores, al tratarse de un fenómeno instantáneo  $E'_c = E'_{ci}$

$A_c$  es el área de la sección neta de hormigón,  $A_s$  la de la armadura pasiva y  $A_p$  la de la activa. En los tirantes es especialmente necesaria, como dijimos anteriormente, esta distinción pues suele tratarse de piezas con cuantías elevadas y por tanto no despreciables.

En definitiva, las tensiones de compresión aplicadas al tirante al transferir la tensión de pretensado son:

$$\sigma_{ct} = \frac{\sigma_{pr} A_p}{A_c + m_s A_s} \text{ en el hormigón} \quad [34.47]$$

$$\sigma_{st} = \frac{m_s \sigma_{pr} A_p}{A_c + m_s A_s} \text{ en la armadura pasiva} \quad [34.48]$$

La tensión de la armadura activa es en ese instante  $\sigma_{pr}$  y viene representada por el punto A en la figura 34-12. La tensión de la armadura pasiva en ese instante es  $\sigma_s$  y viene representada por el punto B en la figura 34-13, es decir que la acción del pretensado ha conducido a precomprimir tanto el hormigón como la armadura pasiva.

El acortamiento elástico instantáneo de la pieza es

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{ct}}{E'_c} = \frac{\sigma_{st}}{E_s} = \frac{m_s \cdot \sigma_{pr} \cdot A_p}{(A_c + m_s A_s) E_s} \quad [34.49]$$

pues los dos acortamientos han de ser iguales al estar las armaduras adheridas.

#### 34.3.1 a. CASO DE CARGA INSTANTÁNEA INICIAL

En ese caso, la sollicitación última de la pieza será

$$N_u = A_s \sigma_{sd,0,01} + A_s \sigma_{pd,0,01}^1 \quad [34.50]$$

Si el acero es laminado en caliente  $\sigma_{sd,0,01} = f_{yd}$ .

Desarrollamos a continuación un ejemplo de forma detallada, pues entendemos que con independencia de su valor directo, será útil como introducción a temas posteriores.

#### EJEMPLO 34.4

Sea un tirante pretensado con sección de 400 · 400 mm, de hormigón H-30 que tiene al transferir el pretensado una resistencia de 20 MPa, armado con 8  $\varnothing$  20 de acero

1 Representamos con el símbolo  $\sigma_{pd,0,01}^*$  la tensión correspondiente a un alargamiento de 0,01 bajo las acciones exteriores. Es decir, que el alargamiento total último será  $\frac{\sigma_{pt}}{E_p} + 0,01$ .

B 400S y pretensado con 10 cordones Y 1770 S7, con carga característica de rotura 265 kN y módulo de elasticidad noval de 190.000 N/mm<sup>2</sup>, tesados al 75% de la carga de rotura. (Su diagrama es el de la figura 34-14).

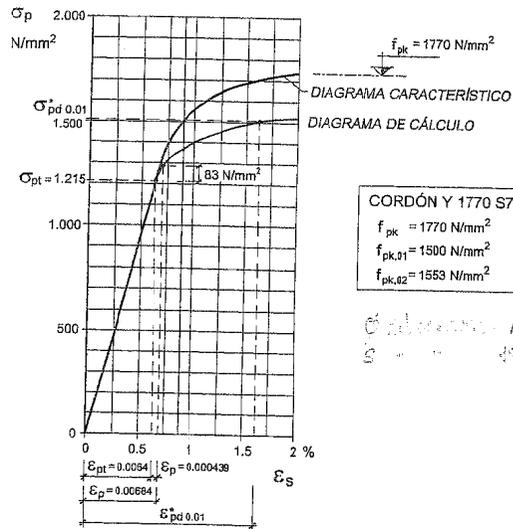


Figura 34-14

Calcular su sollicitación de agotamiento y la evolución de la pieza bajo la aplicación del esfuerzo axial hasta rotura. (Las pérdidas por rozamiento y penetración de cuñas se estiman en el 2% de la tensión inicial).

a) La fuerza inicial de pretensado es

$$P_0 = 10 \cdot 0,75 \cdot 265 = 1.987,5 \text{ kN}$$

$$\sigma_{P_0} = \frac{1.987,5 \cdot 1000}{10 \cdot 150} = 1.325 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{pat} = 1.325 \cdot 0,98 = 1.298 \text{ N/mm}^2$$

$$m_p = \frac{190.000}{8.500 \sqrt[3]{20}} = 8,2 \quad m_s = \frac{200.000}{8.500 \sqrt[3]{20}} = 8,7$$

$$\sigma_{pt} = \frac{1.298}{1 + 8,2 \frac{10 \cdot 150}{400 \cdot 400 - 10 \cdot 150 + 8,7 \cdot 8 \cdot 314}} = 1.215 \text{ N/mm}^2$$

y por tanto

$$\sigma_{ct} = \frac{1.215 \cdot 10 \cdot 150}{400 \cdot 400 - 10 \cdot 150 + 8,7 \cdot 8 \cdot 314} = -10,1 \text{ N/mm}^2 \text{ (Compresión)}$$

$$\sigma_{st} = -8,7 \cdot 10,1 = -87,9 \text{ N/mm}^2 \text{ (Compresión)}$$

$$\varepsilon_{st} = \varepsilon_{ct} = \frac{87,9}{200.000} = 0,000439$$

El alargamiento de la armadura activa, después del acortamiento elástico vale

$$\varepsilon_{pt} = \frac{1.215}{190.000} = 0,0064$$

La resistencia a tracción del hormigón H-20 es (Tabla T-28.1) 1,5 N/mm<sup>2</sup> y con  $E'_{ct} = 8500 \sqrt[3]{20} = 23.070 \text{ N/mm}^2$  (se acepta el mismo valor de  $E'_{ct}$  para compresión y tracción), el alargamiento para alcanzar dicha resistencia es:

$$\varepsilon_{ct} = \frac{1,5}{23.070} = 0,000065$$

En la figura 34-15 se indican las tensiones en la armadura activa, en la pasiva y en el hormigón, a medida que se aplican esfuerzos axiales de tracción al tirante y por tanto aumenta el alargamiento de éste.

#### Etapa a) de hormigón sin fisurar

Al transferir el pretensado el hormigón está comprimido y su punto representativo es el A en su diagrama tensión-deformación. La armadura pasiva está en compresión y su punto representativo en su diagrama es el A'. La rama OA' es la de compresión del diagrama del acero de la armadura pasiva, cuya rama de tracción es OC'. En ese instante, la armadura activa está a tensión  $\sigma_{pt}$  con un alargamiento  $\varepsilon_{pt}$ . El diagrama es el O'MC" indicado en la figura y el punto representativo es el A".

Al aplicar esfuerzos de tracción al tirante el hormigón se descomprime, la armadura pasiva hace lo mismo y la activa incrementa su tensión de tracción.

Cuando el hormigón alcanza el punto 0, de descompresión del hormigón, se tienen las deformaciones y tensiones siguientes:

- En el hormigón

$$\varepsilon_{cu} = 0 \quad \Delta\sigma_c = -10,1 \quad \sigma_c = 0$$

- En la armadura pasiva

$$\varepsilon_s = 0 \quad \Delta\sigma_s = -0,000439 \cdot 200.000 = -87,9 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_s = 0$$

- En la armadura activa

$$\varepsilon_p = 0,0064 + 0,000439 = 0,00684$$

Para esta deformación el diagrama está fuera de la recta de HOOKE por lo que hay que operar gráficamente, obteniéndose

$$\Delta\sigma = 83 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_p = 1.298 \text{ N/mm}^2$$

(Es decir de nuevo la tensión  $\sigma_{pat}$ ).

La fuerza resultante en la sección es por tanto

$$P'_p = 10 \cdot 150 \cdot 1.298 = 1.947.000 \text{ N} = 1.947 \text{ kN}$$

Cuando el hormigón alcanza el punto C, correspondiente a la rotura por tracción, se tienen los alargamientos y variaciones de tensión siguientes:

- En el hormigón, como vimos

$$\varepsilon_{cu} = 0,000065 \quad \Delta\sigma_{cr} = 1,5 \text{ N/mm}^2$$

- En la armadura pasiva

$$\varepsilon_s = 0,000065 \quad \sigma_s = \Delta\sigma_s = 200.000 \cdot 0,000065 = 13 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{Tracción})$$

La tensión en la armadura activa inmediatamente antes de producirse la fisuración es la correspondiente a un alargamiento adicional

$$\varepsilon_s = 0,000065$$

y en el gráfico ello supone un incremento despreciable, del orden de

$$\Delta\sigma_p = 5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_p = 1.298 + 5 = 1.303 \text{ N/mm}^2$$

La fuerza necesaria para producir la deformación y la tensión de rotura del hormigón por tracción y por tanto el principio de la fisuración, es:

$$N = (400 \cdot 400 - 8 \cdot 314 - 10 \cdot 150) \cdot 1,5 + 8 \cdot 314 \cdot 13 + 10 \cdot 150 \cdot 1.303 = 2.221.138 \text{ N} = 2.221 \text{ kN}$$

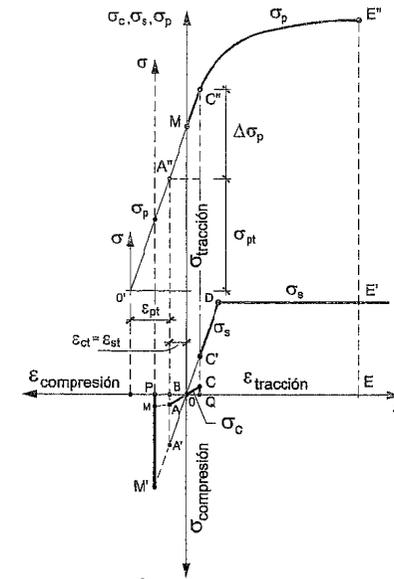


Fig. 34-15

Obsérvese que si la pieza no se hubiera pretensado el esfuerzo axial de fisuración,  $N'$ , sería

$$\sigma_c = \frac{N'}{A_c + m_s A_s + m_p A_p} = f_{ck,t}$$

de donde

$$N' = 1,5[400 \cdot 400 - 8 \cdot 314 - 10 \cdot 150] + 8,7 \cdot 8 \cdot 314 + 8,2 \cdot 10 \cdot 150] = 285.214 \text{ N} = 285 \text{ kN}$$

Es decir el pretensado ha elevado la carga de fisuración en casi ocho veces.

Tan pronto se fisure el hormigón, desaparece su colaboración en resistir tracciones en la sección fisurada y el esfuerzo axial  $N$  ha de ser resistido sólo por las armaduras activa y pasiva.

#### Etapa b) de hormigón fisurado

La fuerza aplicada es resistida solamente por las armaduras. En el agotamiento

$$N_u = A_s \sigma_{sd 0,01} + A_p \sigma_{pd 0,01}^* \quad [34.51]$$

En nuestro caso, en el gráfico de la figura 34-14  $\sigma_{pd0,01}^* = 1.520 \text{ N/mm}^2$ , con lo que [34.51] conduce a

$$N_u = 3.139 \text{ kN}$$

#### 34.3.1 b. CASO DE CARGA A LARGO PLAZO

Al actuar el pretensado a lo largo del tiempo, se van a producir las pérdidas diferidas (retracción y fluencia del hormigón y relajación de la armadura). Su cálculo es inmediato de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 29 y se omite aquí.

**OBSÉRVESE QUE EL ESFUERZO AXIL DE FISURACIÓN VARÍA PARA CARGA Y EDADES AVANZADAS.** Ello ocurre por dos motivos. Uno es el mayor acortamiento del hormigón con lo que se precomprime más la armadura pasiva. La tensión de pretensado en el hormigón se reduce, pero su resistencia a tracción aumenta. Un balance exacto sólo puede realizarse para cada caso concreto de acuerdo con lo visto en el Capítulo 29 y lo expuesto en éste.

#### 34.3.2 TRACCIÓN EXCÉNTRICA

Vale íntegramente lo expuesto en 34.2.2, sin más que añadir las áreas de armadura activa  $A_p$  con su tensión última de cálculo  $\sigma_{pd0,01}^*$ .

Naturalmente existen infinitas combinaciones de  $A_s$  y  $A_p$  que garantizan el estado límite último. En general la proporción adecuada vendrá derivada de consideraciones generales y muy especialmente de las condiciones de fisuración a cumplir.

### OBSERVACIONES

1. El pretensado en sí mismo, no aumenta la resistencia de la pieza. La única aportación que realiza a la resistencia se deriva de la introducción de la armadura activa, que contribuye a la resistencia con independencia de su grado de tesado.
2. El pretensado aumenta el esfuerzo axil de fisuración de la pieza.
3. El pretensado reduce la deformabilidad de la pieza. (Véanse los ejemplos en 25.3.2 y 34.4).
4. El pretensado produce un acortamiento a lo largo del tiempo que debe ser tenido en cuenta en el cálculo.
5. La pieza con pretensado axil presenta una aparente anomalía que se observa claramente considerando la figura 34-15. Inmediatamente después del acortamiento elástico los puntos representativos del estado de tensión y deformación del hormigón y de la armadura pasiva son  $A$  y  $A'$  respectivamente. Debido a los fenómenos de fluencia y retracción, la deformación del hormigón aumenta y transfiere compresiones a la armadura pasiva.

Aumenta el acortamiento con el tiempo, por ejemplo hasta que los puntos representativos sean  $M$  y  $M'$  respectivamente.

Si en ese momento aplicamos la carga exterior, la resistencia del hormigón a tracción habrá aumentado debido al plazo transcurrido. La fuerza de pretensado y correlativamente las tensiones de precompresión en el hormigón se habrán reducido un poco. En la práctica, el alargamiento  $BQ$  necesario para alcanzar la resistencia a tracción bajo una carga rápida, habrá variado poco. El problema es que dicho alargamiento  $\approx BQ$  que es capaz de poner al hormigón en tracción y eventualmente fisurarlo, ha de ser llevado ahora a partir de  $P$  y no de  $B$ . Esto significa que el hormigón puede fisurarse aunque todavía está en un estado de deformaciones de compresión.

## CAPÍTULO 35

### COMPRESIÓN SIMPLE

#### 35.1 INTRODUCCIÓN

Una sección está en compresión simple cuando está sometida a un esfuerzo axial de compresión que actúa en el baricentro plástico de la sección. Llamamos baricentro plástico de la sección al c.d.g. de las áreas de hormigón y acero, afectadas respectivamente de coeficientes  $0,85 f_{cd}$  y  $\sigma_{s,0.002}$ . Por las razones que veremos más adelante  $\sigma_{s,0.002}$  es la tensión de cálculo del acero correspondiente a un acortamiento del 2‰, que es el adoptado para el caso de compresión simple, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 32.

La forma habitual de agotamiento es una fisuración paralela al eje de la pieza (Fig. 35-1a)), de muy pequeño ancho de fisura, por lo que la pieza tiene muy escasa capacidad de aviso. Esta fisuración indica el agotamiento del hormigón por compresión y se presenta en una fase avanzada de prerotura.

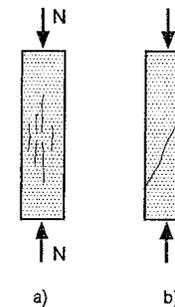


Figura 35-1

La formación de una fisura transversal (fig. 35-1b)) es muy rara en la práctica. Otra forma posible de agotamiento por pandeo de la armadura puede observarse en la figura 35-5.

## 35.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO

### 35.2.1 COMPORTAMIENTO LONGITUDINAL

Sea una pieza sometida a compresión simple (fig. 35-2a)), con sección de hormigón  $A_c$  y de acero  $A_s$  (fig. 35-2b)). Si suponemos que se emplea acero B 400S, su diagrama de cálculo, para  $E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2$ , se representa en la figura 35-2c). En la misma figura se ha representado el diagrama tensión-deformación del hormigón. Como veremos más adelante, en este mismo Capítulo y en el Capítulo 37, la forma de este diagrama depende de muchos factores, debiendo señalarse como predominantes la duración de aplicación de la carga y la forma y cuantía de la armadura transversal.

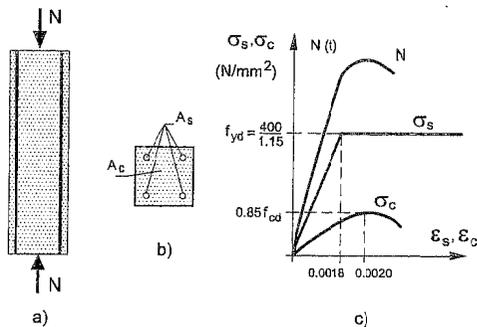


Figura 35-2

La resistencia de la pieza será la suma de las que presentan el hormigón y el acero. La resistencia del hormigón en la pieza difiere de la obtenida en probeta cilíndrica. Usualmente, se acepta que la resistencia del hormigón en aquella es igual a  $0,85 f_{cd}$ , siendo  $f_{cd}$  la resistencia en probeta. El valor 0,85 recoge las diferencias de hormigonado, forma, tamaño y velocidad de carga entre la probeta y la pieza<sup>1</sup>.

Si para cada valor de  $\epsilon$  sumamos el producto del área de hormigón y de acero, por sus tensiones de cálculo correspondientes (fig. 35-2c)), se obtiene la curva (N) de carga del pilar.

En la figura 35-2 se ha supuesto que el acero alcanza su escalón de relajamiento antes de que el hormigón alcance la rotura. El acero se plastifica y estabiliza su contribución a la carga última que no se produce hasta que el hormigón no desarrolla toda su resistencia.

<sup>1</sup> Se exceptúa el caso de hormigones de alta resistencia, que se tratará en el Anejo n° 5.



Figura 35-3

Rotura de un pilar bajo carga mantenida, con elevada cuantía de armadura  
(Ensayos de INTEMAC, 1976)

En la práctica, el comportamiento es más complejo y si el hormigón alcanza su deformación de rotura antes de que el acero haya alcanzado su límite elástico de cálculo, el hormigón se plastifica y “espera” a que el acero desarrolle su resistencia final. Esto es tanto más acusado cuanto más duradera es la aplicación de la carga y más alta la cuantía.

La fórmula adoptada por EHE para el cálculo de piezas en compresión centrada es

$$N_d \leq 0,85 f_{cd} A_c + A_s \sigma_{sd 0,002} \quad [35.1]$$

En la fórmula [35.1] el coeficiente 0,85 representa la influencia de las posibles cargas de larga duración sobre la resistencia del hormigón. La fórmula parte del hecho, corroborado como hemos dicho por la experiencia, de que en el agotamiento de la pieza se agotan simultáneamente ambos materiales.  $A_c$  es la sección neta de hormigón, es decir descontando el área ocupada por las armaduras.

$\sigma_{sd 0,002}$  es la tensión del acero correspondiente a un acortamiento del 2‰. Con  $\gamma_s = 1,15$ , esto equivale a que  $\sigma_{sd 0,002} = f_{yd}$  siempre que  $f_{yd} \leq 400 \text{ N/mm}^2$ , lo que equivale a  $f_{yk} \leq 460 \text{ N/mm}^2$ , es decir

$$N_d \leq 0,85 f_{cd} A_c + A_s f_{yd} \quad [35.2]$$

Sin embargo, los ensayos de INTEMAC en la década de los 70 (Fig. 35-3) (35.1), que barrieron la gama de aceros desde 240 a 600 N/mm<sup>2</sup> de límite elástico característico, demostraron que, en la práctica, incluso con procesos de carga hasta la rotura de tan sólo 8 horas de duración, se alcanzaba un acortamiento de rotura no inferior a 3,2‰. Sólo en el caso de pilares, en que prácticamente todas las acciones sean variables y sea posible su crecimiento muy rápido hasta rotura, la limitación de 0,002 y correlativamente del límite elástico característico a 460 N/mm<sup>2</sup> resulta lógica.

El tema es importante, porque con las fórmulas [35.1] y [35.2] no puede agotarse el acero B500 S y, tal como se ha dicho, su agotamiento es posible para todas las relaciones de carga permanente a sobrecarga usuales en la mayoría de los casos reales.

Debe recordarse que, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 32, si se emplea en el Control de Calidad del acero el Nivel Reducido, deberá tomarse como resistencia de cálculo del acero el valor

$$f_{yd} = \frac{0,75 f_{yk}}{\gamma_s} \quad [35.3]$$



Figura 35-4

*Influencia de la armadura transversal en pilares con fuerte cuantía de armadura (Ensayos de INTEMAC, 1972)*

En la figura 35-4 puede apreciarse la rotura de estribos en los ensayos de INTEMAC (35.2) como consecuencia de las fuertes tracciones inducidas. Obsérvese la clara estricción del estribo.

Con las cuantías y separaciones de estribos y las cuantías longitudinales utilizadas habitualmente en la práctica, la influencia de los estribos afecta más a la forma de rotura de la pieza, algo más dúctil y con una pequeña fisuración en prerotura, que a su capacidad de carga.

Las figuras 35-5 y 35-6 representan, respectivamente, dos pilares de cuantía baja, uno sin estribos y otro con los estribos mínimos reglamentarios. Las cargas de rotura se diferenciaron sólo en un 5%, aunque, como puede apreciarse, sus formas de rotura fueron notablemente diferentes.

### 35.2.2 TENSIONES EN TEORÍA CLÁSICA

Si para valores moderados de la carga aceptamos proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, los acortamientos comunes del hormigón y del acero



Figura 35-5

*Rotura de un pilar con distribución de estribos habitual (Ensayos de INTEMAC, 1972)*

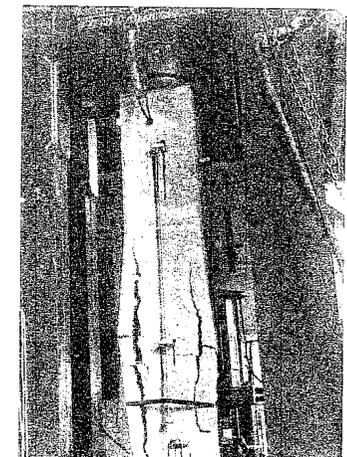


Figura 35-6

*Rotura de un pilar sin estribos (Ensayos de INTEMAC, 1972)*

conducen a

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad [35.4]$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} \quad [35.5]$$

e igualando [35.4] y [35.5]

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \sigma_c \quad [35.6]$$

Denominaremos  $m$  a la relación  $\frac{E_s}{E_c}$ , que por supuesto es fuertemente variable.

Usualmente se ha venido manejando  $m = 15$ . El equilibrio de fuerzas conduce a

$$\sigma_c A_c + \sigma_s A'_s = N \quad [35.7]$$

o bien

$$\sigma_c (A_c + m A'_s) = N$$

y llamando  $q$  a la cuantía geométrica  $\frac{A'_s}{A_c}$

$$N = \sigma_c A_c (1 + m q) \quad [35.8]$$

de donde

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c (1 + m q)} \quad [35.9]$$

$$\sigma_s = \frac{m N}{A_c (1 + m q)} \quad [35.10]$$

En teoría, las expresiones [35.9] y [35.10] proporcionan los valores de las tensiones en servicio, para cargas  $N$  de valor moderado. En la práctica, esta información es completamente ilusoria debido a múltiples razones, entre las cuales deben destacarse:

- La fuerte variabilidad del coeficiente de equivalencia  $m$ .
- Las tensiones producidas por la retracción, que vienen dadas por las fórmulas [34.32] y [34.33]. Estas tensiones pueden, incluso, provocar que a pesar de estar la pieza comprimida, el hormigón esté en tracción, a costa, naturalmente, de tensiones de compresión en el acero mucho mayores que las esperadas.
- Si una fracción de la carga es de larga duración en su aplicación, la fluencia del hormigón conducirá a que se reduzcan con el tiempo sus tensiones de compresión y aumenten las del acero.

Obsérvese que, como los estados tensionales de retracción y fluencia tienen resultante exterior nula, son anulados en el proceso de carga hasta rotura, no afectando a la capacidad final de carga de la pieza, es decir, a su resistencia frente al estado límite último.

### 35.2.3 RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN CONFINADO

Se entiende por hormigón confinado el que tiene parcialmente coartada la expansión en las direcciones ortogonales a la directriz de la pieza comprimida (Fig. 35-7).

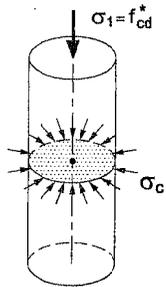


Figura 35-7

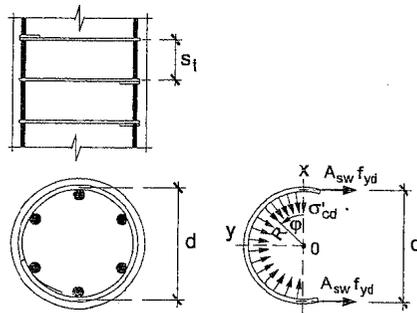


Figura 35-8

Considerando la pieza cilíndrica en compresión centrada, sometida a una presión de confinamiento  $\sigma_c^f$  en cualquier sección transversal, la compresión  $\sigma_c$  aumenta la tensión de agotamiento axial del valor correspondiente a la resistencia ordinaria  $f_{cd}$  a un valor superior  $f_{cd}^*$ .

La forma más simple y práctica de confinar el hormigón (dejando aparte los pilares constituidos por un tubo de acero relleno de hormigón) es la de disponer cercos que coarten la expansión transversal.

Considerando en primer lugar el caso de un pilar de sección circular (Fig. 35-8) con estribos de sección transversal  $A_{sw}$ , a separación  $s_t$  y partiendo de que, cuando el hormigón alcanza su tensión de rotura, los cercos están plastificados, se tiene:

$$\int_0^{\pi/2} s_t \sigma_{cd}^f \frac{d}{2} \cdot d\varphi \cdot \sin\varphi = A_{sw} f_{yd}$$

o bien

$$\sigma_{cd}^f = \frac{2 A_{sw} f_{yd}}{d s_t} \quad [35.11]$$

donde  $\sigma_{cd}^f$  es la tensión de cálculo de confinamiento.

La cuantía mecánica volumétrica de armadura transversal  $\omega_w$  se define como

$$\omega_w = \frac{\text{Vol. armadura transversal} \cdot f_{yd}}{\text{Volumen correspondiente de hormigón} \cdot f_{cd}} \quad [35.12]$$

En nuestro caso

$$\omega_w = \frac{\pi \cdot d \cdot A_{sw} \cdot f_{yd}}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot s_t \cdot f_{cd}} = \frac{4 A_{sw} f_{yd}}{d \cdot s_t \cdot f_{cd}} \quad [35.13]$$

y de [35.11] y [35.13]

$$\frac{\sigma_{cd}^f}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$$

Consideremos ahora el caso de un pilar de sección transversal cuadrada (Fig. 35-9)

Comparando las tensiones en un plano medio

$$2 A_{sw} \cdot f_{yd} = b s_t \cdot \sigma_{cd}$$

$$\sigma_{cd} = \frac{2 A_{sw} \cdot f_{yd}}{b s_t} \quad \omega_w = \frac{4 A_{sw} \cdot b \cdot f_{yd}}{b^2 \cdot s_t \cdot f_{cd}} = \frac{4 A_{sw} f_{yd}}{b s_t f_{cd}}$$

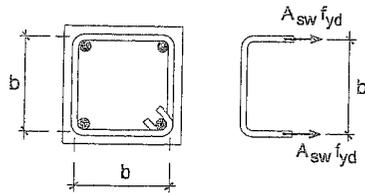


Figura 35-9

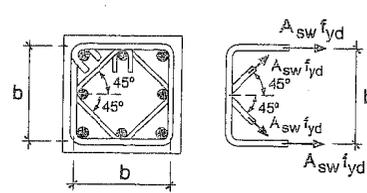


Figura 35-10

$$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$$

Análogamente, para el pilar cuya sección se indica en la figura 35-10

$$2 A_{sw} f_{yd} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} A_{sw} f_{yd} = b s_t \cdot \sigma_{cd}$$

$$\sigma_{cd} = \frac{3,42 A_{sw} f_{yd}}{b s_t}$$

$$\omega_w = \frac{\left( 4 A_{sw} b + 4 A_{sw} b \frac{\sqrt{2}}{2} \right) f_{yd}}{b^2 s_t f_{cd}} = \frac{6,85 A_{sw} f_{yd}}{b s_t f_{yd}}$$

$$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$$

En la figura 35-11 se indican los valores de  $\omega_w$  y de  $\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}$  para los casos más usuales. Como puede verse, una buena aproximación de  $\sigma_{cd}$  es

$$\sigma_{cd} = 0,5 \omega_w f_{cd} \quad [35.14]$$

Sin embargo, existen dos fenómenos que reducen el valor real de  $\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}$ .

El primero es que la eficacia de los cercos depende de su disposición. En la figura 35-12 se indica cualitativamente la eficacia de las distintas disposiciones de cercos. Las zonas sombreadas son las realmente confinadas.

Aproximadamente esta eficacia puede reflejarse como un factor reductor del valor  $\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}$  dado por

$$\alpha_n = 1 - \frac{2,7}{n} \quad [35.15]$$

DISPOSICIÓN	ESQUEMA	CUANTÍA VOLUMÉTRICA	PRESIÓN RELATIVA DE CONFINAMIENTO
(a)		$\omega_w = \frac{4 A_{sw}}{d \cdot s_t} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$	$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$
(b)		$\omega_w = \frac{4 A_{sw}}{b \cdot s_t} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$	$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$
(c)		$\omega_w = \frac{6 A_{sw}}{b \cdot s_t} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$	$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$
(d)		$\omega_w = \frac{6,83 A_{sw}}{b \cdot s_t} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$	$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,5 \omega_w$
(e)		$\omega_w = \frac{9,3 A_{sw}}{b \cdot s_t} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$	$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = 0,43 \omega_w$

Figura 35-11

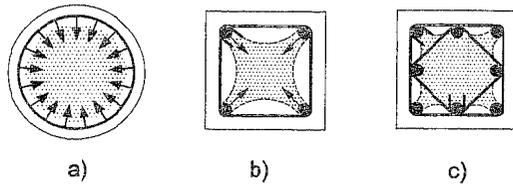


Figura 35-12

para pilares aproximadamente cuadrados, donde  $n$  es el número de barras longitudinales debidamente arriostradas.

Para pilares de sección circular,  $\alpha_n = 1$ .

Una segunda reducción de la eficacia se deriva del hecho indicado en la figura 35-13 que reduce la sección resistente real. Este segundo fenómeno puede ser representado por un segundo factor reductor  $\alpha_s$ .

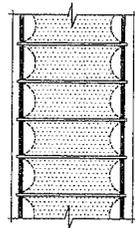


Figura 35-13

Los valores de  $\alpha_s$  son los siguientes:

- Pilares de sección circular con cercos

$$\alpha_s = \left[ 1 - \frac{s_t}{2d} \right]^2 \quad [35.16]$$

- Pilares de sección circular con armadura transversal helicoidal

$$\alpha_s = \left[ 1 - \frac{s_t}{2d} \right] \quad [35.17]$$

- Pilares de sección sensiblemente cuadrada

$$\alpha_s = \left[ 1 - \frac{s_t}{2d} \right] \quad [35.18]$$

$s_t$ , en el caso de pilares no debe ser superior a  $\frac{d}{2}$  en pilares de sección circular y a  $\frac{b}{2}$  en el caso de pilares cuadrados y en todo caso no debe superar los 200 mm.

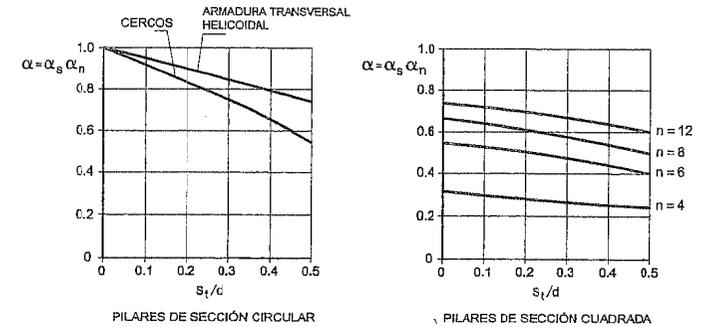


Figura 35-14

La figura 35-14 representa el valor  $\alpha = \alpha_n \alpha_s$  para pilares de sección circular y de sección cuadrada que permiten el cálculo de

$$\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}} = \alpha \omega_w \quad [35.19]$$

El examen de los gráficos de la figura 35-14 indica que, para conseguir un grado de confinamiento en pilares de sección sensiblemente cuadrada análogo al obtenido con pilares circulares, es necesario que el número de barras longitudinales sea superior a 8.

Un método práctico de conseguir un elevado grado de confinamiento es el indicado en la figura 35-15, sólo utilizable en pilares de gran sección, y que consiste en disponer paneles de malla electrosoldada, apoyados en estribos. El anclaje mecánico de los nudos soldados conduce a un elevado valor del coeficiente  $\alpha_n$ , aunque el número de barras longitudinales sea pequeño. El recuadro de la malla no debe ser inferior a  $150 \times 150$  mm para evitar la segregación del hormigón durante el vertido.

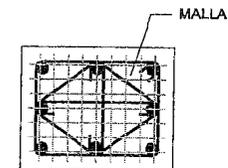


Figura 35-15

A falta de datos más precisos, el valor de la resistencia del hormigón, cuando existe confinamiento, puede estimarse de acuerdo con el C.E.B. mediante la fórmula

$$f_{cd}^* = f_{cd} (1,125 + 1,25 \alpha \omega_w) \quad [35.20]$$

donde  $\alpha = \alpha_n \alpha_s$  y  $\omega_w$  se han definido anteriormente.  $f_{cd}$  es el valor de la resistencia de cálculo del hormigón. En pilares  $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,5}$  como ya se indicó, pero recuérdese que en bielas comprimidas  $f_{cd}$  presenta otros valores (Ver Capítulo 33).

La fórmula [35.20] es la adoptada por el Model Code. La Instrucción EHE adopta la fórmula

$$f_{cd}^* = f_{cd} (1 + 1,6 \alpha \omega_w) \quad [35.21]$$

donde  $\alpha$  viene dado por la figura 35-16.

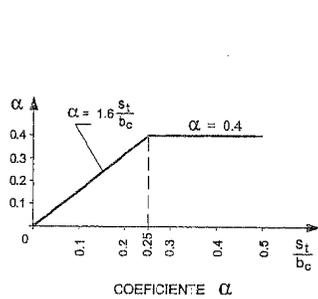


Figura 35-16

La resistencia de la pieza viene dada por

$$N_u = 0,85 A_{cc} f_{cd}^* + A_s f_{yd} \quad [35.22]$$

donde  $A_{cc}$  es el área de la sección de hormigón encerrada por el estribo exterior de la armadura transversal de confinamiento.

La razón de no contar con el área de hormigón exterior al estribo no sólo es su falta de confinamiento, sino el hecho de que tal área suele desprenderse antes de que la pieza alcance el estado límite último.

Para que el confinamiento sea posible, no sólo la cuantía de cercos debe ser suficiente, sino que su cierre debe garantizar la no apertura de los cercos antes de alcanzar el estado límite último.

El confinamiento transversal del hormigón no sólo incrementa su resistencia axial, sino que incrementa también su deformación en estado límite último.

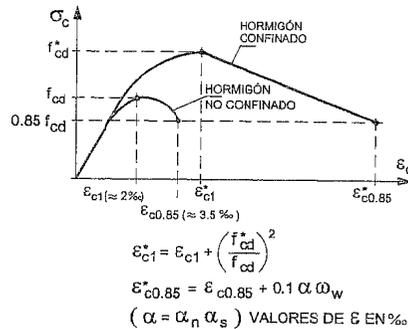


Figura 35-17

El C.E.B., a falta de datos más precisos, adopta el diagrama indicado en la figura 35-17.

### 35.2.4 EXCENRICIDAD MÍNIMA

De hecho, el caso de compresión centrada es de improbable presentación en la práctica, ya que se producen excentricidades inevitables debidas a la aplicación de la carga o a desviaciones constructivas. Por todo ello, la Instrucción EHE establece, de acuerdo con el C.E.B., que la sección debe calcularse considerando que el esfuerzo  $N_d$  presenta una excentricidad mínima  $e_a$  en la dirección más desfavorable, igual al mayor de los valores

$$\frac{h}{20}, \quad 20 \text{ mm}$$

donde  $h$  es el canto total de la sección en la dirección considerada<sup>1</sup>. Esta comprobación debe realizarse de acuerdo con lo que se expone en el Capítulo 37.

En el caso de secciones rectangulares, lo anterior es prácticamente equivalente a calcular la sección en compresión centrada, pero empleando, como coeficiente de ponderación de acciones, en lugar de los valores  $\gamma_{fg}$ ,  $\gamma_{fd}$ , anteriormente vistos, los dados por la expresión

$$\gamma'_f = \gamma_f \frac{b + 50}{b} \geq \frac{9}{8} \gamma_f \quad [35.23]$$

donde  $b$  es la menor dimensión de la sección, expresada en milímetros.

### 35.2.5 CUANTÍA MÍNIMA

La Instrucción EHE establece que, en los casos de compresión simple o compuesta, habrá de respetarse una cuantía para las armaduras longitudinales de cada cara  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ , tales que

$$A'_{s1} f_{yd} \geq 0,05 N_d \quad [35.24]$$

$$A'_{s2} f_{yd} \geq 0,05 N_d \quad [35.25]$$

En general, en piezas con armadura simétrica de área  $A'_s$

$$A'_s f_{yd} \geq 0,1 N_d \quad [35.26]$$

1 En el caso de secciones sometidas a compresión compuesta o flexión compuesta, la comprobación se realiza considerando, sucesivamente, la excentricidad  $e_a$  en cada uno de los planos principales, pero *no simultáneamente* en ambos.

2 En las tres fórmulas, si el acero no es de dureza natural, debería sustituirse  $f_{yd}$  por  $\sigma_{sd 0,002}$ .

Los límites establecidos son por supuesto convencionales, pero responden a la necesidad evidente de asegurar a la pieza un mínimo de ductilidad y de capacidad frente a flexiones imprevistas.

La Instrucción establece también una cuantía geométrica mínima del 4‰ tanto para aceros B400 S como B500 S.

El MODEL CODE 90 establece una cuantía geométrica mínima de 0,008 en todos los casos.

El EUROCÓDIGO EC-2 establece la condición

$$A_{s,min} = \frac{0,15 N_d}{f_{yd}} \geq 0,003 A_c \quad [35.27]$$

### 35.2.6 CUANTÍA MÁXIMA

Análogamente al caso anterior, EHE establece una cuantía máxima que viene dada por las fórmulas

$$A'_{s1} f_{yd} \leq 0,5 f_{cd} A_c \quad [35.28]$$

$$A'_{s2} f_{yd} \leq 0,5 f_{cd} A_c \quad [35.29]$$

que para una pieza simétrica se transforma en

$$A'_s f_{yd} \leq f_{cd} A_c \quad [35.30]$$

Sustituyendo  $A'_s f_{yd} = f_{cd} A_c$  en las fórmulas [35.1] y [35.2] y aceptando  $\sigma_s 0,002 \approx f_{yd}$

$$N_d = 0,85 f_{cd} A_c + f_{cd} A_c = 1,85 f_{cd} A_c$$

Es decir que, en el caso de cuantía máxima, la armadura proporciona el 54% de la capacidad resistente de la pieza.

El MODEL CODE 90 establece una cuantía geométrica máxima de 0,08.

El EUROCÓDIGO EC-2 establece análogo valor, incluso en zonas de solapes.

Las razones para establecer una cuantía máxima vienen impuestas por las consideraciones siguientes:

- Las cuantías muy altas suponen dificultad de hormigonado, en especial en las zonas de solapes y en los nudos.

1 En las tres fórmulas, si el acero no es de dureza natural, debería sustituirse  $f_{yd}$  por  $\sigma_{sd0,002}$ .

- Las piezas con cuantías muy altas son muy sensibles a los incendios.
- Cuanto más elevada es la cuantía de una pieza comprimida, mayor es su coste.

### 35.2.7 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS

En el proyecto de piezas comprimidas deben adoptarse las disposiciones siguientes:

- La dimensión mínima de pilares ejecutados "in situ" será de 250 mm.
- El diámetro mínimo de la armadura longitudinal será de 12 mm.
- La separación máxima entre armaduras longitudinales consecutivas será de 350 mm.
- En pilares circulares, el número mínimo de barras longitudinales será de seis.
- Se dispondrán cercos a separación  $s_i$  no superior a quince veces el diámetro  $\phi_{mín}$  de la barra longitudinal más delgada ni a 300 mm, sin superar la menor dimensión transversal de la sección de la pieza.
- El MODEL CODE 90 y el EUROCÓDIGO EC-2 establecen doce veces el diámetro y ACI 318-95 adopta dieciséis diámetros como separación de cercos.
- El diámetro  $\phi_i$  de los cercos será igual o superior a 1/4  $\phi_{máx}$  siendo  $\phi_{máx}$  el diámetro de la barra longitudinal más gruesa.
- Si la separación  $s_i$  entre cercos es inferior a 15  $\phi_{máx}$  su diámetro  $\phi_i$  podrá disminuirse de tal forma que la relación entre la sección del cerco y la separación  $s_i$  sea la misma que cuando se cumple

$$\phi_i = \frac{1}{4} \phi_{máx} \quad \text{y} \quad s_i = 15 \phi_{mín}$$

- Cada barra debe quedar arriostrada en dos sentidos por ramas de estribos cuyo ángulo no supere los 135° (Fig. 35-18).
- Cuando un conjunto de estribos simples forma uno compuesto (por ejemplo Fig. 35-18a)), los distintos estribos simples deben colocarse en contacto.
- Como excepción, se permite arriostrar con estribos alternativamente una de cada dos barras consecutivas cuando su separación no supere los 150 mm.

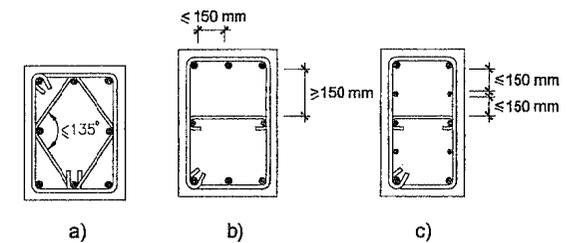


Figura 35-18

- El proyectista debe ejercer su juicio con especial cuidado en cuanto a la disposición de estribos. Basta observar la figura 35-18 para ver que, junto al aspecto positivo que los estribos representan para la contribución de la armadura a la capacidad resistente del pilar, en el caso usual de pilares hormigonados paralelamente a su directriz, los estribos, especialmente si tienen ramas múltiples, producen un auténtico "cribado" del hormigón durante el vertido, reduciendo su resistencia y, por tanto, la de la pieza.

- Para recubrimientos, grupos de barras y detalles varios, véase el Capítulo 51.

### EJEMPLO 35.1

Dado un pilar de sección  $250 \cdot 250$  mm, sometido a un esfuerzo axial  $N_g = 450$  kN y  $N_c = 300$  kN, dimensionar la armadura con cuatro redondos. Hormigón H-25. Acero B 400S.  $\gamma_{fs} = 1,35$ ,  $\gamma_{ft} = 1,50$ ,  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ . Emplear el método simplificado de la fórmula [35.24].

$$N_d = 1,35 \cdot 450 + 1,5 \cdot 300 = 1057,5 \text{ kN}$$

De acuerdo con la fórmula [35.23]

$$N_d = \frac{250 + 50}{250} \cdot N_d = 1269 \text{ kN}$$

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ Mpa}$$

$$f_{yd} = \frac{400}{1,15} = 348 \text{ N/mm}^2$$

y de acuerdo con [35.2]

$$A_s = \frac{1269000 - 0,85 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 250}{348} = 1097 \text{ mm}^2$$

$$A_s < 4 \phi 20$$

(Se ha considerado como  $A_c$  la sección total).

De acuerdo con 35.2.7 los estribos deben ser de  $\phi 6$  mm y colocarse a una distancia máxima de 250 mm.

### 35.3 PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

En sentido estricto, pretensar una pieza comprimida es contraproducente, pues como veremos, el pretensado reduce la capacidad resistente de la pieza en compresión centrada.

Sin embargo, en ciertas ocasiones interesa pretensar las piezas sometidas a este tipo de esfuerzo. Las aplicaciones están ligadas casi siempre a elementos en los cuales el pretensado es útil frente a flexiones accidentales, como es el caso frecuentemente de pilares prefabricados. Un caso típico de empleo de esta solución es el caso de los pilotes prefabricados. En este tipo de piezas el pretensado no sólo protege de las consecuencias de flexiones accidentales durante la hinca, sino también de eventuales puestas en tracción debidas a las ondas producidas durante la propia hinca.

Por supuesto, otro caso típico de empleo es el de las torres esbeltas.

A continuación presentamos el caso general de que la pieza tenga armaduras activas y pasivas.

Consideremos la pieza de la figura 35-19 donde el esfuerzo axial  $N$  actúa en el baricentro plástico de la sección.

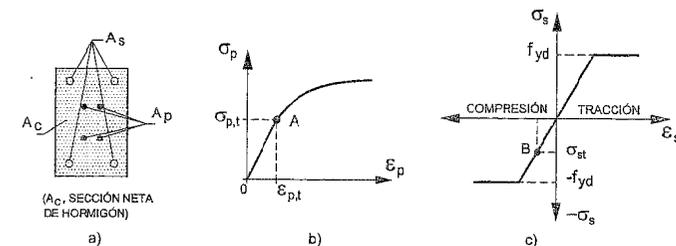


Figura 35-19

Sea  $\sigma_{pat}$  la tensión de la armadura activa antes de producirse el acortamiento elástico instantáneo y  $\sigma_{pt}$  la tensión después de producirse dicho acortamiento.

Como en el caso de tracción simple, dichas tensiones se calculan mediante las fórmulas [29.22] a [29.24] haciendo  $e_0 = 0$ , resultando

$$\sigma_{pat} = \sigma_{po} - \frac{\sum P_i}{A_p} \quad [35.31]$$

$$\sigma_{pt} = \frac{\sigma_{pat}}{1 + m_p \frac{A_p}{A_c + m_s A_s}} \quad [35.32]$$

$\sum P_i$  es la suma de pérdidas de fuerza anteriores al acortamiento elástico.

En las fórmulas anteriores, al tratarse de un fenómeno instantáneo,  $m_p = \frac{E_p}{E_{ci}}$ ,  $m_s = \frac{E_s}{E_{ci}}$ .

$A_c$  es el área de la sección neta de hormigón,  $A_s$  la de la armadura pasiva y  $A_p$  la de la activa.

La fuerza de pretensado comprime tanto al hormigón como a la armadura pasiva. Las tensiones después de aplicar el pretensado son por tanto

$$\sigma_{ct} = \frac{\sigma_{pt} A_p}{A_c + m_s A_s} \text{ en el hormigón} \quad [35.33]$$

$$\sigma_{st} = \frac{m_s \sigma_{pt} \cdot A_p}{A_c + m_s A_s} \text{ en la armadura pasiva} \quad [35.34]$$

donde  $m_s = \frac{E_s}{E'_{ci}}$ .

La tensión de la armadura activa es, en ese instante,  $\sigma_{pt}$  y viene representada por el punto A en la figura 35-19b). La tensión de la armadura pasiva es en ese instante  $\sigma_{st}$  y viene representada por el punto B en la figura 35-19c).

El acortamiento elástico instantáneo de la pieza (hormigón y armadura pasiva) es

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{ct}}{E'_{ci}} = \frac{\sigma_{st}}{E_s} = \frac{\sigma_{pt} A_p}{(A_c + m A_s) E'_{ci}} \quad [35.35]$$

### 35.3.1 CASO DE CARGA APLICADA A CORTA EDAD

En ese caso el estado de la pieza es sensiblemente el correspondiente a la etapa inmediatamente posterior al acortamiento elástico instantáneo.

En el agotamiento la tensión del hormigón será  $0,85 f_{cd}$  y, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 32, se producirá con un acortamiento  $\varepsilon_{cu} = 0,002$ .

La armadura pasiva en el agotamiento presentará una tensión igual a su resistencia de cálculo  $f_{yd}$ .

Sin embargo, existe un aspecto particular que debe ser considerado: En la figura 35-20 se han representado los diagramas tensión-deformación del hormigón ( $OCC'$ ) y de la armadura pasiva ( $OB B'$ ). En la misma figura se ha representado en la parte superior el diagrama correspondiente a la armadura activa, desplazado de forma que la abscisa  $\varepsilon_{pt}$  de dicha armadura coincida con las  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{st}$  del hormigón y de la armadura pasiva inmediatamente después del acortamiento elástico.

Al aplicar la carga exterior, la deformación de la pieza crecerá hasta el acortamiento de agotamiento  $\varepsilon_{cu} = 0,002$ . Alcanzado éste, la armadura activa habrá reducido su tensión de  $\sigma_{pt}$  a  $\sigma_{pu}$ . En la práctica esta tensión, dados los alargamientos usuales dados a la armadura pretensada, seguirá siendo de tracción. El equilibrio de la pieza en el agotamiento se indica en la figura 35-21.

La ecuación de equilibrio conduce a

$$N_u = 0,85 A_c f_{cd} + A_s \sigma_{sd} - A_p \cdot \sigma_{pu} \quad [35.36]$$

$\sigma_{sd}$  es la tensión de la armadura pasiva para  $\varepsilon_s = 0,002$ .

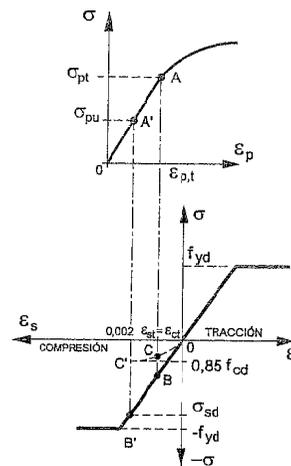


Figura 35-20

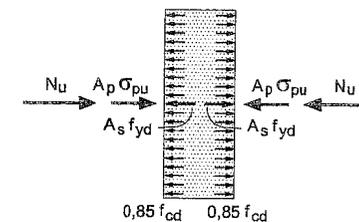


Figura 35-21

Como

$$\sigma_{pu} = \sigma_{pt} - (0,002 - \varepsilon_{ct}) E_p$$

teniendo en cuenta [35.33],

$$\sigma_{pu} = \sigma_{pt} - \left( 0,002 - \frac{\sigma_{pt} \cdot A_p}{(A_c + m_s A_s) E'_{ci}} \right) E_p \quad [35.37]$$

y por tanto

$$N_u = 0,85 A_c f_{cd} + A_s \sigma_{sd} - A_p \left[ \sigma_{pt} - \left( 0,002 - \frac{\sigma_{pt} \cdot A_p}{(A_c + m_s A_s) E'_{ci}} \right) E_p \right] \quad [35.38]$$

Lo anterior indica el carácter reductor de la fuerza de pretensado en el valor del esfuerzo axial de agotamiento a compresión. Por supuesto, esta reducción desaparece si se anula o hace negativo<sup>1</sup> el valor de  $\sigma_{pu}$ , pero ello sólo puede conseguirse a base de reducir drásticamente la tensión de tesado, aumentando correlativamente su sección, con el fin de mantener la fuerza de pretensado y, por tanto, el valor deseado de precompresión en el hormigón, lo cual supone un serio incremento de corte.

<sup>1</sup> Un valor negativo de  $\sigma_{pu}$  significaría que la armadura activa entraría en compresión.

### EJEMPLO 35.2

Consideramos de nuevo la pieza del ejemplo 34.4 pero sometida ahora a la acción del pretensado y de una carga centrada exterior. La sección es de  $400 \cdot 400$  mm, ejecutada con hormigón H-30, que tiene al transferir el pretensado una resistencia de  $20 \text{ N/mm}^2$ . Va armada con  $8 \phi 20$  de armadura pasiva y pretensada con 10 cordones Y 1770 S7, con carga característica de rotura de  $265 \text{ kN}$  y módulo de elasticidad noval de  $190.000 \text{ N/mm}^2$ , tesados al 75% de la carga de rotura. (Su diagrama es el de la figura 29.24).

Calcular su sollicitación de agotamiento y su evolución bajo la aplicación del esfuerzo axial de compresión hasta rotura. Las pérdidas por rozamiento y penetración de cuñas se estiman en el 2% de la tensión inicial.

La fuerza inicial de pretensado es

$$P_0 = 10 \cdot 0,75 \cdot 265 = 1987,5 \text{ kN}$$

$$\sigma_{po} = \frac{1987,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 150} = 1325 \text{ N/mm}^2$$

Tal como vimos en el ejemplo 34.4

$$\sigma_{pat} = 1298 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{pt} = 1215 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ct} = -10,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{st} = -87,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{st} = 0,000439$$

$$\varepsilon_{pt} = 0,0064$$

Con deformación de agotamiento de la pieza  $\varepsilon_{ct} = 0,002$  y con  $\varepsilon_{st} = 0,000439$ , el acortamiento de la pieza desde el estado de pretensado inmediatamente después del acortamiento elástico hasta el estado límite último será

$$\varepsilon = 0,002 - 0,000439 = 0,00156$$

Este acortamiento es común al hormigón, armadura pasiva y armadura activa y con él la pérdida de tensión de la armadura activa será

$$\Delta \sigma_p = 0,00156 \cdot 190.000 = 297 \text{ N/mm}^2$$

y su tensión

$$\sigma_{pu} = \sigma_{pt} - \Delta \sigma_p = 1215 - 297 = 918 \text{ N/mm}^2$$

y de acuerdo con [35.38]

$$N_u = 0,85 (400 \cdot 400 - 8 \cdot 314 - 10 \cdot 150) \cdot \frac{20}{1,5} + 8 \cdot 314 \cdot \frac{400}{1,15} - 10 \cdot 150 \cdot 918 = 1265040 \text{ N}$$

$$N_u = 1265 \text{ kN}$$

Si no se hubiera pretensado la pieza

$$N_u = 0,85 (400 \cdot 400 - 8 \cdot 314) \cdot \frac{20}{1,5} + 8 \cdot 314 \cdot \frac{400}{1,15} = 2659040 \text{ N} = 2.659 \text{ kN}$$

( $N_u$  se ha reducido de  $2.659 \text{ kN}$  a  $1265 \text{ kN}$  debido al pretensado).

### 35.3.2 CASO DE CARGA APLICADA A LARGO PLAZO

El desarrollo es inmediato de acuerdo con la evolución de la resistencia del hormigón (Capítulo 28) y de la evolución de las pérdidas de fuerza en la armadura. (Capítulo 29).

Obsérvese que al **aumentar la edad también aumenta la capacidad resistente de la pieza** y ello por dos motivos:

- Aumenta la resistencia del hormigón.
- Al aumentar la deformación del hormigón por fluencia y retracción, se reduce la fuerza de pretensado, que además lo hace también por la relajación de la armadura. Ello conduce a un incremento de tensión en la armadura pasiva y a una reducción de la tensión  $\sigma_{pu}$  y correlativamente a un incremento de  $N_u$ .

### BIBLIOGRAFÍA

- (35.1) INTEMAC. "Investigación experimental sobre el comportamiento en rotura de soportes armados con cuantía elevada de armadura". (1976). Ref. E/LC-76015/EL.
- (35.2) INTEMAC. "Plan de Investigación sobre la influencia de la distribución y cuantía de armadura transversal en el comportamiento hasta rotura de soportes de hormigón armado". (1972). Ref. E/70005/2.

## CAPÍTULO 36

### ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE FLEXIÓN SIMPLE

#### 36.1 FLEXIÓN SIMPLE EN PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO<sup>1</sup>

La flexión simple en piezas de hormigón armado, de acuerdo con lo visto en 32.8, comprende los dominios de deformación 2, 3 y 4.

En el dominio 2, con la deformación del acero limitada al 10‰, para pequeñas profundidades de  $x$ , como veremos en 36.7, la sección presenta mayor capacidad resistente como pieza de hormigón en masa que como pieza de hormigón armado o pretensado (fig. 36-1a)). La pieza, al aparecer la primera grieta, rompe bruscamente, con rotura de la armadura de tracción. Este tipo de rotura frágil es, en principio, indeseable y está condicionado por los requisitos de cuantía mínima contemplados en 36.7 (Fig. 36-2).

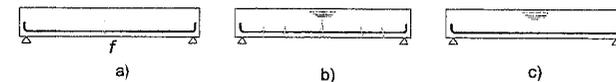


Figura 36-1

Para cuantías intermedias, coincidentes con la mayor parte de los dominios 2 y 3, la rotura de la pieza se produce por agotamiento del acero, que en el estado límite último alcanza o supera su límite elástico. Usualmente la armadura de la pieza no rompe<sup>2</sup>, se produce en la zona de rotura una fuerte elevación de la fibra neutra y el

<sup>1</sup> El Anejo n° 8 de EHE contiene un conjunto de fórmulas simplificadas que cubren el contenido de los Capítulos 36, 37 y 38.

<sup>2</sup> Con diámetros finos y armaduras muy adherentes, puede ocurrir la rotura de la armadura.

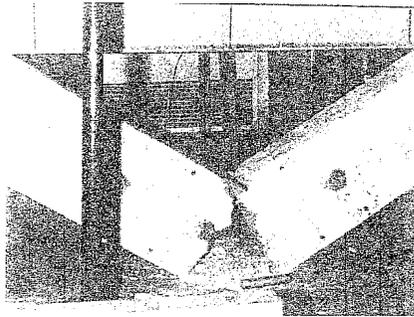


Figura 36-2  
Rotura frágil en flexión simple (Cortesía de INTEMAC)

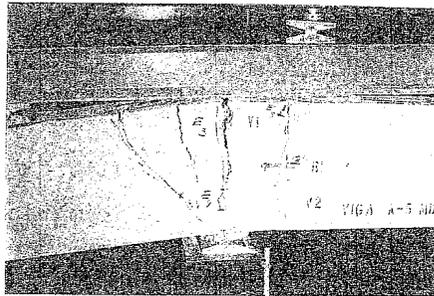


Figura 36-3a  
Plastificación en un apoyo, debida a un momento flector negativo, en una viga con cuantía media (Cortesía de INTEMAC)

hormigón comprimido se fractura. Obsérvese, sin embargo, que el fallo del hormigón es secundario y que el fallo primario es el agotamiento de la armadura de tracción, que alcanza, entre los labios de la fisura, fuertes deformaciones locales, aunque no rompa (fig. 36-1b y fig. 36-3a y b).

Si empleamos cuantías extraordinariamente altas, sin utilizar armadura de compresión, la fibra neutra (fig. 36-4.a) alcanzará gran profundidad y, con el acortamiento de rotura del hormigón  $\epsilon_c = 0,0035$ , el alargamiento del acero  $\epsilon_s$  será escaso (fig. 36-4.b). Para cuantías elevadas, a este alargamiento  $\epsilon_s$  le corresponderán puntos en la recta de HOOKE (fig. 36-4.c). De esta situación se derivan tres consecuencias, todas ellas indeseables:

- La pieza alcanzará la rotura por agotamiento del hormigón comprimido, con poca o ninguna fisuración de aviso (fig. 36-1c).
- El acero, que no está agotado, trabaja a baja tensión y, por lo tanto, de forma antieconómica.
- La pieza, que utiliza el hormigón al máximo de sus posibilidades, estará sometida a un fuerte proceso de fluencia y sus deformaciones diferidas serán importantes.

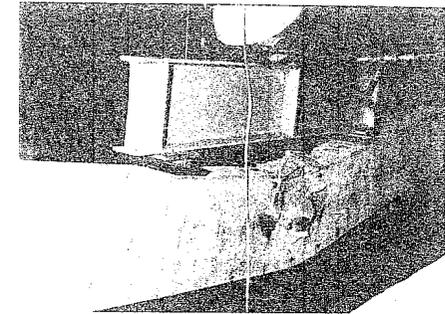


Figura 36-3b  
Rotura en flexión de una viga con cuantía media (Cortesía de INTEMAC)

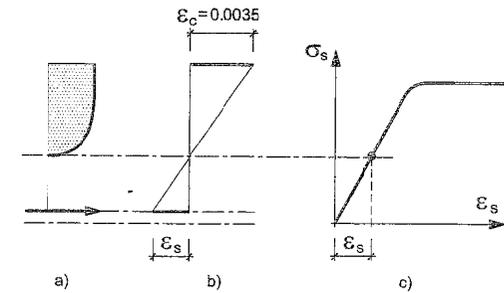


Figura 36-4a

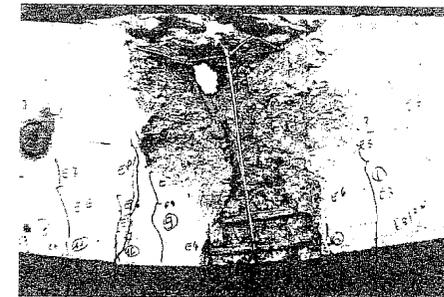


Figura 36-4b  
Rotura de una pieza en flexión simple con cuantía alta (Cortesía de INTEMAC)

La cuantía o la profundidad límite correlativa no puede identificarse con el valor  $x_{lim}$ , frontera entre los dominios 3 y 4, ya que depende de muchos factores y en particular de la adherencia y diámetro de las armaduras empleadas, pero convencionalmente aceptaremos dicha identificación, aunque en 36.7 daremos algunas reglas complementarias.

Lo dicho anteriormente es válido sustancialmente para piezas armadas o pretensadas.

### 36.1.1 ECUACIONES GENERALES

Para una sección de forma cualquiera (fig. 36-5), las ecuaciones de equilibrio para piezas de hormigón armado son:

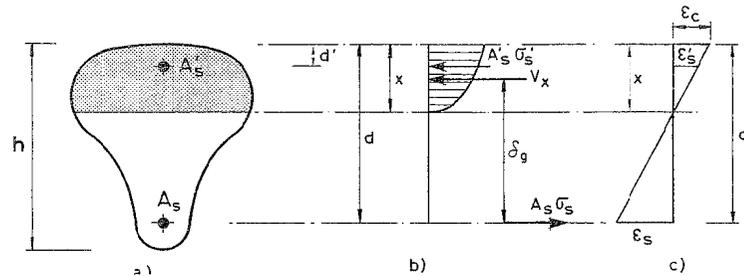


Figura 36-5

Fuerzas:

$$V_x + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s = 0 \quad [36.1]$$

Momentos:

$$V_x \delta_g + A'_s \sigma'_s (d - d') = M_u \quad [36.2]$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones resultan:

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s}{d - x} \quad [36.3]$$

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon'_s}{x - d'} \quad [36.4]$$

donde:

$V_x$  = Volumen del bloque de compresiones.

$\delta_g$  = Distancia de la armadura de tracción a la fibra correspondiente al c.d.g. del bloque de compresiones.

### 36.1.2 EMPLEO DEL DIAGRAMA RECTANGULAR EN SUSTITUCIÓN DEL DIAGRAMA PARÁBOLA-RECTÁNGULO

La Instrucción EHE permite el uso de otros diagramas tensión-deformación del hormigón, además del expuesto de la parábola-rectángulo. En particular, permite el uso

del diagrama rectangular, tal como se indica en la figura 36-6, con profundidad de bloque igual al 80% de la fibra neutra y tensión última  $0,85 f_{cd}$ .

Este diagrama es especialmente adecuado cuando la sección no está toda comprimida y, en particular, en flexión simple. Cuando se manejan secciones de forma compleja, su utilización simplifica extraordinariamente los cálculos!

Tanto el MODEL CODE CEB-90 como el EUROCÓDIGO EC-2 adoptan la parábola-rectángulo pero permiten también el uso del diagrama rectangular.

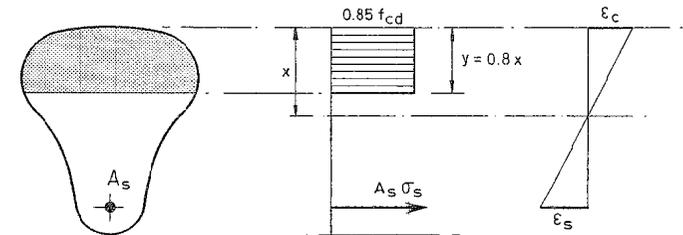


Figura 36-6

### 36.1.3 CASO PARTICULAR DE LA SECCIÓN RECTANGULAR

Adoptando para el diagrama del hormigón el de parábola-rectángulo, basta particularizar para la sección rectangular las ecuaciones [36.1] a [36.4].

#### 36.1.3.1 SECCIÓN RECTANGULAR SIN ARMADURA DE COMPRESIÓN

Las ecuaciones [36.1] a [36.3] (la [36.4] no existe para este caso), conducen a (fig. 36-7)

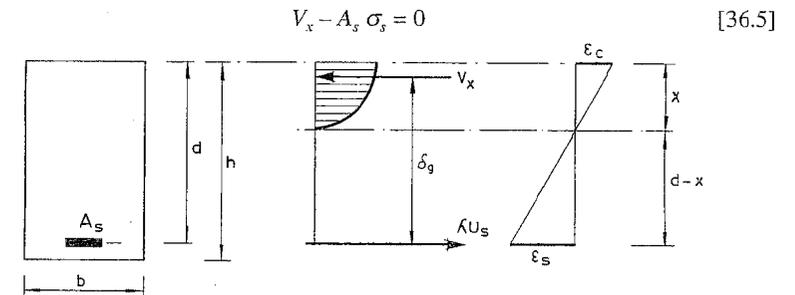


Figura 36-7

1 En flexión simple puede introducirse la simplificación adicional de suponer constante el acortamiento en rotura del hormigón, con  $\epsilon_{cu} = 0,0035$ , abandonando la limitación  $\epsilon_s \leq 0,01$ . (Ver J. Calavera "Cálculo. Construcción y Patología de Forjados de Edificación. INTEMAC. Madrid, 1ª Edición, 1981, págs. 173 y 138 y ediciones siguientes). Este criterio ha sido adoptado por el CEB a partir del MODEL CODE-90.

$$M_u - V_x \delta_s = 0 \quad [36.6]$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} \quad [36.7]$$

Llamemos:

$$\sigma_s = \lambda f_{yd} \quad [36.8]$$

la tensión de cálculo del acero en el estado límite último, de donde la *tensión relativa*  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \quad [36.9]$$

es la relación entre la tensión de cálculo del acero en el agotamiento de la sección y el límite elástico de cálculo (fig. 36-7).

Para los aceros deformados en frío<sup>1</sup> (fig. 36-8a), a cada punto del diagrama le corresponde un valor  $\lambda = \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$ , creciente con  $\varepsilon_s$ . En el caso de aceros laminados en caliente (fig. 33-8b), los valores de  $\lambda$  crecen con  $\varepsilon_s$  hasta  $\varepsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s}$ , permaneciendo fijos de

ahí en adelante, dentro del campo de deformaciones habitualmente utilizado. La Tabla T-36.1 contiene, para los aceros deformados en frío usuales, los valores de  $\lambda$  correspondientes a distintos valores de  $\varepsilon_s$ . Estos valores han sido obtenidos a partir de los diagramas contenidos en el gráfico GT-81. Se indican también los valores correlativos de  $\frac{x}{d}$  según [36.7], con  $\varepsilon_c = 0,0035$ .

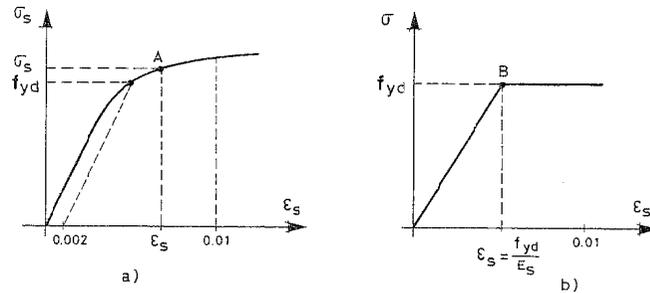


Figura 36-8

<sup>1</sup> De aquí en adelante, englobaremos bajo el término general "deformados en frío" tanto los retorcidos y estirados como los trefilados, los laminados en frío y los de pretensado.

TABLA T.36.1

ACERO B 400			ACERO B 500		
$\frac{x}{d}$	$\varepsilon_s$	$\lambda$	$\frac{x}{d}$	$\varepsilon_s$	$\lambda$
$\leq 0,259$	0,010	1,096	0,25	0,010	1,092
0,30	0,0082	1,077	0,30	0,0082	1,071
0,35	0,0065	1,055	0,35	0,0065	1,048
0,40	0,0053	1,034	0,40	0,0053	1,026
0,45	0,0043	1,013	0,45	0,0043	1,002
0,479	0,0038	1,000	0,457	0,0042	1,000
0,50	0,0035	0,992	0,50	0,0035	0,977
0,55	0,0029	0,968	0,55	0,0029	0,948
0,60	0,0023	0,941	0,60	0,0023	0,909
$\left(\frac{x}{d}\right)_{lim} = 0,663$	0,0018	0,889	$\left(\frac{x}{d}\right)_{lim} = 0,613$	0,0022	0,895

Llamaremos capacidad mecánica de una armadura,  $U_s$ , al producto

$$U_s = A_s f_{yd} \quad [36.10]$$

Obsérvese que el concepto de capacidad mecánica corresponde, en general, a una situación nominal. En el caso de aceros laminados en caliente, la fuerza final desarrollada por la armadura coincide con la capacidad mecánica para toda deformación,  $\varepsilon_s$ , igual o superior a la correspondiente al límite elástico de cálculo. En los aceros deformados en frío, eso sólo ocurre para el punto correspondiente al límite elástico.

Adoptados los conceptos de tensión relativa al acero,  $\lambda$ , y capacidad mecánica de la armadura,  $U_s$ , las ecuaciones [36.5] a [36.7] pueden escribirse:

$$V_x - \lambda U_s = 0 \quad [36.11]$$

$$M_u - V_x \delta_s = 0 \quad [36.12]$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} \quad [36.13]$$

a) Ecuaciones en cada dominio de deformación

a-1) Deformaciones en el dominio 2

Estamos en el caso  $0 \leq \frac{x}{d} \leq 0,259$ . Como vimos, en este caso  $\varepsilon_s = 0,01$ , sin que

el hormigón alcance su deformación límite. Para  $\varepsilon_s = 0,01$ ,  $\lambda = 1,092$  ó  $1,096$  según la Tabla T-36.1.

Para valores de  $\varepsilon_c \leq 0,002$ , el bloque de hormigón es de forma parabólica y la expresión de  $V_x$  en función de  $x$ ,  $b$  y  $\varepsilon_c$ , resulta<sup>1</sup>:

$$V_x = 0,85 \frac{f_{cd}}{12} b x 1.000 \varepsilon_c (6 - 1.000 \varepsilon_c) \quad [36.14]$$

y la de  $\delta_g$  es:

$$\delta_g = d - x + \frac{x}{1.000 \varepsilon_c} \left[ 2 - \frac{3(4 - 1.000 \varepsilon_c)^2}{4(6 - 1.000 \varepsilon_c)} \right] \quad [36.15]$$

Las deformaciones del hormigón,  $\varepsilon_c$ , iguala al valor 0,002 para una profundidad que se deduce de [36.7] haciendo  $\varepsilon_s = 0,01$  y  $\varepsilon_c = 0,002$ .

$$\frac{0,002}{x} = \frac{0,01}{d - x} \quad [36.16]$$

de donde

$$\frac{x}{d} = \frac{1}{6} \quad [36.17]$$

Sustituyendo [36.14] en [36.11]

$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{0,85}{12} \cdot \frac{x}{d} \cdot 1.000 \varepsilon_c (6 - 1.000 \varepsilon_c) \quad [36.18]$$

De [36.12]

$$\mu = \frac{M_u}{f_{cd} b d^2} = \lambda \frac{U_s}{f_{cd} b d} \left[ 1 - \frac{x}{d} \left( 1 - \frac{2 - \frac{3(4 - 1.000 \varepsilon_c)^2}{4(6 - 1.000 \varepsilon_c)}}{1.000 \varepsilon_c} \right) \right] \quad [36.19]$$

En el límite, para  $\varepsilon_c = 0,002$ ,  $\frac{x}{d} = \frac{1}{6}$ , resultando<sup>2</sup>:

1 Se omite aquí, por brevedad, esta deducción y otras análogas que seguirán. Su desarrollo en detalle puede verse en el trabajo de F. BLANCO "Expresiones analíticas de los diagramas tensionales en la flexión de piezas de hormigón armado". (36.1).

2 Los valores son prácticamente idénticos para aceros B 400 y B 500.

$$\text{Aceros deformados en frío: } \begin{cases} \omega_{0,002} = 0,086 \\ \mu_{0,002} = 0,089 \end{cases} \quad [36.20]$$

$$\text{Aceros laminados en caliente: } \begin{cases} \omega_{0,002} = 0,094 \\ \mu_{0,002} = 0,089 \end{cases} \quad [36.21]$$

Para valores de  $\varepsilon_c > 0,002$ , el bloque de hormigón está formado por el segmento parabólico más una fracción del rectángulo. Sigue siendo  $\varepsilon_s = 0,01$ .

La expresión de  $V_x$  toma ahora la forma

$$V_x = \frac{0,85 f_{cd} b x (3.000 \varepsilon_c - 2)}{3.000 \varepsilon_c} \quad [36.22]$$

y la de  $\delta_g$

$$\delta_g = d - x + \frac{x}{1.000 \varepsilon_c} \cdot \frac{10 + 3 \left[ (1.000 \varepsilon_c)^2 - 4 \right]}{2(3.000 \varepsilon_c - 2)} \quad [36.23]$$

con lo que se obtiene

$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{0,85}{3} \cdot \frac{x}{d} \cdot \frac{3.000 \varepsilon_c - 2}{1.000 \varepsilon_c} \quad [36.24]$$

$$\mu = \frac{M_u}{f_{cd} b d^2} = \lambda \frac{U_s}{f_{cd} b d} \left[ 1 - \frac{x}{d} \left( 1 - \frac{10 + 3 \left[ (1.000 \varepsilon_c)^2 - 4 \right]}{2.000 \varepsilon_c (3.000 \varepsilon_c - 2)} \right) \right] \quad [36.25]$$

Los valores frontera de  $\omega$  y  $\mu$  entre los dominios 2 y 3 se obtienen para  $\varepsilon_c = 0,0035$  y  $\frac{x}{d} = 0,259$ . Sustituyendo en [36.24] y [36.25], se obtiene:<sup>1</sup>

$$\text{Aceros deformados en frío: } \begin{cases} \omega_{2,3} = 0,163 \\ \mu_{2,3} = 0,158 \end{cases} \quad [36.26]$$

$$\text{Aceros laminados en caliente: } \begin{cases} \omega_{2,3} = 0,179 \\ \mu_{2,3} = 0,158 \end{cases} \quad [36.27]$$

1 Los valores son prácticamente idénticos para aceros B 400 y B 500.

a-2) Deformaciones en el dominio 3

El acero ya no tiene una deformación fija  $\varepsilon_s = 0,01$ , sino que ésta decrece al aumentar la cuantía, siendo  $\varepsilon_c = 0,0035$ . Las ecuaciones toman la forma

$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{0,85}{3} \cdot \frac{x}{d} \cdot \frac{3.000 \varepsilon_c - 2}{1.000 \varepsilon_c} \quad [36.28]$$

que para  $\varepsilon_c = 0,0035$  resulta

$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d} = \frac{0,688}{\lambda} \cdot \frac{x}{d} \quad [36.29]$$

$$\mu = \frac{M_u}{f_{cd} b d^2} = \lambda \frac{U_s}{f_{cd} b d} \left[ 1 - \frac{x}{d} \left( 1 - \frac{10 + 3 \left[ (1.000 \varepsilon_c)^2 - 4 \right]}{2.000 \varepsilon_c (3.000 \varepsilon_c - 2)} \right) \right] \quad [36.30]$$

que para  $\varepsilon_c = 0,0035$  se transforma en

$$\mu = \frac{M_u}{f_{cd} b d^2} = 0,688 \frac{x}{d} \left[ 1 - 0,416 \frac{x}{d} \right] \quad [36.31]$$

El valor de  $\lambda$  se obtiene en la Tabla T-36.1, a partir del valor de  $\varepsilon_s$ , despejado en función de  $\frac{x}{d}$  de la ecuación

$$\varepsilon_s = 0,0035 \frac{1 - \frac{x}{d}}{\frac{x}{d}} \quad [36.32]$$

En lugar de la Tabla T-36.1, pueden emplearse, si se desea, las expresiones analíticas siguientes, derivadas de las ecuaciones [32.9] y [32.11]

$$\text{Aceros laminados en caliente} \begin{cases} \text{Si } \varepsilon_s < \frac{f_{yd}}{E_s} & \lambda = \varepsilon_s \frac{E_s}{f_{yd}} & [36.33] \\ \text{Si } \varepsilon_s \geq \frac{f_{yd}}{E_s} & \lambda = 1 & [36.34] \end{cases}$$

$$\text{Aceros deformados en frío} \begin{cases} \lambda = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} & [36.35] \\ \sigma_s \text{ se obtiene de la ecuación [32.9] y de la} \\ \text{tabla T - 36.1} \end{cases}$$

Los valores límites correspondientes a los dominios 3 y 4, se obtienen haciendo  $\varepsilon_c = 0,0035$  y  $\frac{x}{d} = \left( \frac{x}{d} \right)_{lim}$ . De acuerdo con la fórmula [36.32] haciendo  $\varepsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s}$  se obtiene

$$\left( \frac{x}{d} \right)_{lim} = \frac{0,0035}{0,0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}} \quad [36.36]$$

Para los distintos aceros, los valores de  $\left( \frac{x}{d} \right)_{lim}$  se indican en la Tabla T-36.2. ( $f_{yd}$  se toma como el correspondiente a acero laminado en caliente, por razones que más adelante se aclaran).

TABLA T-36.2 - VALORES DE  $\left( \frac{x}{d} \right)_{lim}$

ACERO	$\gamma_s = 1,15$
B 400	0,673
B 500	0,624

De ellos se deducen los valores frontera  $\omega_{3,4}$  y  $\mu_{3,4}$ , que se recogen a continuación:

$$\text{Acero B400} \begin{cases} \omega_{3,4} = \begin{cases} \text{Laminado en caliente} & \omega_{3,4} = 0,456 \\ \text{Deformado en frío} & \omega_{3,4} = 0,511 \end{cases} \\ \mu_{3,4} = 0,330 \text{ para cualquier acero} \end{cases} \quad [36.37]$$

$$\text{Acero B500} \begin{cases} \omega_{3,4} = \begin{cases} \text{Laminado en caliente} & \omega_{3,4} = 0,422 \\ \text{Deformado en frío} & \omega_{3,4} = 0,472 \end{cases} \\ \mu_{3,4} = 0,314 \text{ para cualquier acero} \end{cases} \quad [36.38]$$

a-3) Deformaciones en el dominio 4

Las tensiones del acero son ya inferiores a su límite elástico de cálculo. Las fórmulas [36.29], [36.31] y [36.32] son directamente aplicables.

Los valores frontera del dominio 4 con el 4a corresponden a  $\frac{x}{d} = 1$ , con  $\varepsilon_s = 0$ ,  $\lambda = 0$ , de donde, teniendo en cuenta [36.29] y [36.31]

$$\omega_{4,4a} = \infty \quad [36.39]$$

$$\mu_{4,4a} = 0,402 \quad [36.40]$$

b) Dimensionamiento de secciones

En esta situación son conocidas las dimensiones de la sección de hormigón,  $b$  y  $h$ , las calidades del hormigón y del acero, el diagrama de este último y el momento flector de cálculo  $M_d$ . El canto útil  $d$  se estima a partir de  $h$ , evaluando aproximadamente el recubrimiento de la armadura que se busca, lo cual puede requerir algún tanteo.

Los gráficos GT-82 y GT-83 resuelven el problema en todos los casos, para aceros laminados en caliente y deformados en frío, respectivamente<sup>1, 2</sup>. Obtenido el valor de  $\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d}$ , de él se obtiene  $U_s$ . Las Tablas GT-86 y GT-87 permiten distribuir el valor de  $U_s$ , de acuerdo con los diámetros empleados y el valor de  $\gamma_s$  adoptado en el cálculo.

Obsérvese que los gráficos GT-82 y GT-83 indican también el valor  $\frac{x}{d}$  y en particular el valor  $\left(\frac{x}{d}\right)_{lim}$  correspondiente a la deformación  $\epsilon_s$  igual a la del límite elástico de cálculo, a partir de la cual y como expondremos más adelante, se ha considerado necesaria la armadura de compresión. El Ejemplo 36.1 aclara el uso de los gráficos.

Si se desea realizar la resolución directa, el procedimiento es el que se expone a continuación:

Calculado el valor  $\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b d^2}$ , se compara con los valores frontera de  $\mu$  correspondientes a cada dominio, que han sido calculados en el apartado anterior y que se resumen en la Tabla T-36.3.

En cada caso, en las ecuaciones que expresan el valor de  $\mu$  se hace  $M_u = M_d$  y se plantea un sistema de acuerdo con lo siguiente:

*Caso A.* El sistema viene dado por las ecuaciones [36.13], [36.18] y [36.19], haciendo en la primera  $\epsilon_s = 0,01$ .

Son incógnitas  $\epsilon_s$ ,  $x$ ,  $U_s$ , con lo que se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. (El valor de  $\lambda$  es el correspondiente a  $\epsilon_s = 0,01$ , para la clase de acero empleada).

*Caso B.* El sistema es ahora el formado por las ecuaciones [36.13], [36.24] y [36.25], haciendo también en la primera  $\epsilon_s = 0,01$  y se procede de la misma forma que en el caso A.

*Caso C.* El sistema está en este caso formado por las ecuaciones [36.29], [36.31] y [36.32] así como por la relación entre  $\lambda$  y  $\epsilon_s$  establecida en la Tabla T-36.1, si el

- 1 Los gráficos citados contienen un tramo inicial de trazos, motivado por el criterio de cuantía mínima, que expondremos en 36.1.6.
- 2 Los gráficos GT-84 y GT-85 son análogos a los GT-82 y GT-83, pero adoptando el diagrama rectangular en lugar del parábola rectángulo.

TABLA T-36.3

Aceros laminados en caliente	Aceros deformados en frío		Caso	Dominio	Ecuaciones aplicables
	$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d}$	$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b d^2}$			
$\leq 0,094$	$\leq 0,086$	$\leq 0,089$	A	2 ( $\epsilon_s \leq 0,002$ )	[36.13], [36.18] y [36.19]
$0,094 < \omega \leq 0,179$	$0,086 < \omega \leq 0,163$	$0,089 < \mu \leq 0,158$	B	2 ( $\epsilon_s > 0,002$ )	[36.13], [36.24] y [36.25]
Aceros B 400 $0,179 < \omega \leq 0,456$	$0,163 < \omega \leq 0,511$	$0,158 < \mu \leq 0,330$	C	3	[36.29], [36.31] y [36.32] y la relación $\lambda$ , $\epsilon_s$ , que corresponda según el acero empleado
Aceros B 500 $0,179 < \omega \leq 0,422$	$0,163 < \omega \leq 0,472$	$0,158 < \mu \leq 0,314$	D	4	[36.29], [36.31] y [36.32] y la relación $\lambda$ , $\epsilon_s$ , que corresponda según el acero empleado
Aceros B 400 $0,456 < \omega < \infty$	$0,511 < \omega < \infty$	$0,330 < \mu \leq 0,402$			
Aceros B 500 $0,422 < \omega < \infty$	$0,472 < \omega < \infty$	$0,314 < \mu \leq 0,402$			

cálculo ha de ser manual, o bien las expresiones de  $\lambda$  que correspondan de entre las ecuaciones [36.33] a [36.35], si el cálculo se hace con ordenador.

Las incógnitas son  $x$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $\lambda$  y  $U_s$ . Se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Para el caso de cálculo manual, lo mejor es, de [36.31] deducir  $\frac{x}{d}$ , y mediante [36.32] calcular  $\varepsilon_s$ , con lo que de la Tabla T-36.1 se obtiene  $\lambda$  y con [36.29] se calcula  $\omega$  y, por lo tanto,  $U_s$ .

*Caso D.* La resolución es análoga al caso anterior, con la única diferencia de que el proceso de tanteo se inicia ya con  $\varepsilon_s < \varepsilon_{s,lim}$ .

Sin embargo, en los gráficos GT-82 y GT-83 no se ha incluido el tramo correspondiente al caso A, por adoptarse el criterio de que, a partir de cuantías o momentos tales que la deformación del acero es igual a la del límite elástico de cálculo, en el caso de aceros laminados en caliente (fig. 36-9), se emplea armadura de compresión. El criterio es puramente convencional, pues la Instrucción EHE no indica nada al respecto, pero como ya vimos en 36.1, forzar las cuantías presenta diversos inconvenientes, tanto técnicos como económicos. Con el criterio adoptado, la necesidad de armadura de compresión se establece de manera uniforme para los aceros laminados en caliente y los deformados en frío.

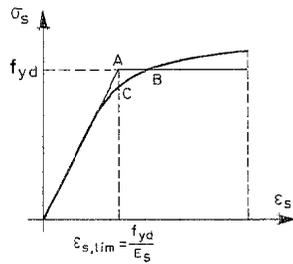


Figura 36-9

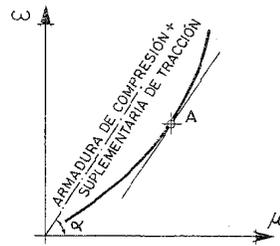


Figura 36-10

Desde un punto de vista estrictamente teórico (fig. 36-10), la armadura de compresión debería introducirse (ver referencia 36.2) a partir del punto de tangencia con las curvas de los gráficos GT-82 y GT-83 con las rectas de armadura de compresión, cuya base veremos en el apartado siguiente.

Sin embargo, la Instrucción EHE establece en este caso la necesidad de estribos a separación no superior a quince veces el diámetro de la armadura comprimida. Esto aconseja "retrasar" algo la introducción de la armadura comprimida y ha conducido a la adopción del límite expuesto<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> La situación real de la armadura de compresión es mucho más compleja. Tal como se indica en la figura 36-11, a diferencia de las piezas comprimidas, las flectadas, por razón de su curvatura, experimentan en las barras comprimidas una compresión contra el hormigón de las zonas cóncavas en la flexión y una resistencia al pandeo lateral (perpendicular al plano medio de la pieza) incluso en las armaduras comprimidas próximas a las caras laterales.

### c) Comprobación de secciones

El problema es completamente análogo al anterior, calculando en este caso a partir de  $U_s$  el valor de  $\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d}$ , con lo cual la Tabla T-36.3 permite decidir el sistema de ecuaciones a emplear. El planteamiento es en todo idéntico a lo expuesto en el apartado b) de *Dimensionamiento*, siendo en este caso  $U_s$  un dato y pasando a ser incógnita el valor  $M_u$ , debiendo cumplirse  $M_u \geq M_d$ . Los gráficos GT-82 y GT-83 resuelven directamente todos los casos.

### EJEMPLO 36.1

Se considera una sección de 250 x 500 mm, armada con 4 φ 20 de acero B 400. Hormigón H-25,  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ . Calcular el momento último de la sección. (Supóngase un recubrimiento de 20 mm).

*Solución*

Se tiene  $d = 470$  mm

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

con  $\gamma_s = 1,15$ , la capacidad mecánica de 4 φ 20 de acero B 400 (Ver GT-86) es

$$U_s = 436.870 \text{ kN}$$

$$\omega = \frac{436.870}{16,7 \cdot 250 \cdot 470} = 0,223$$

y de acuerdo con el gráfico GT-82

1 (Cont.)



Figura 36-11

Este tema ha sido investigado por el Dr. Ingeniero de Caminos, D. Juan Cortés Bretón, Tesis doctoral "Estudio experimental de la capacidad mecánica de secciones de hormigón con armadura comprimida según el grado de coacción al pandeo de las armaduras", realizada bajo la dirección de J. Calavera en la Cátedra de Edificación de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid (36.3). En dicha tesis se ensayaron vigas con armaduras comprimidas a tensiones mucho más altas que las habituales y con separación de estribos entre 15 φ y 40 φ, siendo φ el diámetro de la armadura comprimida, que confirmaron claramente lo expuesto.

$$\mu = 0,264 \cdot 0,493$$

y en mkN

$$M_d = 0,264 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 470^2 \cdot 10^{-6} = 243,48 \text{ mkN}$$

### 36.1.3.2 SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA DE COMPRESIÓN NECESARIA

La limitación de la deformación del acero al valor  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s,lim}$  (fig. 36-6) es, como dijimos, puramente convencional, aunque ya expusimos razones técnicas y económicas que aconsejan no utilizar el acero con pequeñas deformaciones en el agotamiento.

Al valor  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s,lim}$  le corresponde un valor  $\left(\frac{x}{d}\right)_{lim}$  (Ver Tabla T-36.1), para cada tipo de acero y correlativamente un valor  $\mu_{lim}$  del momento específico. De la igualdad

$$\frac{M_d}{f_{cd} b d^2} = \mu_{lim} \quad [36.41]$$

se obtiene la condición de canto mínimo para un ancho dado

$$d_{min} = \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} b \mu_{lim}}} \quad [36.42]$$

o bien

$$d_{min} = k_1 \sqrt{\frac{M_d}{f_{cd} b}} \quad [36.43]$$

Los coeficientes  $k_1$  se indican en la Tabla T-36.4 para los distintos tipos de acero, así como los valores de  $\mu_{lim}$  y los correlativos de  $\omega_{lim}$ .

TABLA T-36.4<sup>1</sup>

ACERO	$k_1$	$\mu_{lim}$	$\omega_{lim}$
B 400F	1,741	0,330	0,511
B 400 N	1,741	0,330	0,456
B 500 F 6 T	1,785	0,314	0,472
B 500 N	1,785	0,314	0,422

<sup>1</sup> Empleamos las letras complementarias *F* y *N* para distinguir los aceros deformados en frío y los laminados en caliente. (En España no se fabrican actualmente barras deformadas en frío).

Si  $d < d_{min}$  resulta necesaria la armadura de compresión. El procedimiento de cálculo es el siguiente:

#### a) Dimensionamiento de secciones

Dadas las dimensiones de la sección, las características de los materiales y el momento flector de cálculo, se trata de dimensionar las armaduras de tracción y compresión (fig. 36-12).

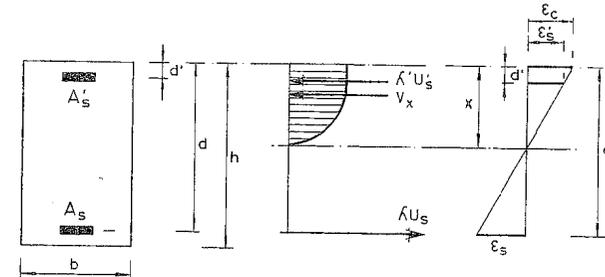


Figura 36-12

Dado  $M_d$  se calcula  $\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b d^2}$  y la diferencia  $\Delta\mu = \mu - \mu_{lim}$ , tomando  $\mu_{lim}$  de la Tabla T-36.4, de acuerdo con el acero empleado. A este valor de  $\mu_{lim}$  le corresponde el valor  $\omega_{lim}$  indicado también en dicha Tabla. El valor del momento

$$\Delta\mu = \mu - \mu_{lim} \quad [36.44]$$

no equilibrado por  $\omega_{lim}$ , ha de ser resistido por unas armaduras de compresión y tracción que proporcionen, habida cuenta de sus deformaciones respectivas, unas fuerzas iguales  $F_s$ , tal que

$$F_s = \frac{\Delta\mu f_{cd} b d^2}{d - d'} \quad [36.45]$$

En la práctica (fig. 36-13), el momento  $M_d$  total está absorbido por dos pares, uno de capacidad mecánica  $U_{s1} = \omega_{lim} f_{cd} b d$  y brazo  $z$ , con cabeza comprimida de hormigón con su profundidad límite, y otro de acero con fuerzas iguales a  $F_s$  en tracción y compresión.

Si llamamos  $F_s = A'_s \sigma'_s$ , siendo  $A'_s$  el área de la armadura comprimida y  $\sigma'_s$  su tensión de cálculo en el agotamiento, y denominamos  $\sigma'_s = \lambda' f_{yd}$  se tiene (fig. 36-12):

$$\varepsilon'_s = \frac{\frac{x}{d} - \frac{d'}{d}}{1 - \frac{x}{d}} \varepsilon_s \quad [36.46]$$

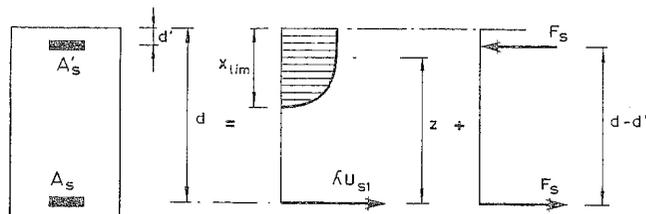


Figura 36-13

Haciendo en [36.46]  $\frac{x}{d} = \left(\frac{x}{d}\right)_{lim}$  y  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s,lim}$ , se obtiene  $\varepsilon'_s$  y, por tanto,  $\lambda'$  y de [36.45]

$$F_s = A'_s \lambda' f_{yd} = \frac{\Delta\mu f_{cd} b d^2}{d - d'}$$

de donde

$$U'_s = A'_s f_{yd} = \frac{\Delta\mu f_{cd} b d^2}{\lambda' (d - d')} \quad [36.47]$$

La armadura total de tracción viene dada por

$$U_s = U_{s,lim} + U_{s,sup} \quad [36.48]$$

donde

$$U_{s,lim} = \omega_{lim} f_{cd} b d \quad [36.49]$$

y la capacidad mecánica de la armadura suplementaria de tracción viene dada por

$$U_{s,sup} = \frac{\Delta\mu f_{cd} b d^2}{\lambda (d - d')} \quad [36.50]$$

siendo  $\lambda = \frac{\sigma}{f_{yd}}$ .

El valor de  $\lambda$  se obtiene de la Tabla T-36.1 a partir del valor de  $\varepsilon_s$  deducido de la ecuación de compatibilidad de deformaciones.

$$\varepsilon_s = 0,0035 \frac{1 - \left(\frac{x}{d}\right)_{lim}}{\left(\frac{x}{d}\right)_{lim}} \quad [36.51]$$

Los gráficos GT-82 y GT-83 resuelven directamente el problema, proporcionando para  $\mu > \mu_{lim}$  las armaduras de tracción y compresión, estas últimas en función de los diferentes valores  $\frac{d}{d'}$ . (Ver Ejemplo 36.2).

#### b) Comprobación de secciones

Si el dimensionamiento es absolutamente estricto, es decir, si los valores de  $U_s$  y  $U'_s$  son exactamente los requeridos, el problema puede ser resuelto por métodos análogos a los empleados en el apartado anterior. Como esto es muy raro en la práctica, debido a los inevitables redondeos al ajustar las necesidades de armaduras a los diámetros normalizados, es mejor aplicar el método que se expone en el apartado siguiente.

#### EJEMPLO 36.2

Se considera una sección de  $300 \cdot 600$  mm sometida a un momento flector de cálculo  $M_d = 600$  mkN. Hormigón H-25. Acero B 500 F.  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ . Dimensionar la armadura.

#### Solución

Se estima  $d = 560$  mm

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{600 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 300 \cdot 560^2} = 0,381$$

Entrando en el ábaco GT-83 éste indica 20 mm, resulta necesaria armadura de compresión. Suponiendo  $d' = 40$  mm,  $\frac{d'}{d} = \frac{40}{560} = 0,07$

Y en kN

$$\omega_s = 0,49 \quad U_s = 0,49 \cdot 16,7 \cdot 300 \cdot 560 \cdot 10^{-3} = 1378 \text{ kN}$$

$$\omega'_s = 0,07 \quad U'_s = 0,07 \cdot 16,7 \cdot 300 \cdot 560 \cdot 10^{-3} = 196,4 \text{ kN}$$

$$A_s = 4 \phi 32$$

$$A'_s = 2 \phi 12$$

#### 36.1.3.3 Sección rectangular con armadura de compresión no necesaria pero existente

El estudio de este caso es complejo, pero lo realizamos a continuación por el interés práctico que presenta en edificación, debido a que en los momentos negativos de dinteles se dispone con frecuencia de una parte de la armadura de momentos positivos del vano que puede ser considerada como armadura de compresión, no necesaria, pero existente, lo cual conduce a un ahorro significativo de armadura de tracción.

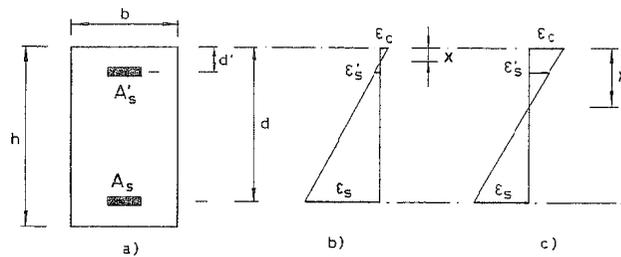


Figura 36-14

Consideraremos la sección de la figura 36-14a).

a) Dimensionamiento

En este caso se conocen las dimensiones de la sección, la posición y área de la armadura superior  $A'_s$ , las características del hormigón y del acero y el valor del momento flector de cálculo  $M_d$ , además de la posición de la armadura buscada,  $A_s$ .

Aunque los gráficos GT-88 y GT-89<sup>1</sup> permiten la resolución inmediata en todos los casos, exponemos a continuación el método directo de cálculo:

Comenzaremos por calcular el valor

$$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b d^2} \quad [36.52]$$

y los gráficos GT-82 ó GT-83, en función de  $\mu$ , nos proporcionan  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu$ . Distinguiremos los casos siguientes:

a-1) Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu < \frac{d'}{d}$ , las dos armaduras están en tracción. En la práctica esto

corresponde siempre a secciones en las que  $\frac{x}{d} < \frac{1}{6}$ , por lo tanto, el bloque comprimido es un segmento de parábola y el alargamiento de la armadura  $A_s$  será  $\varepsilon_s = 0,01$ .

Las ecuaciones de equilibrio son ahora, teniendo en cuenta que para  $\varepsilon_s = 0,01$ ,  $\lambda$  es conocido

$$V_x - \lambda U_s - \lambda' U'_s = 0 \quad [36.53]$$

$$M_u - V_x \delta_g + \lambda' U'_s (d - d') = 0 \quad [36.54]$$

<sup>1</sup> Los ábacos GT-88 y GT-89 han sido realizados por mis compañeros en la Cátedra de Edificación y Prefabricación de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Madrid, D. Jaime Fernández Gómez, D. Fernando Rodríguez López y D. Jorge Caffarena Stambuk. Véase la referencia (36.4).

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{0,01}{d - x} = \frac{\varepsilon'_s}{d' - x} \quad [36.55]$$

donde  $V_x$  y  $\delta_g$  vienen dados por las expresiones [36.14] y [36.15].

La relación entre  $\lambda'$  y  $\varepsilon'_s$  viene dada por las ecuaciones [36.33] a [36.35] según el tipo de acero.

Se obtiene un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, siendo datos,  $b$ ,  $h$ ,  $d$ ,  $d'$ , las características de los materiales,  $A'_s$  y  $M_u = M_d$ . Las incógnitas son  $\lambda'$ ,  $\varepsilon'_s$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $U_s$  y  $x$ .

a-2) Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu = \frac{d'}{d}$ , la sección se dimensiona como si no existiese la armadura  $A'_s$  de acuerdo con el apartado 36.1.3.1, ya que la armadura  $A'_s$  tiene tensión nula.

a-3)  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu > \frac{d'}{d}$ , llamaremos  $x$  a la profundidad de fibra neutra, habida cuenta de la armadura  $A'_s$  que funciona ahora realmente como armadura de compresión, y distinguiremos tres subcasos:

a-3.1) Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu \leq \frac{1}{6}$ , el bloque comprimido está constituido por un segmento de parábola,  $\varepsilon_s = 0,01$ ,  $\lambda$  es conocido y las ecuaciones de equilibrio resultan

$$V_x + \lambda' U'_s - \lambda U_s = 0 \quad [36.56]$$

$$M_u - V_x \delta_g - \lambda' U'_s (d - d') = 0 \quad [36.57]$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{0,01}{d - x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - d'} \quad [36.58]$$

Además de la expresión de  $\lambda$  [36.33] a [36.35], según el acero empleado.

Los valores de  $V_x$  y  $\delta_g$  vienen dados por [36.14] y [36.15].

Se tienen cinco ecuaciones con incógnitas  $\lambda'$ ,  $\varepsilon'_s$ ,  $\varepsilon_c$ ,  $U_s$  y  $x$ .

a-3.2) Si  $\frac{1}{6} < \frac{x}{d} \leq 0,259$ , el bloque comprimido es parábola-rectángulo,  $\varepsilon_s = 0,01$ ,  $\lambda$  es conocido y las ecuaciones de equilibrio resultan

$$V_x + \lambda' U'_s - \lambda U_s = 0 \quad [36.59]$$

$$M_u - V_x \delta_g - \lambda' U'_s (d - d') = 0 \quad [36.60]$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{0,01}{d - x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - d'} \quad [36.61]$$

y la relación  $\lambda$  [36.33] a [36.35], según el acero empleado.

Las expresiones de  $V_x$  y  $\delta_g$  vienen dadas por [36.22] y [36.23].

Se tiene, de nuevo, cinco ecuaciones con incógnitas  $\lambda'$ ,  $\varepsilon'_s$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $U_s$  y  $x$ .

a-3.3) Si  $\frac{x}{d} > 0,259$ ,  $\varepsilon_c = 0,0035$  y  $\varepsilon_s < 0,01$ . Las ecuaciones de equilibrio son

$$V_x + \lambda' U'_s - \lambda U_s = 0 \quad [36.62]$$

$$M_u - V_x \delta_g - \lambda' U'_s (d - d') = 0 \quad [36.63]$$

$$\frac{0,0035}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} = \frac{\varepsilon'_s}{x - d'} \quad [36.64]$$

y las relaciones  $\lambda$  y  $\lambda'$  [36.33] a [36.35] del acero empleado.

Las expresiones de  $V_x$  y  $\delta_g$  vienen dadas por [36.22] y [36.23].

Se tienen seis ecuaciones con incógnitas  $\lambda'$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon'_s$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $U_s$  y  $x$ .

b) *Comprobación*

El procedimiento es análogo al expuesto para el dimensionamiento, siendo ahora  $U_s$  dato y  $M_u$  incógnita. La resolución resulta igualmente laboriosa, pues es necesario ver en cuál de los distintos casos de profundidad  $x$  estamos situados para seleccionar el sistema de ecuaciones correspondiente. *Los gráficos GT-88 y GT-89 solucionan también directamente el problema.*

NOTA: La hipótesis simplificada de suponer a priori la armadura comprimida agotada conduce a errores que oscilan entre +12% y -5%, según la cuantía y el tipo de acero.

### EJEMPLO 36.3

Dada una sección rectangular de 200 · 500 mm, con armadura de compresión no necesaria pero existente, formada por 2  $\phi$  16, dimensionar la armadura de tracción para  $M_u = 180$  mkN. Hormigón H-25. Acero B 500 F.  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ .

*Solución*

Manejamos el ábaco GT-89.

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa} \quad d \approx 460 \text{ mm}$$

$$\mu = \frac{180 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 200 \cdot 460^2} = 0,254$$

$$\omega' = \frac{174,8 \cdot 10^3}{16,7 \cdot 200 \cdot 460} = 0,11$$

y el ábaco proporciona el valor  $\omega = 0,309$

$$U_s = 0,309 \cdot 16,7 \cdot 200 \cdot 460 = 474,7 \text{ kN}$$

disponemos 4  $\phi$  20, con  $U_s = 546$  kN.

Obsérvese que, si se introduce la simplificación de suponer agotada la armadura de compresión, se tiene:

Momento absorbido por la sección simétrica equivalente a 2  $\phi$  16

$$M_1 = 174,8 \cdot 10^3 (500 - 40) = 73,4 \text{ mkN}$$

$$\Delta M = 180 - 73,4 = 106,6 \text{ mkN}$$

y entrando en la curva de  $\omega' = 0$  con

$$\mu = \frac{106,6 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 200 \cdot 460^2} = 0,151$$

se obtiene  $\omega = 0,15$ .

Y en kN  $U_{s2} = 0,151 \cdot 16,7 \cdot 200 \cdot 460 \cdot 10^{-3} = 230,5$  kN

$$U_s = 174,8 + 230,5 = 405,3 \text{ kN}$$

Es decir, que la armadura de tracción es 14,6% inferior a la correcta.

### 36.1.4 SECCIÓN EN T

#### 36.1.4.1 Cálculo de la sección

Aunque esta sección puede ser tratada de forma semejante a la expuesta para la sección rectangular, se alcanza una simplificación considerable aplicando en algunas ocasiones el método del diagrama rectangular expuesto en 36.1.2. Consideremos la sección indicada en la figura 36.15a). De nuevo, estudiaremos dos casos:

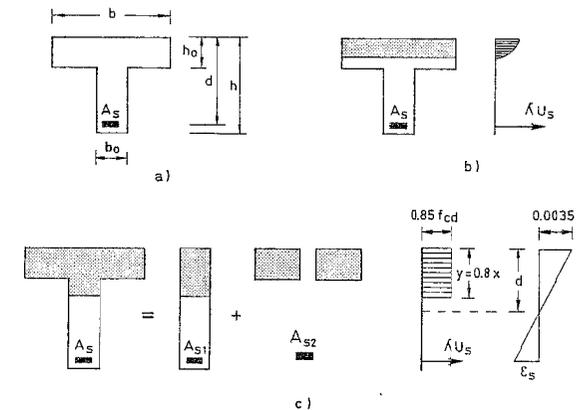


Figura 36-15

a) Dimensionamiento <sup>1</sup>

Se calcula en primer lugar el valor

$$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b d^2} \quad [36.65]$$

correspondiente a la sección rectangular de ancho  $b$  y canto útil  $d$ . Con el valor de  $\mu$  los gráficos GT-82 y GT-83, según el tipo de acero empleado, proporcionan el valor  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu$ . Estudiaremos dos subcasos.

- Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu \leq \frac{h_o}{d}$ , (fig. 36-15b), el bloque parábola-rectángulo está comprendido en el ala y la sección puede dimensionarse como una rectangular de ancho  $b$  y canto útil  $d$ .
- Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\mu > \frac{h_o}{d}$ , el bloque parábola-rectángulo rebasa el ala. Aplicaremos (fig. 36-15c) el bloque rectangular. Utilizando los ábacos GT-84 y GT-85 con el valor [36.65] obtenemos el valor  $\left(\frac{y}{d}\right)_\mu$ . Si  $\left(\frac{y}{d}\right)_\mu \leq \frac{h_o}{d}$ , de nuevo la sección dimensiona como de ancho  $b$  y canto  $d$ , pero con los ábacos GT-84 y GT-85 en lugar de los GT-82 y GT-83.

Si  $\left(\frac{y}{d}\right)_\mu > \frac{h_o}{d}$ , la sección puede considerarse como suma de dos, una compuesta por el alma, con una profundidad de bloque rectangular, y al que corresponde una fuerza en la armadura  $F_{s1}$  y un momento  $M_{d1}$ , y otra, materializada por los vuelos del ala, comprimidos a  $0,85 f_{cd}$ , en equilibrio con una fuerza de armadura  $F_{s2}$  (fig. 36-15c).

El proceso operatorio es el siguiente: En primer lugar se calcula la compresión en los vuelos del ala

$$C = 0,85 f_{cd} h_o (b - b_o) \quad [36.66]$$

y de ello se tiene

$$F_{s2} = 0,85 f_{cd} h_o (b - b_o) \quad [36.67]$$

y

$$M_{d2} = 0,85 f_{cd} h_o (b - b_o) \left(d - \frac{h_o}{2}\right) \quad [36.68]$$

<sup>1</sup> En lo que sigue, nos referimos al cálculo de la viga. La flexión y cortante de las alas, bajo la acción de las cargas, deben ser calculadas adicionalmente. Véase el Capítulo 39.

Del momento de cálculo  $M_d$ , se obtiene

$$M_{d1} = M_d - M_{d2} \quad [36.69]$$

y en los gráficos GT-84 ó GT-85, según el acero empleado, se obtiene  $U_{s1}$  e  $\frac{y}{d}$ .

Con  $\frac{x}{d} = 1,25 \frac{y}{d}$ , la Tabla T-36.1 nos proporciona  $\lambda$  y con ello

$$U_{s2} = \frac{F_{s2}}{\lambda} \quad [36.70]$$

La armadura necesaria es

$$U_s = U_{s1} + U_{s2} \quad [36.71]$$

b) Comprobación

Conocido el valor de  $U_s$ , se calcula el valor de

$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} b d} \quad [36.72]$$

y en los gráficos GT-82 ó GT-83, según el acero empleado, se obtiene el valor  $\left(\frac{x}{d}\right)_\omega$ . Distinguiremos dos subcasos:

- Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\omega \leq \frac{h_o}{d}$ , los gráficos GT-82 ó GT-83 proporcionan directamente el valor de  $\mu$  y, por tanto, de  $M_u = \mu f_{cd} b d^2$ .
- Si  $\left(\frac{x}{d}\right)_\omega > \frac{h_o}{d}$ , de nuevo haremos uso del diagrama rectangular. En primer lugar, calculamos mediante los ábacos GT-84 ó GT-85, el valor  $\left(\frac{y}{d}\right)_\omega$ .

Si  $\left(\frac{y}{d}\right)_\omega \leq \frac{h_o}{d}$ , los ábacos GT-84 ó GT-85 dan directamente el valor de  $\mu$  correspondiente al de  $\omega$  de la expresión [36.72] y de  $\mu$  se obtiene  $M_u = \mu f_{cd} b d^2$ .

Si  $\left(\frac{y}{d}\right)_\omega > \frac{h_o}{d}$ , calculamos la fuerza de armadura  $F_{s2}$ , correspondiente a los vuelos del ala.

$$F_{s2} = 0,85 f_{cd} h_o (b - b_o) \quad [36.73]$$

Si el acero es laminado en caliente, supondremos  $\lambda = 1$  y

$$U_{s2} = F_{s2} \quad [36.74]$$

y

$$U_{s1} = U_s - U_{s2} \quad [36.75]$$

y de ello

$$\omega_1 = \frac{U_{s1}}{f_{cd} b d} \quad [36.76]$$

y entrando en el gráfico GT-84 se obtiene  $\mu_1$  y de ello

$$M_{d1} = \mu_1 f_{cd} b_0 d^2 \quad [36.77]$$

con lo que

$$M_d = M_{d1} + U_{s2} \left( d - \frac{h_0}{2} \right) \quad [36.78]$$

Debe comprobarse, con el valor de  $\frac{x}{d} = 1,25 \frac{y}{d}$  correspondiente a  $\mu_1$  que  $\lambda = 1$ . En caso contrario, se procede como si el acero fuera deformado en frío.

Si el acero es deformado en frío, conocido  $F_{s2}$  de [36.73] se supone un valor de  $\lambda$  (puede comenzarse por ejemplo con  $\lambda = 1$ ) y se halla

$$U_{s2} = \frac{F_{s2}}{\lambda} \quad [36.79]$$

Con la armadura  $U_s$  dada, se obtiene

$$U_{s1} = U_s - U_{s2} \quad [36.80]$$

y con  $U_{s1}$  se calcula

$$\omega = \frac{U_{s1}}{f_{cd} b_0 d} \quad [36.81]$$

y entrando en el gráfico GT-85 se obtiene  $\frac{y}{d}$  y  $\mu_1$ . Con  $\frac{x}{d} = 1,25 \frac{y}{d}$ , la Tabla T-36.1 nos da  $\lambda$ . Si fuera igual al valor supuesto  $\lambda = 1$ , se obtiene

$$M_{d1} = \mu_1 f_{cd} b_0 d^2 \quad [36.82]$$

$$M_d = M_{d1} + F_{s2} \left( d - \frac{h_0}{2} \right) \quad [36.83]$$

Si  $\lambda$  no coincide con el valor supuesto, se tantea con otro valor. Tres tanteos son suficientes.

#### EJEMPLO 36.4

Se da una sección en T con  $b = 700$  mm,  $b_0 = 250$  mm,  $h = 500$  mm,  $h_0 = 150$  mm, sometida a un momento flector de cálculo de 608 mkN. Hormigón H-25. Acero B 400 F. Calcular la armadura necesaria  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ .

*Solución*

Estimamos  $d \approx 450$  mm

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{608000000}{16,7 \cdot 700 \cdot 450^2} = 0,257$$

En el gráfico GT-83, para  $\mu = 0,257$ ,  $\frac{x}{d} \approx 0,46$ , de donde  $x = 0,46 \cdot 450 = 207$  mm > 150 mm. No puede, por tanto, calcularse como rectangular.

$$\text{De [36.67]} \quad F_{s2} = 0,85 \cdot 16,7 \cdot 150 (700 - 250) = 958163 \text{ N}$$

$$\text{De [36.68]} \quad M_{d2} = 958 \left( 0,45 - \frac{0,15}{2} \right) = 359,3 \text{ mkN}$$

$$M_{d1} = 608 - 359,3 = 248,7 \text{ mkN}$$

$$\text{y} \quad \mu_1 = \frac{248.700.000}{16,7 \cdot 250 \cdot 450^2} = 0,294$$

y entrando en GT-85, se obtiene  $\omega_1 = 0,41$  y  $\frac{x}{d} = 0,45$ .

Para  $\frac{x}{d} = 1,25 \frac{y}{d} = 0,56$ , la Tabla T-36.1 nos da  $\lambda \approx 0,03$ .

$$U_{s2} = \frac{F_{s2}}{\lambda} = \frac{958163}{0,03} = 1.030.283 \text{ N}$$

De  $\omega_1 = 0,41$

$$U_{s1} = 0,41 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 450 = 770.288 \text{ N}$$

$$U_s = U_{s1} + U_{s2} = 1.800.571 \text{ N}$$

$$A_s = 6 \phi 32 + 2 \phi 20$$

### 36.1.5 ANCHO EFICAZ DE CABEZA COMPRIMIDA DE UNA PIEZA EN T

Cuando se emplean vigas en T, bien aisladas, bien solidarias con una losa de forjado (fig. 36-16 a) y b), las compresiones en la cabeza no se distribuyen uniformemente en todo su ancho, sino que, a causa de las deformaciones de cortante en las alas, las compresiones disminuyen al alejarse del alma.

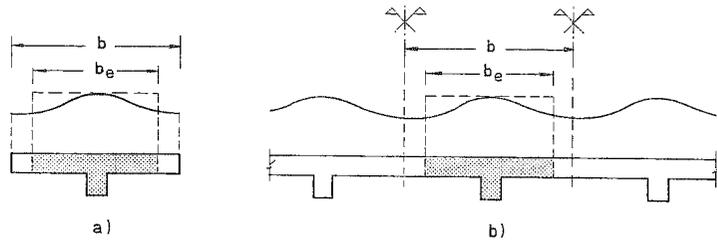


Figura 36-16

Se define como ancho eficaz  $b_e$  aquél tal que una distribución uniforme de tensiones iguales a la máxima real sobre el ancho  $b_e$ , conduce al mismo momento flector de rotura de la pieza que la distribución real. El ancho  $b_e$  depende de muchas variables tales como la forma de la sección, la luz y el tipo de apoyos de la viga, el estado de fisuración, etc.

#### Método de EHE (Coincide con el MODEL CODE 90 y el EUROCÓDIGO EC-2)

El MODEL CODE 90 y el EUROCÓDIGO EC-2 contienen especificaciones idénticas sobre el tema, que se exponen a continuación.

Salvo que se realice un análisis más preciso que tenga en cuenta las dimensiones de alas y alma, la luz, las condiciones de apoyo y la armadura transversal, para edificios puede adoptarse un ancho eficaz constante, de acuerdo con lo siguiente:

Vigas en T

$$b_e = b_0 + \frac{1}{5} l_0 \leq b \quad [36.84]$$

Vigas en L (vigas de borde)

$$b_e = b_0 + \frac{1}{10} l_0 \leq b \quad [36.85]$$

donde las notaciones son las de la figura 36-17 y  $l_0$  es la distancia entre puntos de momento nulo.

En secciones que presenten cartabones (fig. 36-17), la anchura real  $b_0$  del nervio se sustituirá por el valor

$$b'_e = b_0 + 2 b_c \quad \text{si } b_c \leq h_c \quad [36.86]$$

$$b'_e = b_0 + 2 h_c \quad \text{si } b_c \geq h_c \quad [36.87]$$

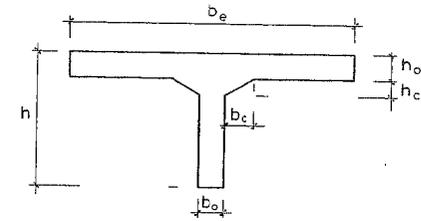


Figura 36-17

#### Método del A.C.I.

El A.C.I. en su Norma 318-95 (36.5) establece el siguiente procedimiento para el cálculo de  $b_e$ .

Vigas en T

$$b_e \leq \frac{1}{4} l \quad [36.88]$$

$$\frac{b_e - b_0}{2} \leq 8 h_0 \quad [36.89]$$

Vigas en L

$$b_e - b_0 \leq \frac{1}{12} l \quad [36.90]$$

$$b_e - b_0 \leq 6 h_0 \quad [36.91]$$

En ningún caso  $b_e$  será superior al ancho real existente. En cualquier caso, si la viga es exenta, deben respetarse las condiciones siguientes:

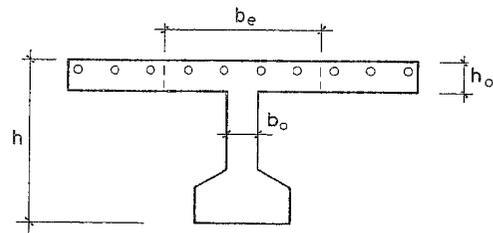
$$h_0 \geq \frac{1}{2} b_0 \quad [36.92]$$

$$b_e \leq 4 b_0 \quad [36.93]$$

### 36.1.6 ANCHO EFICAZ DE CABEZA TRACCIONADA DE UNA PIEZA EN T

Pocas Normas consideran este problema (fig. 36-18). PARK y PAULAY, en la referencia (36.6), recomiendan

$$b_e = b_0 + 8 h_0 \quad [36.94]$$



ARMADURA DE MOMENTOS NEGATIVOS

Figura 36-18

A efectos de cálculo a flexión sólo se consideran las armaduras contenidas en el ancho  $b_e$ .

El ACI 318-95 especifica que la armadura de tracción debe estar situada en un ancho igual al definido en 36.1.5. sin pasar de  $L/10$ . Este es también el criterio adoptado por EHE.

### 36.1.7 CÁLCULO EN TEORÍA CLÁSICA

Aunque, como ya hemos dicho, los métodos basados en la teoría clásica han sido prácticamente abandonados, por lo que se refiere a secciones sometidas a flexión simple, nos resultarán necesarios para algunos problemas relacionados con deformaciones (Capítulo 40), y con esfuerzo rasante (Capítulo 33). Por dicho motivo exponemos a continuación los conceptos fundamentales.

El cálculo se plantea en condiciones de servicio y maneja, por tanto, el valor  $M$  del momento flector característico y las tensiones en servicio  $\sigma_c$ ,  $\sigma_s$  y  $\sigma'_s$  del hormigón y de las armaduras de tracción y compresión (si existe), respectivamente. Estas tensiones no intervienen, como se recordará, en el método de los estados límites.

De hecho, la información que los valores  $\sigma_c$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma'_s$  proporcionan sobre las tensiones de servicio es errónea, en parte por la incertidumbre de las hipótesis en que se basa el método y que se exponen a continuación y, en parte, por la intervención de los fenómenos de fluencia y retracción que modifican sustancialmente las tensiones en fase de servicio.

La introducción de la seguridad, cuando estos métodos estaban en uso, se hacía limitando, para flexión simple, el valor de  $\sigma_c$  a 0,45 ó 0,50 veces la resistencia media del hormigón en probeta cilíndrica a 28 días y el de  $\sigma_s$  a valores del orden de 0,5 a 0,6 veces el límite elástico del acero. Esta forma de introducir la seguridad conducía a niveles, en general, excesivos y no uniformes.

Las hipótesis de partida del método son las siguientes:

- Existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones para ambos materiales.
- Las secciones planas antes de la deformación permanecen planas después de la deformación.

- Se desprecia la resistencia a tracción del hormigón.
- Las deformaciones de las armaduras son iguales a las del hormigón que las rodea.
- El área de la sección recta de cada barra se supone concentrada en su centro.

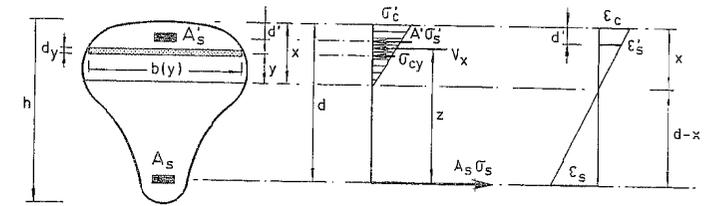


Figura 36-19

De acuerdo con estas hipótesis y con las notaciones de la figura 36-19, se tiene un diagrama de equilibrio con variación lineal de las tensiones en el bloque comprimido del hormigón. Tomamos como eje de referencia la fibra neutra.

De acuerdo con la hipótesis a):

$$\sigma_c = \epsilon_c E_c \quad [36.95]$$

En cualquier punto a distancia  $y$ , si la tensión en el hormigón se designa por  $\sigma_{cy}$  se tendrá

$$\epsilon_{cy} = \frac{\sigma_{cy}}{E_c} \quad [36.96]$$

y de acuerdo con la hipótesis d), la deformación de cualquier armadura situada a distancia  $y$  será la misma

$$\epsilon_{sy} = \frac{\sigma_{sy}}{E_s} = \epsilon_{cy} = \frac{\sigma_{cy}}{E_c} \quad [36.97]$$

de donde

$$\sigma_{sy} = \sigma_{cy} \frac{E_s}{E_c} \quad [36.98]$$

y haciendo

$$m = \frac{E_s}{E_c} \quad [36.99]$$

tenemos

$$\sigma_{sy} = m \sigma_{cy} \quad [36.100]$$

es decir, la tensión del acero es  $m$  veces la del hormigón que lo rodea, siendo  $m = \frac{E_s}{E_c}$ .

Una de las dificultades del método reside en la elección del valor de  $m$ . Un valor frecuentemente adoptado es  $m = 15$ .

De acuerdo con lo anterior, podemos escribir

$$\frac{\sigma_{cv}}{y} = \frac{\sigma_c}{x} = \frac{\sigma'_s}{(x-d')} = \frac{\sigma_s}{d-x} \quad [36.101]$$

La igualdad de fuerzas conduce a

$$\int_0^x \sigma_{cv} b(y) dy + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s = 0 \quad [36.102]$$

La de momentos a

$$\int_0^x \sigma_{cv} b(y) y dy + A'_s \sigma'_s (x-d') - A_s \sigma_s (d-x) = M \quad [36.103]$$

donde  $b(y)$  es la función que expresa el ancho  $b$  de la sección en función de  $y$ .

Teniendo en cuenta [36.101] en [36.102] y [36.103], se obtiene

$$\int_0^x y b(y) dy + m A'_s (x-d') = m A_s (d-x) \quad [36.104]$$

y

$$\frac{\sigma_c}{x} \left[ \int_0^x b(y) y^2 dy + m A'_s (x-d')^2 + m A_s (d-x)^2 \right] = M \quad [36.105]$$

Llamando  $S_x$  al momento estático de la zona de hormigón comprimido respecto a la fibra neutra e  $I_x$  al momento de inercia homogeneizado de la sección fisurada, es decir, al de la sección constituida por el área de hormigón comprimido más  $m$  veces las áreas de las armaduras, concentradas en su centro, de acuerdo con la hipótesis e), se tiene:

$$S_x + m A'_s (x-d') = m A_s (d-x) \quad [36.106]$$

$$\sigma_c = \frac{M}{I_x} x \quad [36.107]$$

La ecuación [36.106], al establecer que la fibra neutra es el eje que iguala los momentos estáticos de las áreas homogeneizadas de tracción y compresión permite su determinación inmediata.

La ecuación [36.107] establece la validez de la fórmula de NAVIER para la sección fisurada homogeneizada.

De acuerdo con lo anterior:

$$\sigma_s = m \frac{M}{I_x} (d-x) \quad (\text{Tracción}) \quad [36.108]$$

$$\sigma'_s = m \frac{M}{I_x} (x-d') \quad (\text{Compresión}) \quad [36.109]$$

En el *dimensionamiento* suelen ser datos la forma de la sección, la tensión  $\sigma_s$  del acero y el valor  $M$  del momento, así como el valor límite de la tensión  $\sigma_c$  del hormigón.

En la *comprobación* se conoce el momento, la sección y las armaduras y debe comprobarse que las tensiones  $\sigma_c$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma'_s$  no rebasen los límites establecidos.

### 36.1.7.1 SECCIÓN RECTANGULAR

Las fórmulas anteriores son de aplicación inmediata a la sección rectangular y han sido tabuladas en numerosas publicaciones. Las Tablas GT-90 a GT-95 resuelven el problema de forma directa, tal como se aclara en los ejemplos siguientes.

### 36.1.7.2 SECCIÓN EN T

Análogamente, la aplicación de las fórmulas anteriores a la sección en T conduce a las Tablas GT-96 a GT-98, que resuelven el problema para los casos más usuales.

### EJEMPLO 36.5

Dada una sección de  $250 \cdot 500$  mm, sometida a un momento flector característico  $M = 35$  mkN, se desea dimensionarla en teoría clásica con una tensión admisible en el acero  $\sigma_s = 210$  N/mm<sup>2</sup>. Calcular la armadura necesaria y la tensión de trabajo del hormigón.

*Solución*

Estimamos  $d = 470$  mm. Manejando la Tabla GT-93 (Ver unidades especiales en este GT)

$$M = \frac{b h_1^3}{k_6}$$

obtenemos

$$k_6 = \frac{25 \cdot 47^2}{350} = 157,8$$

$$\sigma_c = 5,1 \text{ N/mm}^2$$

$$k_4 = 300$$

$$A_s = \frac{250 \cdot 470}{300} = 392 \text{ mm}^2 \rightarrow 4 \phi 12$$

### EJEMPLO 36.6

Dada la sección anterior, sometida a un momento flector característico de 48 mkN, se desea dimensionar la armadura con acero B 400 S, con  $\sigma_s = 240 \text{ N/mm}^2$  y tensión máxima en el hormigón  $\sigma_c = 6 \text{ N/mm}^2$ .

*Solución*

Se estima  $d = 460 \text{ mm}$ . Manejando la Tabla GT-98 se tiene (ver unidades especiales en este GT)

$$\text{Para } \sigma_c = 6 \text{ N/mm}^2 \quad k_6 = 134,4$$

$$M = \frac{25 \cdot 46^2}{134,4} = 393,6 \text{ t} \cdot \text{cm} \quad k_4 = 293,3$$

$$\Delta M = 480 - 393,6 = 86,4 \text{ t} \cdot \text{cm}$$

Estimando  $\frac{c}{d} = \frac{42}{46} \approx 0,91$  a lo que corresponde  $\sigma'_s = 0,603 \text{ t/cm}^2$

$$A_s = \frac{25 \cdot 46}{293,3} + \frac{86,4}{2,4 \cdot 42} = 4,77 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \phi 12$$

$$A'_s = \frac{86,4}{0,603 \cdot 42} = 3,41 \text{ cm}^2 \rightarrow 3 \phi 12$$

### 36.1.8 CUANTÍAS MÍNIMAS

Existen dos motivos que obligan a mantener unas cuantías mínimas en flexión: uno de ellos es el de incrementar la seguridad de aquellas piezas que presentan rotura agria; es decir, sin fisuración de aviso. El otro es disponer de una cantidad suficiente de armadura para controlar la fisuración debida a la retracción y a las variaciones térmicas. Ambos se exponen a continuación.

#### 36.1.8.1 Por condiciones de rotura agria

Se entiende que una pieza presenta rotura agria cuando su capacidad resistente como pieza de hormigón en masa supera a la que presenta como sección de hormigón armado.

Supongamos una pieza cuya sección se indica en la figura 36-20, en la que 0 es el c.d.g. de la sección.

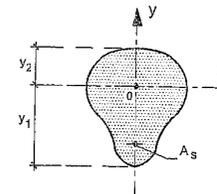


Figura 36-20

#### a) Método de EHE

Aceptemos que la resistencia a tracción del hormigón es aproximadamente:

$$f_{ck,t} = \frac{f_{ck}}{13}$$

(Esta expresión, para las resistencias usuales, coincide aceptablemente con la expresión de EHE  $f_{ck,t} = 0,21 \sqrt{f_{ck}^3}$ ).

y que la resistencia a flexotracción es:

$$f_{ck,flex} = 2 f_{ck,t} = 0,154 f_{ck}^1$$

y con  $\gamma_c = 1,5$

$$f_{ck,flex} = 0,231 f_{cd}$$

Aplicando la fórmula de NAVIER y llamando  $W_1$  al módulo resistente de la fibra inferior  $\left( W_1 = \frac{I}{y_1} \right)$ , la rotura por flexotracción de la pieza, considerada como de hormigón en masa, ocurrirá bajo la acción de un momento:

$$M_{um} \approx f_{ck,flex} W_1$$

o bien

$$M_{um} \approx 0,231 f_{cd} W_1 \quad [36.110]$$

La sección, considerada como de hormigón armado, tendrá un momento de rotura:

$$M_{ua} \approx 0,9 h A_s f_{yk}^2$$

1 La resistencia a flexotracción puede oscilar de 1,5 a 2,2 veces la de tracción pura. Se toma aquí un valor alto porque ello está, para lo que sigue, del lado de la seguridad.

2 Se trata de cuantías muy bajas y puede suponerse  $z \approx 0,9 h$ .

y la condición para que no ocurra rotura agria es:

$$M_{ud} \geq M_{um}$$

o bien

$$0,9 h A_s f_{yk} \geq 0,231 f_{cd} W_1$$

que con  $\gamma_s = 1,15$  puede escribirse en la forma:

$$A_{s,min} = 0,223 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{W_1}{h} \approx 0,25 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{W_1}{h} \quad [36.111]$$

que es el valor adoptado por EHE.

Para sección rectangular  $W_1 = \frac{b h^2}{6}$  y resulta:

$$A_{s,min} = 0,0372 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} b h \approx 0,04 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} b h \quad [36.112]$$

o también con  $U_c = f_{cd} b d$

$$\left( \frac{U_s}{U_c} \right)_{min} = 0,04 \quad [36.113]$$

#### b) Método variante

Para secciones de forma cualquiera (que consideraremos en los capítulos siguientes), podemos adoptar la fórmula variante siguiente:

$$M_{d,min} = M_d \left[ 1,5 - 0,5 \frac{M_d}{M_{um}} \right] \quad [36.114]$$

siendo  $M_d$  el momento de cálculo y  $M_{um}$  el que resiste la sección considerada como de hormigón en masa. En efecto, para  $M_d = M_{um}$ , resulta  $M_{d,min} = M_d$  y cuando  $M_d \rightarrow 0$   $M_{d,min} \rightarrow 1,5 M_d$ . Es decir, que cuando la rotura es frágil, ello se compensa con un incremento de seguridad creciente al disminuir la cuantía hasta alcanzar el valor 1,5.

Como vimos  $M_{um} = 0,231 f_{cd} W_1$  y sustituyendo y teniendo de nuevo en cuenta la proporcionalidad de momentos y área de armadura y que  $M_d \approx 0,9 h A_s f_{yd}$

$$A_{s,min} = A_s \left[ 1,5 - 1,95 \frac{A_s f_{yd} h}{f_{cd} W_1} \right]$$

y como  $A_{s,min} \leq A_s$  y el corchete iguala a la unidad para  $A_s = 0,25 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{W_1}{h}$ , adoptamos

$$A_{s,min} = A_s \left[ 1,5 - 1,95 \frac{A_s h f_{yd}}{f_{cd} W_1} \right] \leq 0,25 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \frac{W_1}{h} \quad [36.115]$$

es la expresión de cuantía mínima generalizada para secciones de forma cualquiera.

La fórmula [36.115] si bien tiene carácter general, es de aplicación incómoda. Un desarrollo que permite una aplicación simple a secciones diversas ha sido realizado por J. CALAVERA y L. GARCÍA DUTARI (36.7). A continuación se resume lo esencial:

Para momentos positivos

$$A_{s,min}^+ = \left( 1,5 - \lambda_i \frac{U_s}{U_c} \right) A_s \leq \frac{0,49}{\lambda_i} \cdot \frac{U_c}{f_{yd}} \quad [36.116]$$

Para momentos negativos

$$A_{s,min}^- = \left( 1,5 - \lambda_s \frac{U_s}{U_c} \right) A_s \leq \frac{0,49}{\lambda_s} \cdot \frac{U_c}{f_{yd}} \quad [36.117]$$

Los valores de  $\lambda_i$  y  $\lambda_s$  se indican en la Tabla T-36.5. En ella se indican los tipos de sección y los valores de  $\left( \frac{U_s}{U_c} \right)_{lim}$  por debajo de los cuales rige la cuantía mínima.

TABLA T-36.5

SECCIONES		SECCIONES							
		1 Rectangular	2 T esbelta	3 T maciza	4 I esbelta	5 I maciza	6 Cajón esbelto	7 Cajón macizo	8 Forjados
$M^+$	$\frac{b_c}{b}$	1	0,10	0,20	0,10	0,20	0,10	0,20	0,15
	$\frac{h_c}{h}$	1	0,20	0,40	0,10	0,30	0,10	0,30	0,20
$M^-$	$\lambda_c$	11,17	6,91	7,51	1,95	2,22	1,95	2,22	4,55
	$\left(\frac{U_s}{U_c}\right)_{lim}$ ( $U_c = f_{cd} b_0 d$ )	0,04	0,07	0,07	0,26	0,23	0,26	0,23	0,11
$M^-$	$\lambda_s$	11,7	2,22	3,46	1,95	2,22	1,95	2,22	2,49
	$\left(\frac{U_s}{U_c}\right)_{lim}$ ( $U_c = f_{cd} b_0 d$ )	0,04	0,23	0,14	0,26	0,23	0,26	0,23	0,20

36.1.8.2 Por condiciones de retracción y temperatura

Además de lo anterior, de acuerdo con EHE, la cuantía geométrica mínima, referida a la sección total de hormigón en vigas y losas, debe ser la siguiente:

Tipo de elemento estructural	Tipo de acero	
	B 400 S	B 500 S
Losas <sup>(*)</sup>	2,0	1,3
Vigas <sup>(**)</sup>	3,3	2,8
Muros <sup>(***)</sup>	Armadura horizontal	4,0
	Armadura vertical	1,2

(\*) Cuantía mínima de cada una de las armaduras, longitudinal y transversal repartida en las dos caras. Las losas apoyadas sobre el terreno requieren un estudio especial.

(\*\*) Cuantía mínima correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opuesta una armadura mínima igual al 30% de la consignada.

(\*\*\*) La cuantía mínima vertical es la correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opuesta una armadura mínima igual al 30% de la consignada.

La armadura mínima horizontal deberá repartirse en ambas caras. Para muros vistos por ambas caras debe disponerse el 50% en cada cara. Para muros vistos por una sola cara podrán disponerse hasta 2/3 de la armadura total en la cara vista. En el caso en que se dispongan juntas verticales de contracción a distancias no superiores a 7,5 m, con la armadura horizontal interrumpida, las cuantías geométricas horizontales mínimas pueden reducirse a la mitad.

Estas cuantías mínimas rigen si las obtenidas por el cálculo no son mayores. Los muros de contención deben regirse por las cuantías correspondientes a losas.<sup>1</sup>

Es recomendable que, en cada cara de la losa, figure una cuantía igual a la mitad de la indicada, aunque EHE especifique sólo la total. Con el criterio de exigir la mitad en cada cara, resulta necesario emplear armadura en las zonas que no la necesitan por razones resistentes. Esta armadura es, sin embargo, una garantía de buen comportamiento frente a esfuerzos de retracción y temperatura. En vigas, EHE indica que la cuantía mínima consignada se refiere a la armadura de tracción y recomienda que, en la cara opuesta, se disponga una cuantía mínima igual al 30% de la indicada para la cara de tracción.

El MODEL CODE 90 establece las siguientes cuantías geométricas mínimas para piezas flectadas.

Vigas

Con acero B 400 ó B 500  $0,0015 b_1 d^2$

1 La especificación de EHE para muros debe interpretarse de acuerdo con la hipótesis de que las juntas de contracción no deben separarse nunca más de 7,50 m, lo que conduce a valores mitad. (Véase el Capítulo 54).

2  $b_1$  es el ancho medio de la sección al nivel de la armadura de tracción.

### Losas

- La armadura transversal no será inferior a 0,33 veces la longitudinal, si hay cargas concentradas importantes, ni a 0,2 veces en otros casos.
- En la proximidad de bordes libres, la cuantía geométrica de la armadura longitudinal perpendicular a dicho borde no será inferior a

Acero ordinario	0,001
Acero de alta resistencia	0,0005

- En la proximidad de bordes libres, la cuantía geométrica de la armadura longitudinal paralela al borde libre no será inferior a

Acero ordinario	0,002
Acero de alta resistencia	0,001

El EUROCÓDIGO EC-2 establece para vigas y losas que el área de la armadura de tracción será, como mínimo

$$A_{s,min} = \frac{0,6 b_o d}{f_{yk}} \geq 0,0015 b_o d$$

donde  $b_o$  es el ancho de la sección a nivel de la armadura de tracción y  $f_{yk}$  el límite elástico del acero, en N/mm<sup>2</sup>.

#### 36.1.9 CUANTÍA MÁXIMA

Como se ha dicho antes, no existe un criterio definido respecto a la cuantía máxima a emplear en flexión.

Habitualmente son los criterios económicos y los de dificultad de hormigonado los que limitan la cuantía. De todas formas, si las deformaciones de la pieza pueden ser críticas, no conviene forzar las cuantías, ya que ello supone, correlativamente, grandes profundidades de bloque comprimido y elevadas compresiones del hormigón en condiciones de servicio. En este caso, se sugiere no rebasar el valor  $\frac{x}{d} = 0,5$ . El EUROCÓDIGO EC-2 fija un máximo para la cuantía geométrica de 0,04, excepto en zonas de solapes.

### 36.2 FLEXIÓN SIMPLE EN PIEZAS PRETENSADAS

#### 36.2.1 CÁLCULO A FLEXIÓN EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO

En este estado, adoptamos para el hormigón el diagrama plasticificado de forma rectangular, tal como vimos en el Capítulo 32. La deformación del hormigón en rotura se supone constante e igual a 0,0035<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> El diagrama rectangular es especialmente adecuado para las secciones de forma no rectangular que son habituales en hormigón pretensado. Lo aplicamos sin la limitación de  $\epsilon_s = 0,01$  tal como ya justificamos anteriormente.

El diagrama 1-1 de deformaciones del hormigón en la figura 36-21.c) corresponde al pretensado permanente<sup>1</sup>. Al aplicar las cargas exteriores el diagrama en el estado límite último alcanza la posición final 2-2 con profundidad  $x$  de fibra neutra. El diagrama 1-1 puede ser calculado a partir de las tensiones en las fibras extremas aplicando lo visto para las deformaciones instantáneas y diferidas en el Capítulo 28, a las tensiones de pretensado en las fibras extremas.

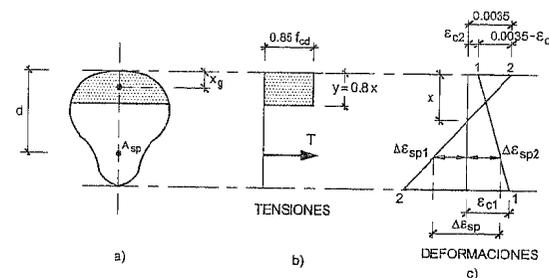


Figura 36-21

La condición de equilibrio de fuerzas expresa que, siendo  $S$  el área comprimida de hormigón:

$$0,85 f_{cd} S = T \quad [36.118]$$

donde  $T$  es la fuerza de la armadura pretensada en el agotamiento de la pieza.

Para calcular el valor de  $T$  es necesario conocer la tensión de cálculo de la armadura en el agotamiento de la pieza. Considerando los diagramas de deformaciones de la figura 36-21.c) la deformación final del acero se obtiene sumando a la deformación remanente de tesado  $\epsilon_{sr}$  (fig. 36-22) el valor  $\Delta\epsilon_{sp}$  que a su vez es suma de:

$$\Delta\epsilon_{sp1} = 0,0035 \frac{d-x}{x} \quad [36.119]$$

que es parte del incremento de alargamiento debido a la flexión y de  $\Delta\epsilon_{sp2}$  que la armadura debe experimentar para pasar de la tensión de pretensado permanente a la correspondiente a la descompresión de la fibra. Este alargamiento se mide o calcula a partir del diagrama 1-1.

Conocido  $\Delta\epsilon_{sp}$ , consideremos el diagrama de cálculo del acero (fig. 36-22).

El punto A corresponde al pretensado permanente con tensión  $\sigma_p = \frac{P_{sf}}{A_p}$

calculado de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 29. A partir del alargamiento permanente del tesado, llevamos  $\Delta\epsilon_{sp}$  del acero en el agotamiento de la pieza.

<sup>1</sup> Por supuesto, si el cálculo se hace a otra edad, se considerará el estado de deformación correspondiente a esa edad.

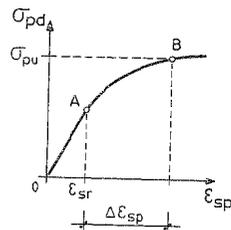


Figura 36-22

Para una sección de forma cualquiera la determinación manual del valor  $x$  de la profundidad de la fibra neutra se ordena de la siguiente forma:

1. Se supone una profundidad  $x$ .
2. Se calcula  $y = 0,8x$  y el área  $S$  de hormigón comprimido y por tanto:

$$C = 0,85 f_{cd} S$$

3. Con la fórmula [36.119] se calcula  $\Delta\epsilon_{sp1}$  y mediante la determinación de  $\epsilon_{ci}$  y  $\epsilon_{c2}$ , se calcula  $\Delta\epsilon_{sp2}$  y por tanto  $\Delta\epsilon_{sp} = \Delta\epsilon_{sp1} + \Delta\epsilon_{sp2}$ .
4. Con el valor  $\epsilon_{sr}$  del alargamiento remanente de tesado y el de  $\Delta\epsilon_{sp}$ , en el diagrama de cálculo del acero (Fig. 36-22) se obtiene  $\sigma_{pu}$  y conocemos por tanto:

$$T = A_p \sigma_{pu}$$

5. Si  $C > T$  se tantea con un valor de  $x$  menor y al revés si  $C < T$ . En cuanto se han realizado tres tanteos, basta (fig. 36-23) llevar en gráfico en abscisas los valores de  $x$  y en ordenadas los de  $C-T$  para determinar el valor  $x$  de la solución  $C = T$ .

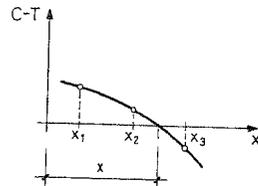


Figura 36-23

Una vez conocido  $x$  es necesario hallar el c.d.g. del área comprimida de profundidad  $0,8x$ <sup>1</sup>. Si es  $x_g$  el valor correspondiente, el momento de cálculo vale:

<sup>1</sup> Todo el cálculo puede realizarse si la sección no es asimilable a una rectangular o T, dividiendo en bandas de pequeño ancho, y es, por supuesto, fácilmente programable.

$$M_u = T(d - x_g) \geq M_d \quad [36.120]$$

siendo  $M_u$  el valor del momento característico.

Una buena regla práctica es que el bloque comprimido de hormigón esté situado, con cierta holgura, en la cabeza de la sección (fig. 36-24).

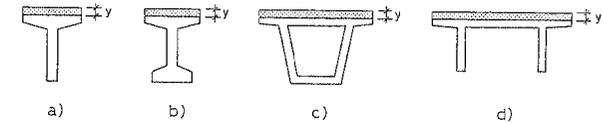


Figura 36-24

La razón es que si el bloque comprimido invade toda la cabeza, o la excede, la pieza se vuelve muy sensible a los descensos de resistencia del hormigón. Véase (36.8).

Con lo visto anteriormente, una expresión que da una excelente aproximación en piezas pretensadas para la estimación del momento flector último es la siguiente:

$$M_u = 0,9 d A_s f_{pd} \quad [36.121]$$

donde  $d$  es la distancia de la fibra superior al c.d.g. de las secciones de las armaduras.

#### Caso en que existan alambres tesados en la zona comprimida

Este caso es frecuente en la práctica, siempre en voladizos y a veces también en vano. El esquema general se indica en la figura 36.25. Llamamos  $A'_p$  al área de armadura pretensada situada en la zona comprimida en el agotamiento de la pieza y  $A_p$  la situada en la zona de tracción. La tensión y fuerza  $T_2$  en la armadura  $A_p$  y la fuerza de compresión  $C$  del bloque comprimido del hormigón se hallan por el procedimiento ya descrito. Para hallar la fuerza  $T_1$  en la armadura  $A'_p$ , debe observarse que el valor  $\Delta'\epsilon_{sp}$  corresponde a un acortamiento de dicha armadura ya que el incremento de compresión en esa zona contribuye a destesarla. El valor  $\sigma'_{pu}$  de esta armadura en el agotamiento se obtiene por tanto entrando en el diagrama de cálculo con un valor del alargamiento en estado límite último:

$$\epsilon_{sr} - \Delta'\epsilon_{sp}$$

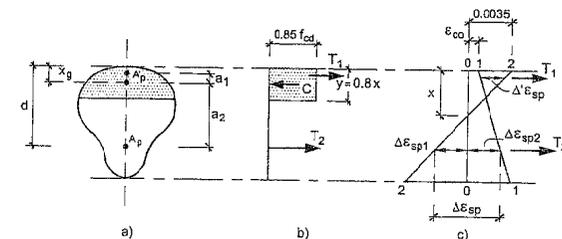


Figura 36-25

al que le corresponde  $\sigma'_{pu}$  y por tanto:

$$T_1 = A'_p \sigma'_{pu} \quad [36.122]$$

La condición de equilibrio es:

$$C = T_1 + T_2$$

y se determina  $x$  por tanteos de forma análoga a como vimos antes. Obtenido  $x$  y  $x_g$  el valor de momento de cálculo es:

$$M_d = T_2 a_2 + T_1 a_1 \quad [36.123]$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  se suponen positivas hacia abajo del c.d.g. del bloque comprimido.

Obsérvese que si  $a_1$  es negativa (armadura  $A'_p$  por encima del c.d.g. del área del bloque comprimido) la armadura  $A'_p$  reduce el momento de rotura. Si  $a_1$  es positiva ambas armaduras contribuyen a incrementar el momento  $M_d$ .

Caso en que existan además armaduras pasivas en las zonas comprimida o traccionada. Este caso plantea un problema nuevo y es el de que al transferir la tensión las armaduras pasivas se habrán comprimido tal como vimos en los Capítulos 34 y 35, experimentando acortamientos debidos al pretensado que denominamos  $\epsilon_s$  (fig. 36-26) según la posición de la armadura pasiva en la sección.

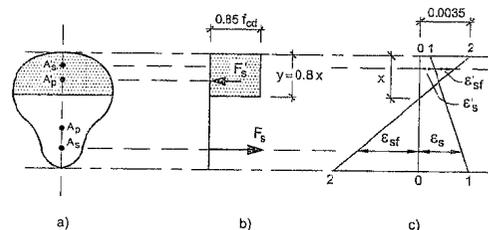


Figura 36-26

Denominamos como  $A'_s$  y  $A_s$  las armaduras pasivas en zona comprimida y traccionada respectivamente. El punto representativo del estado de las armaduras pasivas bajo el pretensado permanente se representa en las figuras 36-27 a) y b) por los puntos A. Por el efecto de las acciones exteriores, el diagrama de deformaciones pasa (fig. 36.26) de 1-1 a 2-2 al producirse la rotura. La armadura  $A'_s$  ve incrementado su acortamiento en  $\epsilon'_{sf}$ , mientras que la  $A_s$  pierde el acortamiento inicial  $\epsilon_s$  y adquiere uno de tracción  $\epsilon_{sf}$  alcanzando en sus diagramas (fig. 36-27 a) y b)) los puntos de agotamiento B, de los que se deducen las tensiones  $\sigma'_{su}$ ,  $\sigma'_{su}$  de las armaduras pasivas en el agotamiento de la pieza. Los productos  $A_s \sigma'_{su}$ ,  $A'_s \sigma'_{su}$  nos dan las fuerzas  $F'_s$ ,  $F'_s$  de las armaduras pasivas en el agotamiento. Obsérvese que  $F'_s$  es siempre una fuerza de compresión y  $F_s$  de tracción en cuanto a su colaboración en la formación del momento último. Por superposición de este caso con el anterior queda por tanto

resuelto el caso más complejo posible en piezas de hormigón pretensado, que es el existir armaduras pasivas y activas tanto en la zona comprimida como en la traccionada.

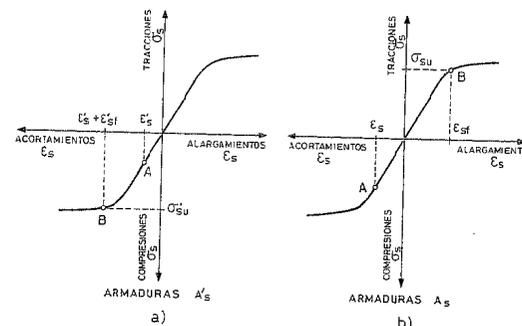


Figura 36-27

### 36.2.2 CUANTÍA MÁXIMA EN FLEXIÓN

En general no viene fijada por ningún criterio directo, sino que se sitúa la armadura con la máxima excentricidad posible, cumpliendo los límites de tensiones previstos en el Capítulo 31. El cálculo a estado límite último en flexión lo que hace es confirmar que los valores  $\gamma_e$  y  $\gamma_p$  disponibles no son menores que los reglamentarios. Si no ocurre así, un camino, generalmente más económico, es variar la forma de la sección. Otras dos alternativas son:

- Emplear más armadura pretensada, tesada a una tensión inferior. Esto conduce a aumentar la seguridad a rotura sin aumentar las tensiones en servicio. Es un método doblemente caro pues desaprovecha el acero y complica la fabricación ya que el variar de unos casos a otros la fuerza de tesado de cada armadura supone pérdida de tiempo y posibilidad de confusión en la ejecución.
- Añadir armadura pasiva suplementaria en la zona de tracción. Ello aumenta la seguridad a rotura sin alterar prácticamente las tensiones en servicio.

### 36.2.3 CUANTÍA MÍNIMA EN FLEXIÓN

EHE generaliza la fórmula establecida en 36.1.2.1

$$A_p f_{pd} + A_s f_{yd} \geq 0,25 \frac{W_1}{h} f_{cd} \quad [36.124]$$

Con los mismos significados allí expuestos  $A_p$  es el área de la sección transversal de armadura activa y  $f_{pd}$  la resistencia de cálculo (límite elástico de cálculo) de la armadura activa.  $W_1$  es definido como el módulo resistente de la sección bruta. En sentido estricto, debería tomarse el de la sección homogeneizada si las armaduras están adheridas. El EUROCÓDIGO EC-2 mantiene la condición expuesta en 36.1.6.2.

### EJEMPLO 36.7

De la viga de la figura 36-28 se conocen los datos siguientes:

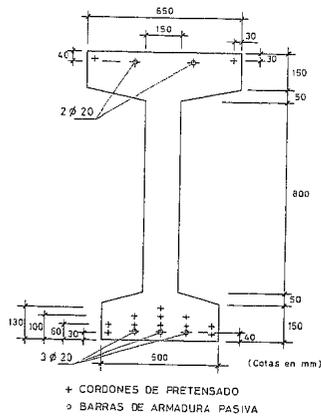


Figura 36-28

**Hormigón:**

Resistencia al transferir,  $f_{ck} = 25$  MPa; resistencia a 28 días,  $f_{ck} = 40$  MPa.

**Armadura activa:**

13 cordones Y 1860 S7 de 15,2 mm de diámetro tesados al 75% de la carga nominal de rotura. Las pérdidas de pretensado totales suponen un 25% de la tensión inicial de tesado.

**Armadura pasiva:**

5  $\phi$  20 según se indica en la figura, de calidad B 400 S.

El diagrama de la armadura activa es el de la figura 36-29.

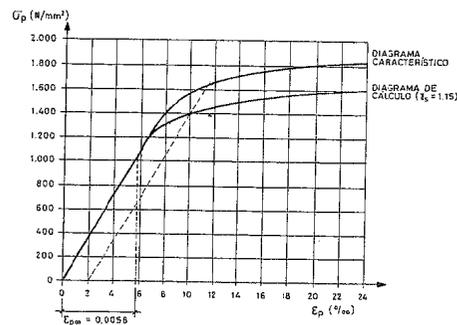


Figura 36-29

Los diagramas de tensiones y deformaciones debidas al pretensado permanente y el p.p. de la viga en la sección central se indican en la figura 36-30a) y b). El momento característico en la sección central es de 1405,5 kN·m.

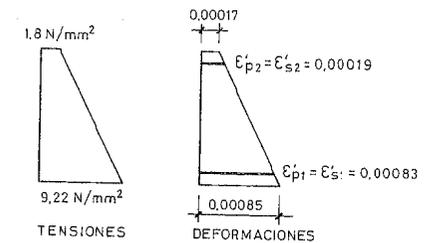


Figura 36-30

**Solución**

Bajo la acción del pretensado más el peso propio, las deformaciones de las diferentes armaduras son

$$\varepsilon'_{p2} = \frac{0,00085 - 0,00017}{1200} \cdot 30 + 0,00017 = 0,00019$$

$$\varepsilon'_{s2} = \frac{0,00085 - 0,00017}{1200} \cdot 40 + 0,00017 = 0,00019$$

$$\varepsilon'_{p1} = \frac{0,00085 - 0,00017}{1200} \cdot 1170 + 0,00017 = 0,00083$$

$$\varepsilon'_{s1} = \frac{0,00085 - 0,00017}{1200} \cdot 1160 + 0,00017 = 0,00083$$

y se representan en la figura 36-31a) para las activas y 36-31b) para las pasivas.

El alargamiento permanente de pretensado resulta con  $E_p = 180.000$  N/mm<sup>2</sup> que proporciona el diagrama del acero (fig. 36-29)

$$\varepsilon_{ppo} = \frac{P_{N20}}{E_s A_p} = \frac{1904175}{13 \cdot 140 \cdot 180000} = 0,0058$$

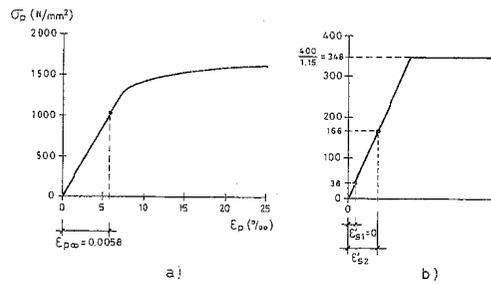


Figura 36-31

De acuerdo con ello, despreciando el alargamiento de las armaduras bajo la acción del peso propio<sup>1</sup>, el punto representativo de la armadura activa se indica en la figura 36-31a).

Suponiendo que sea  $x$  la profundidad de la fibra neutra de deformaciones, las  $\varepsilon''$  (fig. 36-32) son

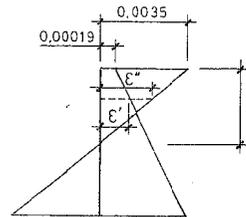


Figura 36-32

$$\varepsilon''_{p2} = \frac{0,0035}{x} (1176 - x)$$

$$\varepsilon''_{s2} = \frac{0,0035}{x} (1160 - x)$$

$$\varepsilon''_{p1} = \frac{0,0035}{x} (x - 30)$$

$$\varepsilon''_{s1} = \frac{0,0035}{x} (x - 40)$$

<sup>1</sup> Por supuesto el tenerlas en cuenta no presenta dificultad, pero su valor es despreciable en la práctica.

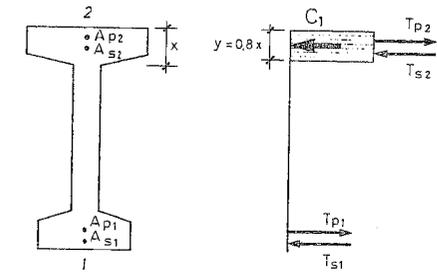


Figura 36-33

La figura 36-33 indica las fuerzas consideradas

$\varepsilon'$  = diagrama de deformaciones permanentes de pretensado.

$\varepsilon''$  = diagrama de deformaciones en rotura.

$$x_{p1} = 1128 \text{ mm} \quad A_{p1} = 1540 \text{ mm}^2$$

$$x_{p2} = 30 \text{ mm} \quad A_{p2} = 280 \text{ mm}^2$$

$$x_{s1} = 1160 \text{ mm} \quad A_{s1} = 942,6 \text{ mm}^2$$

$$x_{s2} = 40 \text{ mm} \quad A_{s2} = 628,4 \text{ mm}^2$$

y las deformaciones totales, designadas como  $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$  en cada fibra

$$\varepsilon_{p2} = 0,0058 - 0,00021 + \frac{0,0035}{x} (1170 - x)$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0,0035}{x} (1160 - x) \leq \frac{400}{1,15 \cdot 200.000} = 0,0017$$

$$\varepsilon_{p1} = 0,0058 - \left[ \frac{0,0035}{x} (x - 30) - 0,00083 \right]$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0,0035}{x} (x - 40) \leq 0,0017$$

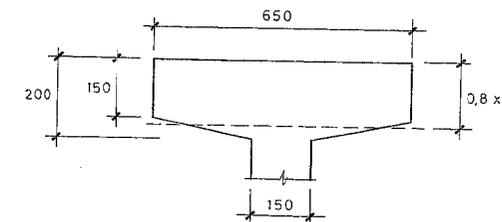


Figura 36-34

$$C = 0,85 f_{cd} \left[ 650 \cdot 150 + \frac{2806 - 8x}{2} (0,8x - 150) \right]$$

El cálculo se ordena en la Tabla de la figura 36-36. Como se dijo anteriormente, tres tanteos son suficientes, resultando  $x = 220$  mm. (Obsérvese que  $y = 0,80 \cdot 220 = 176$  mm rebasa ligeramente la zona rectangular. Ya se indicó que no es conveniente rebasar apreciablemente la cabeza superior, pues la pieza resultaría muy sensible a las bajas de resistencia del hormigón).

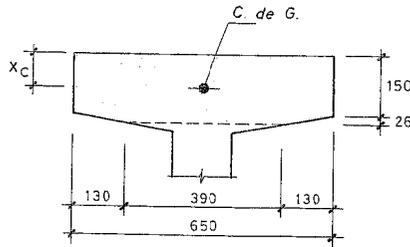


Figura 36-35

Para el cálculo del momento último  $M_u$

$x$ (mm)	$\epsilon_{p2}$ (‰)	$\epsilon_{p1}$ (‰)	$\epsilon_{s2}$ (‰)	$\epsilon_{s1}$ (‰)	$T_{p2}$ (kN)	$T_{p1}$ (kN)	$T_{s2}$ (kN)	$C_{s1}$ (kN)	$C$ (kN)	$\Sigma T$ (kN)	$\Sigma C$ (kN)	$\Sigma C - \Sigma T$ (kN)
200	22,3	3,7	> 1,7	> 1,7	2.431	183	336	224	2.514	2.980	2.733	- 212
210	21,4	3,7	> 1,7	> 1,7	2.416	183	336	224	2.613	2.985	2.837	- 98
VALOR SOLUCIÓN	220	20,5	3,8	> 1,7	> 1,7	2.408	178	336	224	2.922	2.920	= 0

Figura 36-36

$$x_c = \frac{150 \cdot 650 \cdot 75 + 390 \cdot 26 \cdot 163 + 0,5 \cdot 260 \cdot 26 \cdot 1587}{150 \cdot 650 + 390 \cdot 26 + 0,5 \cdot 260 \cdot 26} = 85,6 \text{ mm}$$

Momento último de agotamiento por flexión

$$M_u = T_{p2} (1.128 - 85,6) - T_{p1} (85,6 - 30) + T_{s2} (1.160 - 85,6) + C_{s1} (85,6 - 40) = 2.408 \cdot 1.042 - 178 \cdot 56 + 336 \cdot 1.074 + 224 \cdot 46 = 2.870 \text{ mkN}$$

El  $\gamma_f$  disponible

$$\gamma_f = \frac{2.870}{1.405,5} = 2,04$$

## BIBLIOGRAFÍA

- (36.1) BLANCO GARCÍA, F. "Expresiones analíticas de los diagramas tensionales en la flexión de piezas de hormigón armado". CIMBRA n° 82, mayo 1981.
- (36.2) BLANCO GARCÍA, F. "Sobre la utilización de aceros para hormigón armado en piezas sometidas a flexión simple". HORMIGÓN Y ACERO n° 99, 2° trimestre 1971.
- (36.3) CORTÉS BRETÓN, J. "Estudio experimental de la capacidad mecánica de secciones de hormigón con armadura comprimida según el grado de coacción al pandeo de las armaduras". Tesis Doctoral en la Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA, 1990.
- (36.4) FERNÁNDEZ GÓMEZ, J., RODRÍGUEZ LÓPEZ, F. "Estudio de la capacidad resistente de secciones de hormigón armado en flexión simple con armaduras de compresión no necesaria pero existente". HORMIGÓN Y ACERO n° 161, 4° trimestre 1986.
- (36.5) "BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR REINFORCED CONCRETE" (ACI 318-95). American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (36.6) PARK, R., PAULAY, T. "Reinforced Concrete Structures". John Wiley & Sons. New York. 1975.
- (36.7) CALAVERA, J., GARCÍA DUTARI, L. "Generalización de la fórmula de cuantía mínima a secciones de forma cualquiera". Cuadernos Técnicos de INTEMAC n° 1 (91). Primer trimestre 1991.
- (36.8) VILLANUEVA, A. "Influencia de las variaciones dimensionales y de calidad de los materiales en la seguridad de piezas de hormigón pretensado trabajando a flexión". Tesis Doctoral en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA. 1978.

## CAPÍTULO 37

### COMPRESIÓN Y FLEXIÓN COMPUESTAS

#### 37.1 INTRODUCCIÓN

Como vimos en el Capítulo 32, la flexión compuesta comprende los dominios de deformación 2, 3, 4 y 4a y la compresión compuesta el dominio 5.

Refiriéndonos al caso más general de pieza con armadura en dos caras opuestas, el agotamiento puede corresponder a alguno de los esquemas indicados en la figura 37-1.

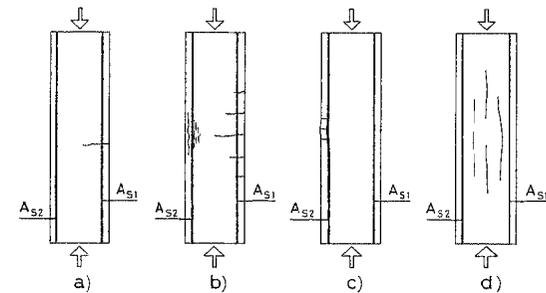


Figura 37-1

El esquema a) corresponde a una rotura frágil por incumplimiento de las normas de cuantía mínima previstas para la armadura de tracción, como pieza flectada (Capítulo 36). Análogamente a como vimos allí, la pieza presentaría, en ese caso, mayor capacidad resistente a flexión como elemento de hormigón en masa que como elemento de hormigón armado.

El esquema b) corresponde a una rotura dúctil por agotamiento en tracción de la armadura, con fallo secundario del hormigón comprimido.

El esquema c) corresponde a un fallo por pandeo de la armadura comprimida. Finalmente, el esquema d) corresponde a un fallo del hormigón por compresión excesiva, con una fisuración normalmente muy fina (habitualmente del orden de 0,1 mm) y que se presenta sólo a partir de una carga muy próxima a la de rotura.

Los fallos del tipo c) y d), que corresponden a las solicitaciones más habituales de pilares en edificación, tienen muy escasa capacidad de aviso.

A continuación, haremos en primer lugar un planteamiento general en piezas de hormigón armado para una sección de forma cualquiera, para centrarnos a continuación en las secciones rectangular, circular y anular, que son las más frecuentemente usadas en la práctica.

## 37.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO

### 37.2.1 ECUACIONES GENERALES PARA SECCIÓN DE FORMA CUALQUIERA<sup>1</sup>

Supondremos la sección indicada en la figura 37-2, sometida a un esfuerzo axial  $N_d$ , con excentricidad  $e$  respecto a la armadura  $A_{s1}$ , de tracción o menos comprimida y  $e_o$  respecto al baricentro plástico de la sección.

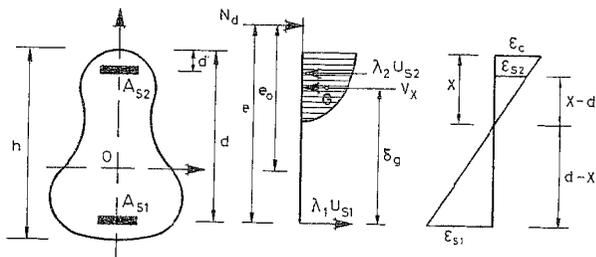


Figura 37-2

En lo que sigue, consideramos positivas las tracciones y negativas las compresiones y, análogamente, para las deformaciones correspondientes.

El equilibrio de fuerzas conduce a:

$$N_d = V_x + A_{s1} \sigma_{s1} + A_{s2} \sigma_{s2} \quad [37.1]$$

El equilibrio de momentos conduce a:

$$N_d e = V_x \delta_g + A_{s2} \sigma_{s2} (d-d') \quad [37.2]$$

<sup>1</sup> Un trabajo importante y general sobre el tema puede verse en F. MORÁN (37.1). Información interesante puede obtenerse también en (37.2).

Planteando las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones (fig. 37-2), se tiene:

$$\frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_{s1}}{d-x} = \frac{\epsilon_{s2}}{x-d'} \quad [37.3]$$

Como en el capítulo anterior,  $V_x$  representa el volumen de compresiones y  $\delta_g$  la distancia de su c.d.g. a la armadura en tracción o menos comprimida.

Si hacemos  $\sigma_{s1} = \lambda_1 f_{yd}$  y  $\sigma_{s2} = \lambda_2 f_{yd}$ , las ecuaciones [37.1] y [37.2] pueden escribirse en la forma

$$N_d = V_x + \lambda_1 U_{s1} + \lambda_2 U_{s2} \quad [37.4]$$

$$N_d e = V_x \delta_g + \lambda_2 U_{s2} (d-d') \quad [37.5]$$

Si en [37.5] sustituimos  $e$  por  $e_o + \frac{d-d'}{2}$ , se obtiene

$$N_d \left[ e_o + \frac{d-d'}{2} \right] = V_x \delta_g + \lambda_2 U_{s2} (d-d') \quad [37.6]$$

y llamando  $N_d e_o = M_d$

$$M_d = V_x \delta_g + \lambda_2 U_{s2} (d-d') - N_d \frac{d-d'}{2}$$

y, teniendo en cuenta [37.4]

$$M_d = V_x \left[ \delta_g - \frac{d-d'}{2} \right] + \frac{d-d'}{2} [\lambda_2 U_{s2} - \lambda_1 U_{s1}] \quad [37.7]$$

Las ecuaciones [37.4] y [37.7], junto con las dos de compatibilidad [37.3] y la de relación  $(\lambda, \epsilon_s)$  dada por la Tabla T-36.1 o por la ecuación [36.33] a [36.35] que corresponda, resuelven el problema.

En el caso de dimensionamiento, los datos suelen ser la geometría de la sección, las características de los materiales, las posiciones de los c.d.g. de las dos armaduras y los valores de  $N_d$  y  $M_d$ .

Las incógnitas, en el caso de los dominios 2 y 3, en los que  $\epsilon_{s1} = 0,01$  y se conoce por tanto  $\lambda_1$ , son  $\lambda_2, x, \epsilon_c, U_{s1}$  y  $U_{s2}$ .

En el caso de los dominios 4 y 4a, se conoce  $\epsilon_c$  y la relación entre  $\epsilon_s$  y  $\lambda$ , y las incógnitas son  $\lambda_1, \lambda_2, x, U_{s1}$  y  $U_{s2}$ .

En el caso del dominio 5, las incógnitas son  $\lambda_1, \lambda_2, x, \epsilon_c, U_{s1}$  y  $U_{s2}$ ; es decir, una incógnita más, pero la condición de pivoteo (ver figura 32-29) permite establecer una ecuación más, por ejemplo:

$$\frac{\varepsilon_c - 0,002}{\frac{3}{7}h} = \frac{\varepsilon_{s2} - 0,002}{\frac{3}{7}h - d'} \quad [37.8]$$

En definitiva, se tienen cuatro ecuaciones con cinco incógnitas en los dominios 2, 3, 4 y 4a y cinco ecuaciones con seis incógnitas en el dominio 5. El exceso de una incógnita indica la necesidad de disponer de un dato adicional, como por ejemplo conocer una de las dos armaduras, exigir que la suma  $A_{s1} + A_{s2}$  sea mínima o, lo que es más frecuente en la mayoría de los pilares de edificación y en bastantes obras públicas, imponer la condición  $A_{s1} = A_{s2}$ .

En el caso de comprobación, los datos suelen ser la geometría de la sección, las características de los materiales y las posiciones y áreas  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$  de las armaduras. El planteamiento es completamente análogo al caso de dimensionamiento, pero ahora, en lugar de imponer una condición adicional, se obtiene una relación  $\varphi(M_u, N_u) = 0$  (fig. 37-3), cuya representación gráfica constituye la curva de interacción de la sección para las armaduras  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ , lugar geométrico de los pares de valores  $(N_u, M_u)$  que agotan la sección.

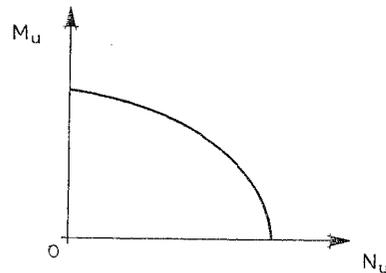


Figura 37-3

Si la sección es de forma cualquiera, el cálculo manual es muy trabajoso. Se obtiene una simplificación notable en el cálculo de  $V_x$  y  $\delta_g$  adoptando el diagrama rectangular expuesto en 36.3.

### 37.2.2 SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA SIMÉTRICA

Llamemos  $A_{st}$  a la sección total de armadura, con lo que  $A_{s1} = A_{s2} = \frac{A_{st}}{2}$  (figura 37-4). Las ecuaciones de equilibrio toman las formas siguientes:

#### 37.2.2.1 Flexión compuesta

$$\frac{N_d}{f_{cd} b h} = \frac{V_x}{f_{cd} b h} + \frac{1}{2} \frac{U_{st}}{f_{cd} b h} (\lambda_1 + \lambda_2) \quad [37.9]$$

$$\frac{M_d}{f_{cd} b h^2} = \frac{V_x}{f_{cd} b h} \left[ \frac{\delta_g}{h} - \frac{d}{2h} + \frac{d'}{2h} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{2h} - \frac{d'}{2h} \right] \frac{U_{st}}{f_{cd} b h} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad [37.10]$$

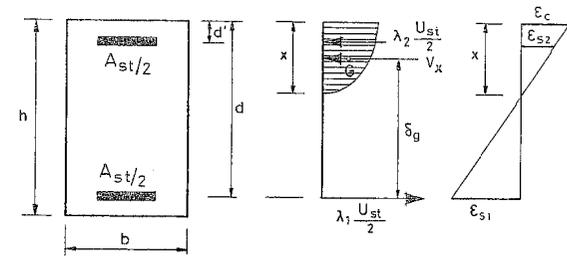


Figura 37-4

Los dominios de deformación 2, 3 y 4 son comunes con el caso de flexión simple considerado en el capítulo anterior y, por lo tanto, los valores  $\frac{x}{d}$  fronteras y las expresiones de  $V_x$  y  $\delta_g$  allí obtenidas son válidos. Sustituyendo en [37.9] y [37.10], se tiene:

- Para  $0 \leq \frac{x}{d} \leq \frac{1}{6}$  (Dominio 2)

$$v = \frac{N_d}{f_{cd} b h} = \frac{0,85}{12} 1000 \varepsilon_c (6 - 1000 \varepsilon_c) \frac{x}{h} + \frac{1}{2} \frac{U_{st}}{f_{cd} b h} (\lambda_1 + \lambda_2) \quad [37.11]$$

$$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b h^2} =$$

$$= \frac{0,85}{12} 1000 \varepsilon_c (6 - 1000 \varepsilon_c) \frac{x}{h} \left[ \frac{x}{h} \frac{1}{1000 \varepsilon_c} \left( 2 - \frac{3(4 - 1000 \varepsilon_c)^2}{4(6 - 1000 \varepsilon_c)} \right) + \frac{d}{2h} - \frac{x}{h} + \frac{d'}{2h} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{2h} - \frac{d'}{2h} \right] \frac{U_{st}}{f_{cd} b h} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad [37.12]$$

- Para  $\frac{1}{6} < \frac{x}{d} \leq 1$  (Dominios 2, 3 y 4) ó  $1 < \frac{x}{d} < \frac{h}{d}$  (Dominio 4a)

$$v = \frac{N_d}{f_{cd} b h} = \frac{0,85}{3} \frac{1}{1000 \varepsilon_c} (3000 \varepsilon_c - 2) \frac{x}{h} + \frac{1}{2} \frac{U_{st}}{f_{cd} b h} (\lambda_1 + \lambda_2) \quad [37.13]$$

$$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} b h^2} =$$

$$= \frac{0,85}{3} \frac{1}{1.000 \varepsilon_c} (3.000 \varepsilon_c - 2) \frac{x}{h} \left[ \frac{10 + 3 \left[ (1.000 \varepsilon_c)^2 - 4 \right] x}{2.000 \varepsilon_c (3.000 \varepsilon_c - 2) h} + \frac{d}{2} - \frac{x}{h} + \frac{d'}{2h} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{2h} - \frac{d'}{2h} \right] \frac{U_{st}}{f_{cd} b h} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad [37.14]$$

En ambos casos se añaden las ecuaciones de compatibilidad y la de relación  $\lambda - \varepsilon_s$

### 37.2.2.2 Compresión compuesta

Las ecuaciones [37.9] y [37.10] planteadas en el apartado anterior para la flexión compuesta son válidas, teniendo en cuenta que estamos ahora en el Dominio 5 con  $1 \leq \frac{x}{h} \leq +\infty$  y, por tanto, los valores de  $V_x$  y  $\delta_g$  son diferentes.

Las expresiones correspondientes resultan

$$V_x = \frac{0,85}{3} \frac{f_{cd} b h}{\left( \frac{x}{h} - \frac{3}{7} \right)^2} \left[ 2 \left( \frac{x}{h} - \frac{3}{7} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{h} - \frac{3}{7} \right) \left( \frac{x}{h} - 1 \right)^2 + \left( \frac{x}{h} - 1 \right)^3 \right] +$$

$$+ \frac{3}{7} 0,85 f_{cd} b h \quad [37.15]$$

$$\delta_g = \frac{4}{7} h - d' - \frac{V_{x1} \delta_1 - V_{x2} \delta_2}{V_{x1} + V_{x2}} \quad [37.16]$$

donde  $\delta_1$  y  $\delta_2$  (fig. 37-5) son las distancias de los c.d.g. de áreas rectangular y parabólica, a la recta que las separa y que corresponde a  $\varepsilon_c = 0,002$ , como vimos. Se obtiene

$$\delta_1 = \frac{3}{4} \frac{\left[ \left( \frac{x}{h} - \frac{3}{7} \right)^4 - \left( \frac{x}{h} - 1 \right)^2 \left( \frac{x}{h} + \frac{1}{7} \right)^2 \right] h}{2 \left( \frac{x}{h} - \frac{3}{7} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{h} - \frac{3}{7} \right) \left( \frac{x}{h} - 1 \right)^2 + \left( \frac{x}{h} - 1 \right)^3} \quad [37.17]$$

$$\delta_2 = \frac{3}{14} h$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones [37.3] y [37.8] y la de relación  $\lambda - \varepsilon_s$ , de la ecuación [36.33] a [36.35] que corresponda, siguen completando el sistema.

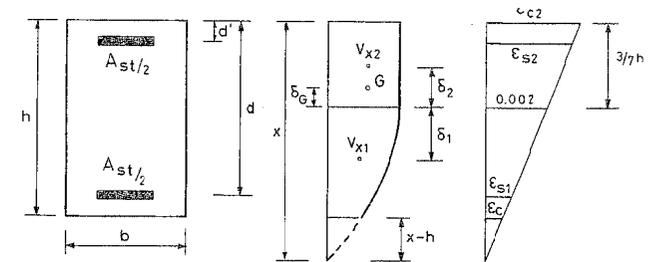


Figura 37-5

### 37.2.2.3 Gráficos para dimensionamiento y comprobación

Las expresiones anteriores hacen dificultosa la resolución si no se dispone de un ordenador. Los gráficos GT-96 a GT-107 resuelven tanto los problemas de dimensionamiento como de comprobación.

### EJEMPLO 37.1

Dado un pilar con escuadría 250 . 400 mm y hormigón H-25, sometido a un esfuerzo axial de cálculo  $N_d = 900$  kN y a un momento flector de cálculo  $M_d = 100$  mkN actuando en el sentido de los lados mayores, dimensionarlo con acero B 400S. Tómese  $\gamma_c = 1,5$ ;  $\gamma_s = 1,15$ . Se dispone armadura simétrica en las dos caras de 250 mm.

*Solución*

Estimamos  $d' \approx 0,10 h$  y manejamos el ábaco GT-96.

Suponemos el pilar hormigonado verticalmente y por tanto

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\nu = \frac{900.000}{16,7 \cdot 250 \cdot 400} = 0,539$$

$$\mu = \frac{100 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 250 \cdot 400^2} = 0,150$$

y entrando en el ábaco se obtiene  $\omega = 0,18$ .

$$U_{s1} = U_{s2} = \frac{1}{2} 0,18 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 400 = 150300 \text{ N} = 150,3 \text{ kN}$$

Se disponen 3  $\emptyset$  16 en cada cara.

### 37.2.3 SECCIÓN RECTANGULAR CON DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE ARMADURAS

En muchos pilares usualmente se emplea armadura simétrica como simplificación constructiva. Sin embargo, en caso de piezas de gran importancia puede ser interesante no adoptar la combinación  $A_{s1} = A_{s2} = \frac{A_{st}}{2}$ , sino buscar el par de armaduras  $A_{s1}, A_{s2}$ , tal que resulte mínima la suma  $A_{s1} + A_{s2}$ .

El desarrollo teórico del tema excede el espacio disponible, pero a él está dedicado íntegramente el libro de J. CALAVERA, A. VERDE y F. BLANCO incluido como referencia (37.3).

De él se han seleccionado los gráficos GT-107 y GT-108 que resuelven el problema.

#### EJEMPLO 37.2

Dada una pieza de sección  $600 \cdot 1000$  mm, sometida a un momento  $M_d = 3400$  mkN en el sentido de la dimensión mayor y a un esfuerzo axial  $N_d = 6200$  kN, construida con hormigón H-25,  $\gamma_c = 1,5$  y  $\gamma_s = 1,15$ , armarla con acero B 400S con armadura en las dos caras opuestas con optimización de la armadura total.

*Solución*

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$v = \frac{6.200 \cdot 10^3}{16,7 \cdot 600 \cdot 1000} = 0,618$$

$$\mu = \frac{3.400 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 600 \cdot 1000^2} = 0,34$$

Entrando en el ábaco GT-105, se obtiene

$$\omega_1 = 0,19 \quad U_{s1} = 0,19 \cdot 16,7 \cdot 600 \cdot 1000 = 1903800 \text{ N} = 1904 \text{ kN}$$

$$\omega_2 = 0,48 \quad U_{s2} = 0,48 \cdot 16,7 \cdot 600 \cdot 1000 = 4809600 \text{ N} = 4810 \text{ kN}$$

$$A_{s1} = 7 \emptyset 32 \text{ (lado menos comprimido)}$$

$$A_{s2} = 18 \emptyset 32 \text{ (lado más comprimido)}$$

### 37.2.4 ÁBACOS PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN EL CANTO

Es un caso que se presenta con frecuencia en la práctica. Se resuelve mediante los gráficos GT-100 y GT-104.

#### EJEMPLO 37.3

Dada una sección de  $300 \cdot 600$  mm sometida a un esfuerzo axial  $N_d = 1200$  kN y a un momento  $M_d = 320$  mkN, actuando en el sentido de los lados mayores, dimensionarla para H-25, acero B 500S, con  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ , y armaduras distribuidas a lo largo de las caras de 600 mm.

*Solución.* (No hacemos reducción del límite elástico de cálculo)

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$v = \frac{1.200 \cdot 10^3}{16,7 \cdot 300 \cdot 600} = 0,399$$

$$\mu = \frac{320 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 300 \cdot 600^2} = 0,177$$

Adoptando  $d' = 0,10$  h, el ábaco GT-100 para  $v = 0,399$  y  $\mu = 0,177$  nos da

$$\omega = 0,22 \quad U_{st} = 2 U_s = 0,22 \cdot 16,7 \cdot 300 \cdot 600 = 661.320 \text{ N} = 661,3 \text{ kN}$$

La armadura a lo largo de cada cara es, por tanto,

$$U_s = \frac{661,3}{2} = 330,7 \text{ kN} \rightarrow 4 \phi 20$$

Los 4  $\emptyset$  20 deben distribuirse a lo largo de los dos lados de 600 mm, con los redondos extremos a menos de  $0,10 \cdot 600 \approx 60$  mm de los bordes.

### 37.2.5 ÁBACOS PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN RECTANGULAR CON DIVERSAS DISTRIBUCIONES PERIMETRALES DE ARMADURAS

Se incluyen como gráficos GT-101, GT-102, GT-105 y GT-106.

### 37.2.6 ÁBACOS PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN CIRCULAR

Se incluyen como gráficos GT-109 y GT-110 y su uso se aclara en el ejemplo siguiente:

Dos publicaciones interesantes sobre el tema son las de MARIN y GÜELL (37.4) y ARNAL (37.5).

### EJEMPLO 37.4

Dado un pilar circular de 500 mm de diámetro, armado con 6 Ø 20 y recubrimiento de 25 mm, construido con hormigón H-30 y acero B 400S y sometido a un esfuerzo axial  $N_d = 1600$  kN, calcular el momento flector de cálculo que puede resistir.  $\gamma_c = 1,50$ ,  $\gamma_s = 1,15$ .

*Solución*

$$\frac{d'}{d_e} = \frac{35}{500} = 0,07$$

Manejamos el ábaco GT-110, correspondiente a  $\frac{d'}{d_e} = 0,10$

$$f_{cd} = \frac{300}{1,5} = 20 \text{ MPa}$$

$$v = \frac{1600 \cdot 10^3}{20 \pi \frac{500^2}{4}} = 0,41$$

$$\omega = \frac{655,304}{20 \cdot \pi \frac{500^2}{4}} = 0,17$$

Entrando en el ábaco GT-110, se obtiene:

$$\mu = 0,124 \quad M_d = 0,124 \cdot 20 \cdot \pi \frac{500^3}{4} = 243,4 \cdot 10^6 \text{ mmN} = 243,4 \text{ mkn}$$

### 37.2.7 EXCENTRICIDAD MÍNIMA

Rige lo expuesto en 35.2.4.

### 37.2.8 CUANTÍA MÍNIMA

Rige lo expuesto en 25.2.5 para compresión compuesta. Para flexión compuesta rige lo expuesto en 36.1.6.1<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Esta regla, establecida por EHE, es en general conservadora, ya que la zona de tracción en este caso puede ser mucho menor que en flexión simple. Recuérdese que en pilares rige la cuantía mínima del 4‰ en todo caso.

### 37.2.9 CUANTÍA MÁXIMA

Generalizando lo dicho en 35.2.6, las armaduras  $A_{s1}$  y  $A_{s2}$  de cada cara deben cumplir la condición:

$$A_{s1} f_{yd} \leq 0,5 f_{cd} A_c \quad [37.18]$$

$$A_{s2} f_{yd} \leq 0,5 f_{cd} A_c \quad [37.19]$$

En rigor, las condiciones [37.18] y [37.19] sólo son exigidas por EHE para el caso de compresión simple o compuesta. Sin embargo, representan un límite razonable para evitar la excesiva congestión de armaduras y una alta sensibilidad al fuego, tal como expusimos en 35.2.6, y es aconsejable mantenerlas también para flexión compuesta. En 35.2.6 se indicaron las limitaciones del MODEL CODE 90 y del EUROCÓDIGO EC-2.

### 37.2.10 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS VARIAS

Rigen las mismas expuestas en 35.2.7 para el caso de piezas comprimidas.

## 37.3 PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

El planteamiento es análogo a lo visto en 37.2, pero debe recordarse que en la ecuación de equilibrio la relación tensión-deformación, para las armaduras activas en el diagrama de cálculo (figura 37-6), las deformaciones  $\epsilon_1$  (alargamientos) o  $\epsilon_2$  (acortamientos) deben llevarse a partir del alargamiento  $\epsilon_{pr}$  de la armadura. El alargamiento  $\epsilon_{pr}$  debe ser calculado de acuerdo con la edad considerada de la pieza.

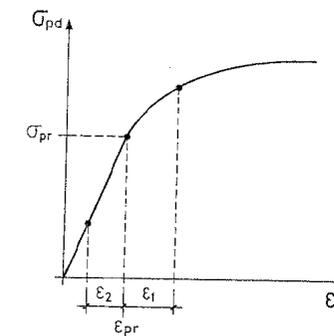


Figura 37-6

El cálculo manual es muy penoso, por lo que se impone el tratamiento informático.

## BIBLIOGRAFÍA

- (37.1) MORÁN CABRÉ, F. "Design of reinforced concrete sections under normal loads and stresses in the ultimate limit state". Bulletin d'Information du C.E.B. n° 83. Abril 1972.
- (37.2) CEB/FIP. "Manual on Bending and Compression". Construction Press, 1982.
- (37.3) CALAVERA, J.; VERDE, A.; BLANCO, F. "Ábacos para el dimensionamiento óptimo de secciones de hormigón armado sometidas a flexocompresión". INTEMAC. 2ª reimpresión. Septiembre 1979.
- (37.4) MARIN, J.; GÜELL, A. "Manual para el cálculo de columnas de concreto armado". FUNVISIS. Caracas. 1984.
- (37.5) ARNAL, E. "Manual para el cálculo de elementos de concreto armado". SIDETUR. Caracas. 1988.

## CAPÍTULO 38

### FLEXIÓN ESVIADA. FLEXIÓN Y COMPRESIÓN COMPUESTAS ESVIADAS

#### 38.1 INTRODUCCIÓN

En los Capítulos 36 y 37 estudiamos la flexión simple y la flexión y compresión compuestas, en la hipótesis de que la pieza poseía un plano de simetría en el que actuaban los esfuerzos y respecto al cual era simétrica la distribución de armaduras.

El caso de flexión esviada y los de flexión y compresión compuestas esviadas corresponden a situaciones en que lo anterior no se cumple, bien porque tal plano de simetría no existe (fig. 38-1a)), bien porque, existiendo, la distribución de armaduras no es simétrica respecto a él (fig. 38-1b)) o bien porque, existiendo el plano de simetría y siendo la distribución de armaduras simétrica respecto a él, la sollicitación no actúa en dicho plano (fig. 38-1c)).

En el caso de flexión esviada, las formas de agotamiento son las mismas indicadas en 36.1. En el caso de flexión y compresión compuesta esviada, las formas de agotamiento son las expuestas en 37.1.

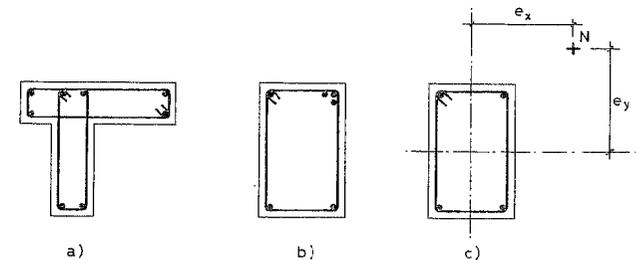


Figura 38-1

## 38.2 FLEXIÓN ESVIADA EN PIEZAS ARMADAS

### 38.2.1 PLANTEAMIENTO GENERAL

El planteamiento general es análogo a lo visto en el Capítulo 36. Con las notaciones de la figura 38-2 y adoptado un sistema de ejes de referencia  $OX$ ,  $OY$ , supongamos la posición de la fibra neutra definida por su abscisa al origen,  $x_0$ , y el ángulo  $\alpha$  con el eje  $OX$ .

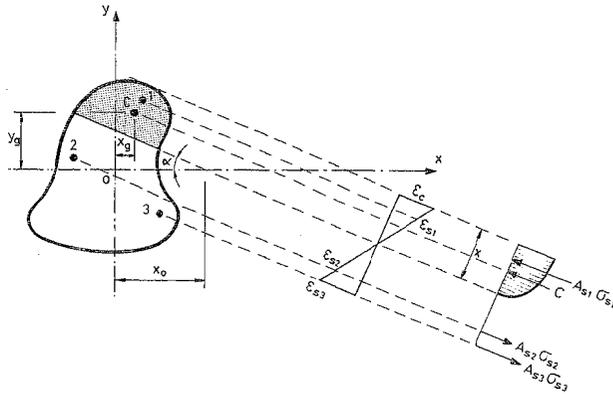


Figura 38-2

Las condiciones de equilibrio conducen a lo siguiente:

*Equilibrio de fuerzas*

$$C + A_{s1}\sigma_{s1} - A_{s2}\sigma_{s2} - A_{s3}\sigma_{s3} = 0 \quad [38.1]$$

*Equilibrio de momentos respecto a OY.* (Llamamos  $x_i$ ,  $y_i$  las coordenadas de cada armadura).

$$Cx_g + A_{s1}\sigma_{s1}x_1 + A_{s2}\sigma_{s2}x_2 - A_{s3}\sigma_{s3}x_3 = M_{y,d} \quad [38.2]$$

*Equilibrio de momentos respecto a OX*

$$Cy_g + A_{s1}\sigma_{s1}y_1 - A_{s2}\sigma_{s2}y_2 + A_{s3}\sigma_{s3}y_3 = M_{x,d} \quad [38.3]$$

El planteamiento manual para determinar  $x_0$  y  $\alpha$  puede exigir tal número de tanteos que es prácticamente imposible y el problema sólo puede ser abordado con ordenador.

Para secciones de forma rectangular existen métodos que se indican a continuación.

### 38.2.2 ÁBACOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE SECCIONES RECTANGULARES

Pueden mediante un ordenador, construirse para una posición determinada de armaduras y diversas cuantías, las curvas de interacción de una sección dada, que adoptan la forma genérica indicada en la figura 38-3.

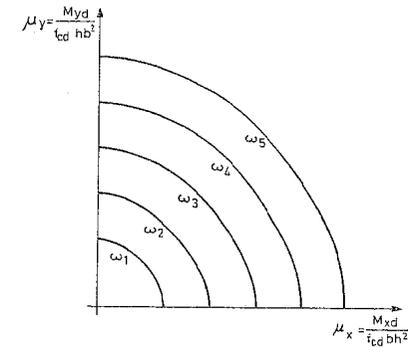


Figura 38-3

Los ábacos GT-111 a GT-130 contienen tales curvas para secciones rectangulares con las disposiciones de armaduras concentradas o repartidas de acuerdo con los esquemas de la figura 38-4. (De la serie indicada, son válidos los ábacos con  $\nu = 0$ . Ver 38.3.2).

En el caso de los esquemas a), b) y c), los números  $n$  indican barras sueltas o grupos de barras en contacto, de acuerdo con las indicaciones que, para el empleo de grupos, se dan en el Capítulo 51.

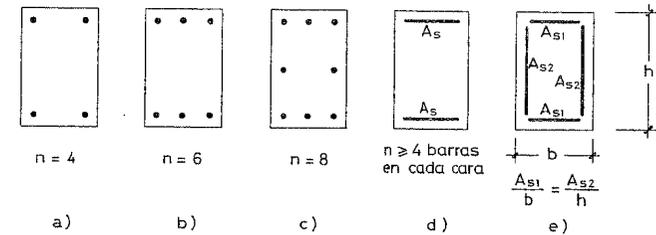


Figura 38-4

Todos los casos indicados corresponden a disposiciones simétricas de armaduras y cubren ampliamente el campo de la práctica habitual. Un caso especial lo constituye el de dimensionamiento de una sección rectangular con armaduras en las cuatro esquinas, siendo esas armaduras de diferente área, de forma que el dimensionamiento sea óptimo, que ha sido resuelto por F. MORÁN (38.1).

### 38.3 FLEXIÓN Y COMPRESIÓN COMPUESTA ESVIADAS EN PIEZAS ARMADAS

#### 38.3.1 PLANTEAMIENTO GENERAL

El planteamiento general es análogo a lo visto en el Capítulo 37. con las notaciones de la figura 38-5, adoptando un sistema de ejes de referencia y siendo  $e_x$ ,  $e_y$ , las excentricidades del esfuerzo axial  $N_d$ , supongamos la posición de la fibra neutra definida por su abscisa al origen  $x_0$  y el ángulo  $\alpha$  con el eje  $OX$ .

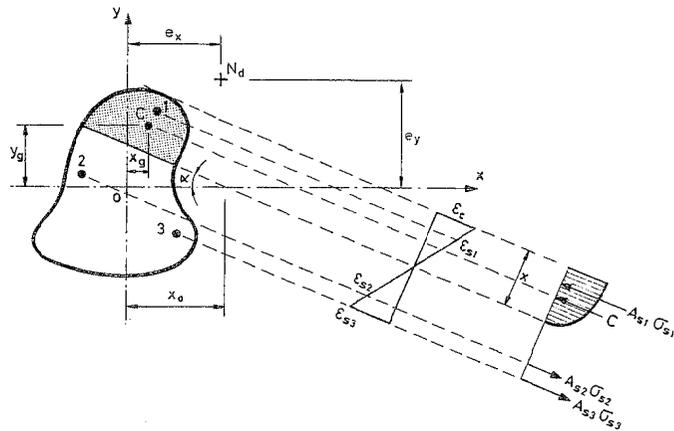


Figura 38-5

Las condiciones de equilibrio conducen a lo siguiente:

*Equilibrio de fuerzas*

$$N_d + C + A_{s1}\sigma_{s1} - A_{s2}\sigma_{s2} - A_{s3}\sigma_{s3} = 0 \quad [38.4]$$

*Equilibrio de momentos respecto a OY.* (Llamamos  $x_i$ ,  $y_i$  las coordenadas de cada armadura).

$$N_d e_x + C x_g + A_{s1}\sigma_{s1} x_1 + A_{s2}\sigma_{s2} x_2 - A_{s3}\sigma_{s3} x_3 = 0 \quad [38.5]$$

*Equilibrio de momentos respecto a OX*

$$N_d e_y + C y_g + A_{s1}\sigma_{s1} y_1 - A_{s2}\sigma_{s2} y_2 + A_{s3}\sigma_{s3} y_3 = 0 \quad [38.6]$$

Análogamente a como dijimos en 38.2.1, la resolución manual es prácticamente imposible por el gran número de tanteos que exige y el problema sólo puede ser abordado con ordenador.

Para secciones de forma rectangular, existen métodos que se exponen a continuación.

#### 38.3.2 ÁBACOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE SECCIONES RECTANGULARES ARMADAS

Con la ayuda de un ordenador, pueden construirse, para una sección dada, con una posición prefijada de armaduras, las superficies de interacción de acuerdo con las cuantías. Estas superficies, estudiadas inicialmente por FURLONG (38.2), adoptan la forma genérica indicada en la figura 38-6.

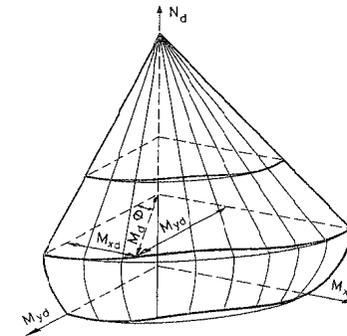


Figura 38-6

Cortando la superficie correspondiente a cada cuantía por planos perpendiculares al eje  $v$ , se obtienen curvas de interacción  $(\mu_x, \mu_y)$  para  $v$  constante.

Los gráficos GT-111 a GT-130 contienen tales curvas para secciones rectangulares con las mismas distribuciones de armaduras indicadas en la figura 38-4.<sup>1</sup>

Se recuerda que, en el caso de los esquemas a), b) y c) de la figura 38-4, los números  $n$  indican barras sueltas o grupos de barras en contacto, de acuerdo con lo que para el empleo de grupos se dice en el Capítulo 44.

#### 38.3.3 MÉTODO SIMPLIFICADO DE LA INSTRUCCIÓN EHE PARA PIEZAS ARMADAS (ANEJO N° 8)

El método es aplicable solamente a secciones rectangulares con armaduras iguales en las cuatro esquinas o en las cuatro caras. Este método es debido a P. JIMÉNEZ MONTOYA y reduce la flexión esviada a flexión recta, quedando del

<sup>1</sup> Existen numerosas colecciones de ábacos análogos. Entre las de países anglosajones destacan las de WEBER (38.3) y ROW y PAULAY (38.4). En España, las del Prontuario de TETRACERO (38.5) y las de JIMÉNEZ MONTOYA, GARCÍA MESEGUER y MORÁN (38.6). El CEB incluye también una colección en el Manual "Bending and Compression" (38.7).

lado de la seguridad. Para ello (fig. 38-7)<sup>1</sup> se constituye el esfuerzo axial de cálculo  $N_d$ , actuando con excentricidades  $e_x, e_y$ , por el mismo esfuerzo con  $e_x = 0$  y una excentricidad ficticia  $e'_y$ , cuyo valor es:

$$e'_y = e_y + \beta e_x \frac{h}{b} \quad [38.7]$$

con

$$\frac{e_y}{e_x} \geq \frac{h}{b} \quad [38.8]$$

(Si [38.8] no se cumple, se intercambian las notaciones  $b$  y  $h$ ).

El valor de  $\beta$  es función de  $v = \frac{N_d}{f_{cd}bh}$  y viene dado por la Tabla T-38.1.

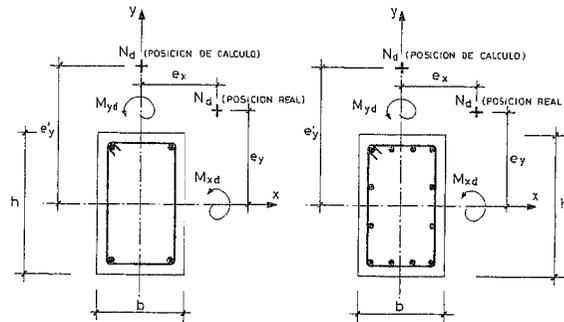


Figura 38-7

En el caso de comprobación, al ser conocido el valor de  $\omega$ , el valor de  $\beta$  es también conocido. En el caso de dimensionamiento, al desconocerse  $\omega$ , lo mejor es entrar con los valores de  $\beta$  correspondientes a  $0,2 \leq \omega \leq 0,6$  y, si  $\omega > 0,6$ , u  $\omega < 0,2$ , pasar a usar el valor de  $\beta$  correspondiente.

<sup>1</sup> Obsérvese que se denominan  $M_{xd}, M_{yd}$  los momentos de cálculo que tienen como ejes de giro los OX y OY respectivamente. Con esta notación,  $M_{xd}$  origina flexión en el plano OY y  $M_{yd}$  en el plano OX. Por tanto

$$e_y = \frac{M_{xd}}{N_d} \quad e_x = \frac{M_{yd}}{N_d}$$

TABLA T-38.1  
VALORES DE  $\beta$

$v = \frac{N_d}{f_{cd}bh}$ $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd}bh}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\geq 1,0$
$\omega > 0,6$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6
$0,2 \leq \omega \leq 0,6$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,5
$\omega < 0,2$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,7	0,6	0,6	0,4	0,4	0,4

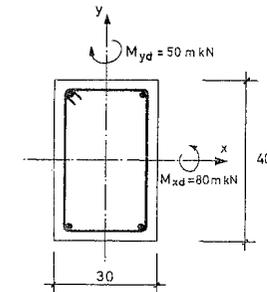


Figura 38-8

### EJEMPLO 38.1

Se considera una pieza de sección 300·400 mm construida con hormigón H-30 y acero B400S y sometida a esfuerzos  $N_d = 800$  kN,  $M_{yd} = 50$  m kN,  $M_{xd} = 80$  m kN (fig. 38-8). Se desea armar la pieza con cuatro barras y  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ .

*Solución*

$$f_{cd} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ MPa}$$

$$v = \frac{800 \cdot 10^3}{20 \cdot 300 \cdot 400} = 0,33$$

$$\mu_{xd} = \frac{80 \cdot 10^6}{20 \cdot 300 \cdot 400^2} = 0,083$$

$$\mu_{yd} = \frac{50 \cdot 10^6}{20 \cdot 400 \cdot 300^2} = 0,07$$

Para  $v = 0,50$ , interpolaremos entre los gráficos GT-121 ( $v = 0,20$  y  $v = 0,40$ ). (Suponemos  $d' = 0,10 h$ ).

Para  $v = 0,20$ , se obtiene  $\omega = 0,10$ .

Para  $v = 0,40$ , se obtiene  $\omega = 0,08$ .

Interpolando,  $\omega = 0,09$ .

$$U_s = 0,09 \cdot 20 \cdot 300 \cdot 400 = 216.000 \text{ N} = 216 \text{ kN}$$

$$U_s = 4 \phi 16$$

### EJEMPLO 38.2

Resolvamos el Ejemplo 38.1 por el método simplificado de EHE.

$$e_y = \frac{80}{800} = 0,10 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{50}{800} = 0,06 \text{ m}$$

Suponiendo  $\omega < 0,2$  para  $v = 0,3$  la tabla de  $\beta = 0,9$ .

$$e_y = 0,10 + 0,7 \cdot 0,06 \cdot \frac{400}{300} = 0,17 \text{ m}$$

El problema se reduce a flexión compuesta con:

$$N_d = 800 \text{ kN}$$

$$M_d = 800 \cdot 0,17 = 136 \text{ m kN}$$

Utilizando el ábaco GT-103, para

$$v = 0,33$$

$$\mu = \frac{136 \cdot 10^6}{20 \cdot 300 \cdot 400^2} = 0,14$$

se obtiene  $\omega = 0,10 \rightarrow 4 \phi 16$ .

### 38.4 CUANTÍAS MÍNIMAS

Rige lo establecido en 37.7 para flexión esviada y en 36.7 para flexión o compresión compuesta esviadas.

### 38.5 CUANTÍAS MÁXIMAS

Rige lo establecido en 36.8 para flexión esviada y en 37.8 para flexión o compresión compuesta esviadas.

## 38.6 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS

Para pilares en flexión esviada rigen las disposiciones constructivas indicadas en 37.11.

### 38.7 PIEZAS PRETENSADAS

El planteamiento es análogo a lo visto en 37.2, pero debe recordarse que en las ecuaciones de equilibrio la relación tensión-deformación para las armaduras activas en el diagrama de cálculo (fig. 38-9) las deformaciones  $\epsilon_1$  (alargamientos) ó  $\epsilon_2$  (acortamientos) deben llevarse a partir del alargamiento  $\epsilon_{pr}$  de la armadura. El alargamiento  $\epsilon_{pr}$  debe ser calculado de acuerdo con la edad considerada de la pieza.

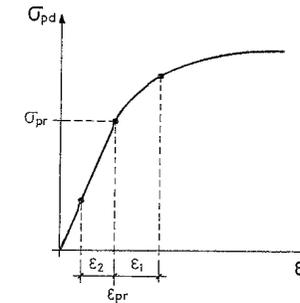


Figura 38-9

El cálculo manual es muy penoso por lo que se impone el tratamiento informático.

### BIBLIOGRAFÍA

- (38.1) MORAN, F.: "Design of Reinforced Concrete Sections under Normal Loads and Stresses in the Ultimate Limit State". CEB Bulletin d'Information n° 83. Avril 1972.
- (38.2) FURLONG, R.W.: "Ultimate Strength of Square Columns under Biaxially Escentric Loads". Journal ACI. March 1961.
- (38.3) WEBER, D.C.: "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending". Journal ACI. November 1966.
- (38.4) ROW, D.G.; PAULAY, T.: "Biaxial Flexure and Axial Load Interaction in Short Rectangular Reinforced Concrete columns". Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering. September 1973.
- (38.5) TETRACERO, S.A. "Prontuario General de Hormigón Armado". Madrid. 1974.
- (38.6) JIMÉNEZ MONTOYA, P.; GARCÍA MESEGUER, A.; MORÁN CABRÉ, F.: "Hormigón Armado". 11 Edición. Gustavo Gili. Madrid. 1981.
- (38.7) CEB/FIP. "Manual on Bending and Compression". Construction Press. London 1982.

## CAPÍTULO 39

### ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE ESFUERZO CORTANTE

#### 39.1 INTRODUCCIÓN

Los temas expuestos en los capítulos, 34, 35, 36, 37 y 38 correspondientes a tracción, compresión, flexión simple, flexión compuesta y flexión esviada, analizan temas de hormigón estructural sobre los cuales nuestros conocimientos pueden considerarse bastante satisfactorios. Los temas que siguen, desde el presente capítulo hasta el capítulo 48, corresponden a temas sobre los cuales nuestro conocimiento es mucho más imperfecto. Esta imperfección no viene de una insuficiencia de investigación teórica o experimental, que ambas han sido amplias también en todos estos campos, sino de la extraordinaria complejidad de los fenómenos que contemplan.

#### 39.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO

Los estados límites a considerar en esta clase de piezas, en cuanto a esfuerzo cortante, se indican en la figura 39-1, en la que se ha aislado un trozo de pieza entre dos fisuras de corte consecutivas.

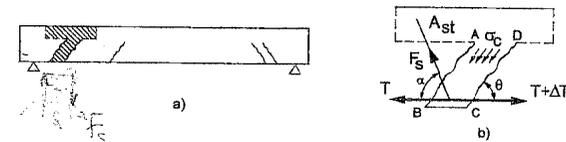


Figura 39-1

En el trozo  $ABCD$  de la pieza de hormigón, están en equilibrio el incremento  $\Delta T$  de tracción de la armadura; la fuerza  $F_s$  en la armadura de corte y la resultante de las

*Ru. [illegible]*

tensiones  $\sigma_c$  de compresión en la biela de hormigón situada entre dos fisuras consecutivas. El ángulo  $\alpha$  de la armadura de corte es una decisión de proyecto. El ángulo  $\theta$  de las fisuras es variable según los criterios que veremos a continuación y con frecuencia se acepta  $\theta = 45^\circ$  para hormigón armado.

Los estados límites de esfuerzo cortante serán, por tanto:

- Agotamiento de la armadura transversal  $A_{st}$ .
- Fallo de anclaje de la armadura transversal  $A_{st}$  en la cabeza comprimida.
- Ancho excesivo de las fisuras de corte.
- Fallo por compresión del hormigón de la biela bajo la acción de las tensiones  $\sigma_c$ .

En la figura 39-2 se indica un esquema general de la fisuración de aviso por cortante.

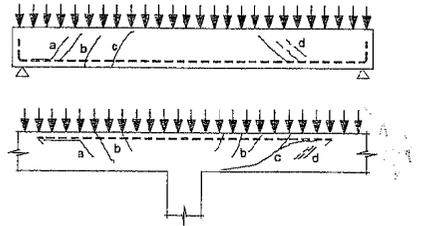


Figura 39-2

- a) Fisuras por fallo del anclaje, que a continuación se incurva.
- b) Fisuras de corte por excesiva tracción principal en el hormigón.
- c) Fisuras producidas por la combinación del esfuerzo cortante con el momento flector. (Fisuras de corte-flexión).
- d) Fisuras más finas y paralelas debidas a compresiones  $\sigma_c$  excesivas en la biela. Este tipo de fisuras es casi exclusivo de secciones  $T$ ,  $I$  y  $\pi$  muy esbeltas. Es más frecuente en prefabricación que en estructuras ejecutadas "in situ".

### 39.2.1 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES CORTANTES EN UNA SECCIÓN DE HORMIGÓN ARMADO

Como introducción al tema del esfuerzo cortante, comenzaremos estudiando la distribución de tensiones cortantes en una sección de hormigón armado en diversas hipótesis de comportamiento de la misma. Estas hipótesis están presentes, en distintas zonas de la pieza, a través del proceso de carga de la misma.

#### 39.2.1.1 Sección no fisurada con relación lineal entre tensiones y deformaciones

Consideremos una pieza sometida a flexión simple, cuya sección se indica en la figura 39-3 a). Se supone que las tensiones son suficientemente moderadas como para

no rebasar la resistencia a flexotracción del hormigón y que la relación entre tensiones y deformaciones es lineal, tal como se indica en la rebanada A-A' (fig. 39-3 b)).

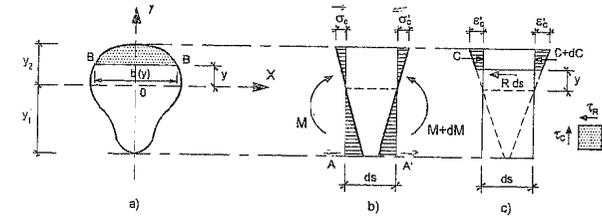


Figura 39-3

Asociando a la sección un sistema de ejes  $x, y$  con centro en el c.d.g.  $O$  de la sección, la expresión de la tensión en un punto cualquiera de la cara A-A, de ordenada  $y$  y de acuerdo con la ley de NAVIER viene dada por la expresión

$$\sigma_c = \frac{M \cdot y}{I} \quad [39.1]$$

donde:

$M$  = Momento flector actuante en la sección.

$y$  = ordenada del punto considerado.

$I$  = Momento de inercia de la sección.

Análogamente, para un punto de la cara A'-A', en la que el momento es  $M + dM$

$$\sigma'_c = \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \quad [39.2]$$

La fuerza total cortante en el plano B-B (fig. 39-3 a)) viene dada por la diferencia de volúmenes de tensiones de compresión,  $C$  y  $C + dC$ , sobre ambas caras.

Siendo  $b(y)$  la función que expresa el ancho  $b$  en función de  $y$ , se tiene

$$C = \int_y^{y_2} \frac{M \cdot y}{I} b(y) dy \quad C + dC = \int_y^{y_2} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} b(y) dy$$

y por tanto,

$$dC = \int_y^{y_2} \frac{dM}{I} y b(y) dy = R \cdot ds \quad [39.3]$$

donde  $R$  es la fuerza total cortante por unidad de longitud en el sentido de la directriz de la pieza.

De [39.3]

$$R = \frac{1}{I} \frac{dM}{ds} \int_y^{y_2} y b(y) dy \quad [39.4]$$

y como  $\frac{dM}{ds} = V$  y  $\int_y^{y_2} y b(y) dy = S(y)$  es el momento estático de la parte de sección situada por encima de la fibra considerada respecto a  $OX$ , se tiene

$$R = \frac{V}{I} S(y) \quad [39.5]$$

Del equilibrio del cubo diferencial indicado en la figura 39-3 c) se deduce  $\tau_R = \tau_c$  y de [39.5] se deriva, que el valor máximo de la fuerza total cortante corresponde al máximo de  $S(y)$ , es decir, a la fibra que pasa por el centro de gravedad de la sección.

La tensión tangencial  $\tau_c$  en  $BB$ , se obtiene de [39.5]

$$\tau_c = \frac{V S(y)}{b(y) I} \quad [39.6]$$

Obsérvese que el máximo de  $\tau_c$  ocurre en la fibra en que sea máximo el valor de  $\frac{S(y)}{b(y)}$ , la cual en general no coincide con la que pasa por el c.d.g. de la sección. Sí resulta cierto para secciones en las que  $b$  es constante. La experiencia muestra que para todas las secciones habitualmente usadas, el máximo de  $\tau_c$  en este estado de pieza no fisurada es sensiblemente igual al valor de  $\tau_c$  en el c.d.g. de la sección.

La fuerza total de compresión  $F$  viene dada por

$$F = \int_0^{y_2} \sigma_c b(y) dy = \int_0^{y_2} \frac{My}{I} b(y) dy = \frac{M}{I} \int_0^{y_2} b(y) y dy$$

o lo que es lo mismo

$$F = \frac{M}{I} S(o) \quad [39.7]$$

donde  $S(o)$  es el momento estático de la zona comprimida, respecto a la fibra neutra,  $OX$ .

De [39.7]

$$\frac{I}{S(o)} = \frac{M}{F} = z \quad [39.8]$$

siendo  $z$  el brazo mecánico.

Por lo tanto, la fuerza cortante máxima vale

$$R_{max} = \frac{V}{z} \quad [39.9]$$

y la tensión tangencial en la fibra neutra

$$\tau(o) = \frac{V}{b(o) z} \quad [39.10]$$

siendo  $b(o)$  el ancho de la sección de dicha fibra.

En la figura 39-4, se indica la distribución de fuerzas totales cortantes y de tensiones tangenciales para una sección rectangular.

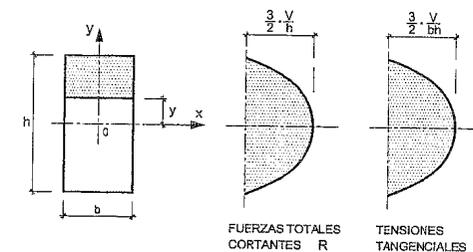


Figura 39-4

Tanto las fuerzas totales como las tensiones tangenciales presentan en este caso distribuciones parabólicas, con máximos en la fibra media.

En la figura 39-5 se indican las mismas distribuciones para una sección en I.

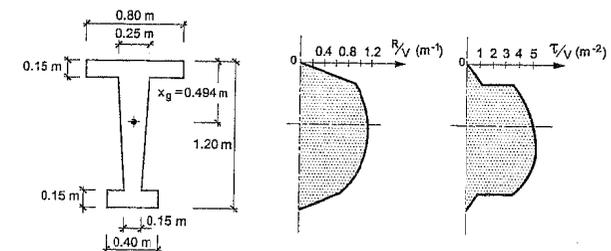


Figura 39-5

Las fórmulas [39.1] y [39.6] permiten conocer en cada punto  $A$  de la pieza la tensión normal  $\sigma_x$ , paralela a la directriz de la pieza, y la tensión tangencial  $\tau_c$ . Un

elemento diferencial de viga se encuentra sometido a las tensiones indicadas en la figura 39-6, en la que  $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| = \tau_c$ .

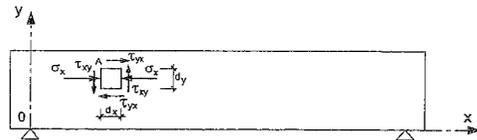


Figura 39-6

De acuerdo con las fórmulas clásicas de la Teoría de la Elasticidad<sup>1</sup> y considerando como valores positivos de las tensiones normales y tangenciales ( $\sigma_x$  y  $\tau$ ) los que, en la cara frontal, coinciden con el signo positivo del eje correspondiente, se obtienen las tensiones principales.

Tensión principal de compresión<sup>2</sup>

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad [39.11]$$

Tensión principal de tracción<sup>2</sup>

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad [39.12]$$

y el ángulo de  $\sigma_I$  con  $OX$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad [39.13]$$

con lo cual se pueden dibujar las tensiones principales en la (fig. 39-7).

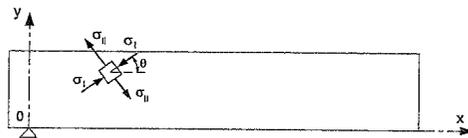


Figura 39-7

<sup>1</sup> Ver, por ejemplo, E. TORROJA (39.1).

<sup>2</sup>  $\tau_{xy}$  es el valor de la tensión tangencial en la cara frontal.

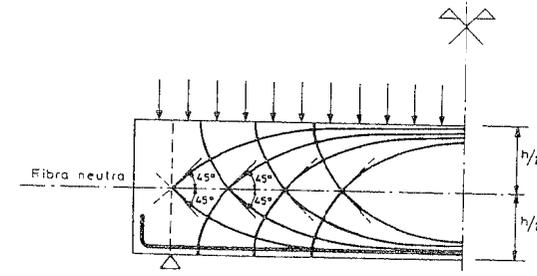


Figura 39-8

Las envolventes de las tensiones principales constituyen la red de isostáticas de la pieza. En la figura 39-8 se indican dichas redes de isostáticas, para una viga rectangular simplemente apoyada y sometida a una carga uniforme (39.2).

Para  $y = 0$ ,  $\sigma_x = 0$ , y de acuerdo con [39.11], [39.12] y [39.13]

$$\sigma_I = -\tau_{xy} \quad [39.14]$$

$$\sigma_{II} = \tau_{xy} \quad [39.15]$$

$$\theta = 45^\circ \quad [39.16]$$

es decir, a nivel del c.d.g., las tensiones principales son iguales a la tangencial y forman  $45^\circ$  con la directriz<sup>1</sup>.

### 39.2.1.2 SECCIÓN FISURADA CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

Consideremos de nuevo la sección de pieza indicada en la figura 39-3, pero supongamos ahora fisurada toda la zona de hormigón sometida a tracción (fig. 39-9).

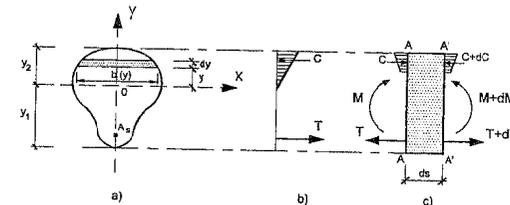


Figura 39-9

<sup>1</sup> Recuérdese que lo anteriormente expuesto para las tensiones principales se deduce a partir, exclusivamente, de consideraciones de equilibrio y es independiente de la ley tensiones-deformaciones que el material presente, es decir, es válido para la sección en estado elástico o plástico, lineal o no lineal, etc.

La posición de la fibra neutra  $OX$  se obtiene, según vimos en el capítulo 36, igualando el momento estático del área comprimida al de la armadura de tracción homogeneizada con  $m = \frac{E_s}{E_c}$ .

De nuevo la tensión  $\sigma_c$  en la fibra de ordenada  $y$  de la cara A-A de la rebanada viene dada por

$$\sigma_c = \frac{M \cdot y}{I_f} \quad [39.17]$$

donde  $I_f$  es el momento de inercia de la sección fisurada homogeneizada, respecto del eje  $OX$ .

Análogamente, para la ordenada  $y$  de la cara A'-A' de la rebanada

$$\sigma'_c = \frac{(M + dM) y}{I_f} \quad [39.18]$$

y la fuerza total cortante viene dada por la diferencia de los volúmenes de compresión sobre el área situada por encima de la ordenada  $y$

$$dC = \int_y^{y_2} \frac{dM}{I_f} b(y) y dy \quad [39.19]$$

y llamando  $R$  a la fuerza total cortante por unidad de longitud

$$R ds = \frac{dM}{I_f} S_f(y) \quad [39.20]$$

donde  $S_f(y)$  es el momento estático del área comprimida respecto al eje  $OX$  que pasa por el c.d.g. de la sección fisurada homogeneizada. De [39.20] se obtiene

$$R = \frac{dM}{ds} \frac{S_f(y)}{I_f}$$

o bien

$$R = V \frac{S_f(y)}{I_f} \quad [39.21]$$

La fuerza total cortante alcanza su máximo para  $y = 0$ , es decir, a nivel del c.d.g., donde es máximo  $S_f(y)$ .

La tensión tangencial, igual a la rasante, de [39.21] resulta

$$\tau_c = \frac{V S_f(y)}{b(y) I_f} \quad [39.22]$$

El momento estático  $S_f(y)$  alcanza su valor máximo  $S_f(0)$  para  $y = 0$  y para  $y < 0$ ; es decir, por debajo de la fibra neutra permanece constante e igual a  $S_f(0)$ , con lo que  $R = Cte$ .

La fuerza total de compresión  $F$ , igual a la de tracción de la armadura, vale

$$F = \int_0^{y_2} \frac{M}{I_f} y b(y) dy = \frac{M}{I_f} \int_0^{y_2} b(y) y dy = \frac{M}{I_f} S(0)$$

donde  $S(0)$  es el momento estático del área comprimida respecto a la fibra neutra. De ello

$$\frac{M}{F} = z = \frac{I_f}{S(0)} \quad [39.23]$$

y por lo tanto la fuerza cortante máxima vale

$$R_{max} = \frac{V}{z}$$

y la tensión cortante a nivel del c.d.g. resulta:

$$\tau_{c,max} = \frac{V}{b_o z} \quad [39.24]$$

donde  $b_o$  es el ancho de la sección a dicho nivel.

La figura 39-10 refleja la distribución de fuerzas totales cortantes y de tensiones tangenciales para la sección de la figura 39-4 con  $b = 400$  mm,  $h = 1.200$  mm, armada con 4  $\phi 25$ .

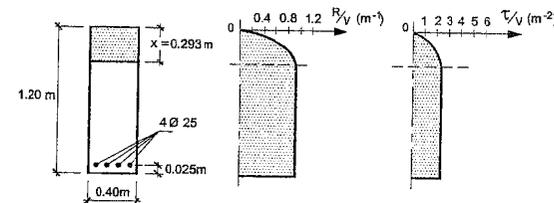


Figura 39-10

Análogamente, la figura 39-11 contiene las mismas distribuciones para la sección de la figura 39-5, armada con 4  $\phi 25$ . Obsérvese que el máximo de  $\tau$  ocurre en posición claramente diferente de la del c.d.g. y su valor es apreciablemente mayor.

Como en toda la zona por debajo de la fibra neutra, incluida ésta,  $\sigma_x = 0$ , de [39.11], [39.12] y [39.13] resulta.

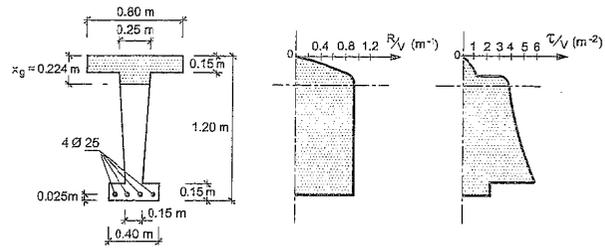


Figura 39-11

$$\sigma_I = -\tau_{xy} \quad [39.25]$$

$$\sigma_{II} = \tau_{xy} \quad [39.26]$$

$$\theta = 45^\circ \quad [39.27]$$

es decir, en la fibra neutra y por debajo de ella, las tensiones principales son iguales a la tangencial y forman  $45^\circ$  con la directriz. El hormigón está, por tanto, en esa zona, en un estado de corte puro.

En la figura 39-12 se indica la red de isostáticas para una pieza de sección rectangular, fisurada (39.2).

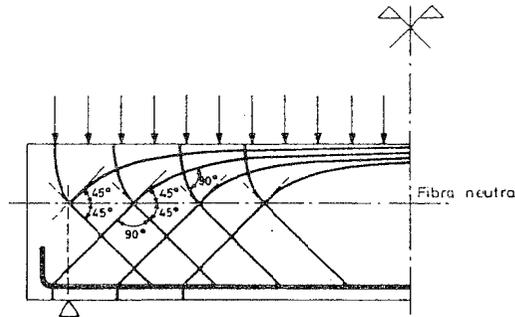


Figura 39-12

### 39.2.1.3 Sección fisurada con relación no lineal entre tensiones y deformaciones

Los casos vistos en los apartados anteriores corresponden a las distribuciones de tensiones tangenciales en zonas de débiles momentos flectores. Si el momento es importante, no sólo la sección estará fisurada, sino que la relación entre tensiones y deformaciones no será lineal, estará representada mejor por un diagrama parabólico o parábola-rectángulo. De acuerdo con la figura 39-13

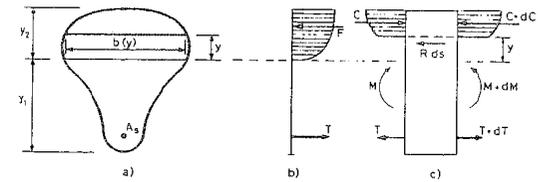


Figura 39-13

$$R ds = dC$$

$$R = \frac{dC}{ds} \quad [39.28]$$

Sin embargo, la expresión [39.28] no puede ser calculada, ya que adoptar para ello el diagrama parábola-rectángulo o cualquier otro de carácter general sería ilusorio. La razón es que dichos diagramas han sido admitidos para elaborar un modelo de comportamiento válido para los casos de flexión, pero no tienen validez para un análisis como el que nos ocupa<sup>1</sup>. Ello se ve con especial claridad en la rebanada indicada en la figura 39-14, cuyos volúmenes de compresiones están formados por los diagramas parábola-rectángulo, cuyos tramos rectangulares son AB y A'B'. Para un valor de y situado por encima de A

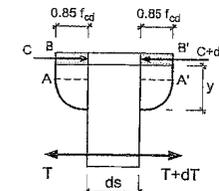


Figura 39-14

$$C = C + dC$$

$$dC = 0 \quad [39.29]$$

y de ello se deduciría

$$R = \frac{dC}{ds} = 0 \quad [39.30]$$

cosa imposible si  $V \neq 0$ , ya que, en ese caso, al aumentar M, debe ser  $dC \neq 0$ .

- 1 En concreto, el diagrama parábola-rectángulo no ha sido establecido para "restar" zonas de su área, pues evidentemente no tiene precisión para ello.
- 2 La situación real sería, sin embargo, de R muy pequeño.

En sentido estricto y con los conocimientos actuales, no es posible conocer la distribución de  $R$ , ni por tanto de  $\tau$ , en estado límite último, para puntos por encima de la fibra neutra<sup>1</sup>.

Para la fibra neutra o para fibras situadas por debajo de ella, la situación es la indicada en la figura 39-15, y puede escribirse

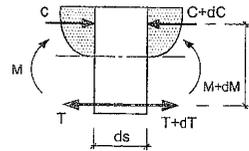


Figura 39-15

$$R ds = dC \quad [39.31]$$

o bien

$$R = \frac{dC}{ds} = \frac{\frac{dM}{z}}{ds} = \frac{1}{z} \frac{dM}{ds}$$

es decir

$$R = \frac{V}{z}$$

El valor de  $R$  resulta, pues, constante por debajo de la fibra neutra.

La tensión tangencial, por debajo de dicha fibra, viene dada por

$$\tau_c = \frac{V}{b(y) z} \quad [39.32]$$

Para el caso particular de sección rectangular

$$\tau_c = \frac{V}{b z} \quad [39.33]$$

Es frecuente aceptar  $z = 0,9 d$ .

### EJEMPLO 39.1

Dada una viga simplemente apoyada de sección rectangular de 200 x 500 mm, con 4 m de luz y carga total característica  $p = 15 \text{ kN/m}$ , calcular, en estado límite

<sup>1</sup> Una discusión detallada puede verse en J. CALAVERA (39.3).

último, la tensión de corte a la mitad del canto total, en la sección situada a 1,50 m de un apoyo.  $\gamma_f = 1,4$ ,  $\gamma_c = 1,5$ . Hormigón H-25.

Solución:

Se estima  $d \approx 470 \text{ mm}$

$$p_d = 1,4 \cdot 15 = 21 \text{ kN/m}$$

$$M_d = 2 \cdot 21 \cdot 1,5 - \frac{21 \cdot 1,5^2}{2} = 39,4 \text{ m kN}$$

$$f_{cd} = 16,7 \text{ MPa} \quad \mu = \frac{39,4 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 200 \cdot 470^2} = 0,053$$

Entrando en el ábaco GT-72 se obtiene  $x \approx 38 \text{ mm}$ .

Por tanto, el punto en que se desea conocer  $\tau_d$ , está por debajo de la fibra neutra en el agotamiento, y puede aplicarse la fórmula [39.33]

$$\tau_d = \frac{V_d}{b z}$$

y con  $z \approx 0,9 d \approx 420 \text{ mm}$

$$V_d = 21 \cdot 10^{-2} \cdot 200 - 21 \cdot 10^{-2} \cdot 150 = 10,5 \text{ kN}$$

$$\tau_d = \frac{10,5 \cdot 10^3}{200 \cdot 420} = 0,13 \text{ MPa}$$

### 39.2.2 FORMAS DE RESISTENCIA DE LA PIEZA A ESFUERZO CORTANTE

De la expresión general del esfuerzo cortante en una sección

$$V = \frac{dM}{ds} \quad [39.34]$$

haciendo  $M = T \cdot z$  [39.35]

donde  $T$  es la fuerza de tracción en la armadura y  $z$  el brazo mecánico, se puede plantear

$$V = \frac{d(Tz)}{ds} = \frac{dT}{ds} z + \frac{dz}{ds} T \quad [39.36]$$

El tratamiento clásico (39.4) es suponer  $\frac{dz}{ds} = 0$ , es decir, que el brazo mecánico es constante a lo largo de la rebanada de espesor diferencial,  $ds^1$ .

### 39.2.2.1 EFECTO VIGA

Si en [39.36] consideramos sólo el sumando  $\frac{dT}{ds}z$ , éste representa lo que se llama "efecto-viga", situación en que el incremento de momento flector de una sección a la infinitamente próxima se realiza mediante un incremento de tracción de la armadura obtenido a través de las tensiones de adherencia entre el hormigón y el acero deducido, suponiendo constante el brazo mecánico. El valor  $\frac{dT}{ds}$  es la "fuerza de adherencia por unidad de longitud", como veremos en el capítulo 43<sup>2</sup>. Este tratamiento es el clásico y el único hoy disponible con carácter general y parte de sustituir [39.36] por

$$V = \frac{dT}{ds}z \quad [39.37]$$

es decir, se acepta que el esfuerzo cortante es resistido íntegramente por "efecto-viga"<sup>3</sup>.

### 39.2.2.2 EFECTO ARCO

Si suponemos destruida la adherencia en el intervalo  $ds$ , entre las dos caras de la rebanada, el incremento de momento flector no puede ser proporcionado por un incremento de la tracción de la armadura, puesto que  $\frac{dT}{ds} = 0$ . Manteniendo constante la fuerza  $T$ , el incremento del momento ha de producirse mediante un aumento del brazo mecánico  $z$ .

Volviendo a la ecuación [39.36], con  $\frac{dT}{ds} = 0$ , toma la forma

$$V = \frac{dz}{ds}T \quad [39.38]$$

- Existen teorías que no parten de esta simplificación y estudian simultáneamente la acción del esfuerzo cortante y del momento flector. Aunque no han alcanzado un desarrollo suficiente, deben destacarse los primeros trabajos sobre este tema, que fueron, en España los de A. PAEZ y J. LÓPEZ JAMAR, y en Bélgica el de A. PADUART.
- Es también la fuerza total cortante  $R$ , que definimos anteriormente.
- Todas las investigaciones experimentales concuerdan en demostrar que el "efecto-viga" proporciona una parte importante de la resistencia a corte, pero que dista mucho de la totalidad (39.4), (39.5), (39.6).

y corresponde al caso en que el esfuerzo cortante es resistido por "efecto-arco". Este nombre viene del fenómeno indicado en la figura 39-16, en la cual, una vez destruida la adherencia entre la armadura y el hormigón y producido el deslizamiento entre ambos, la viga funciona como un arco (zona sombreada), cuyo tirante es la armadura, con tensión constante en toda la luz. Por supuesto, un funcionamiento de este tipo solicita fuertemente a los anclajes extremos de la armadura.

El "efecto-arco" suministra una parte apreciable de la resistencia a esfuerzo cortante, como veremos en lo que sigue.

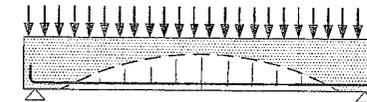


Figura 39-16

### EJEMPLO 39.2

Se da la viga de celosía de la figura 39-17 que es la celosía equivalente de una viga de hormigón de 5 m de luz, de 200 mm de ancho de sección y 500 mm de canto efectivo, con hormigón H-25 y acero B400 S.

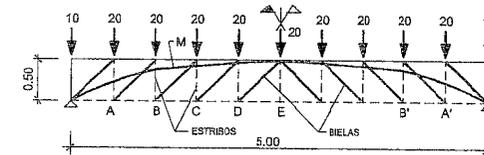


Figura 39-17

La carga por ml es de 40 kN/m. Convencionalmente se consideran estribos a 500 mm. El equilibrio en rotura supone que bajo la acción de las cargas, la cabeza comprimida, la armadura de tracción y los estribos se agotan. El planteamiento es de base determinista con  $\gamma_f = \gamma_c = \gamma_s = 1$  y  $f_{cd} = f_{ck}$ ;  $f_{yd} = f_{yk}$ .

El momento máximo resulta de 125 mkn a lo que corresponde una profundidad  $y_k$  de bloque de resistencia 25 MPa

$$200 \cdot y \cdot 0,85 \cdot 25 \left( 500 - \frac{y}{2} \right) = 125 \cdot 10^6$$

$$y = 63 \text{ mm}$$

y de ello

$$A_s = \frac{125 \cdot 10^6}{\left( 500 - \frac{y}{2} \right) 400} = 667 \text{ mm}^2$$

Esta armadura es la correspondiente a toda la luz, es decir se conserva constante de extremo a extremo de la viga.

Para el estribo A, el cortante vale  $90 - 20 = 70$  kN y por tanto  $A_s = \frac{70.000}{400} = 175$  mm<sup>2</sup>. Se han dimensionado análogamente los estribos B, C y D.

Se considera un arco como el M con la misma sección que la cabeza comprimida, pasando por los apoyos y siendo antifunicular de las cargas.

Mediante un programa informático se han calculado las fuerzas en cordón comprimido, arco, estribos y bielas comprimidas<sup>1</sup>. (Las bielas se han considerado con su ancho físico de 350 mm y con  $f_{ck} = 0,6 \cdot 25 = 15$  MPa).

Para visualizar los mecanismos de resistencia a corte, se han analizado las hipótesis siguientes:

**ESTADO INICIAL DE REFERENCIA.** Las resistencias del hormigón y el límite elástico del acero, son los característicos. Las fuerzas son las indicadas en la figura 39-18 a) en kN. La viga está por tanto en estado crítico, a punto de alcanzar la plastificación del hormigón y del acero. Obsérvese la nada despreciable influencia del efecto arco.

**HIPÓTESIS 1. PLASTIFICACIÓN DE LOS ESTRIBOS EN EL 90% DE  $f_{yk}$ .** Se ha reducido el límite elástico del acero de los estribos a la décima parte del límite elástico característico. Los resultados se indican en la figura 39-18 b).

Obsérvese la fuerte reducción del “efecto viga” con una gran reducción de fuerzas en estribos y bielas y un fuerte incremento del “efecto arco”, con transferencia del cordón comprimido al arco y rotura de la adherencia de la armadura de tracción, que ha uniformado notablemente sus fuerzas a lo largo de la luz, como corresponde a un tirante.

**HIPÓTESIS 2. PLASTIFICACIÓN DE LOS ESTRIBOS EN EL 99% DE  $f_{yk}$ .** El planteamiento es análogo al del caso anterior, pero ahora se reduce al 1% el valor del límite elástico del acero de los estribos.

Obsérvese la práctica desaparición del “efecto viga” y cómo el “efecto arco” resiste las cargas. La armadura de tracción está a tensión prácticamente igual a lo largo de toda la luz (fig. 39-18 c)).

**HIPÓTESIS 3. PLASTIFICACIÓN DEL HORMIGÓN DEL CORDÓN COMPRIMIDO Y DEL ARCO, EN EL 90%.** Manteniendo el acero en el valor característico de su límite elástico, se reduce a la décima parte el módulo de deformación del hormigón en cordón comprimido y arco, manteniendo el del hormigón de las bielas.

Se produce una transferencia apreciable de esfuerzos del cordón comprimido al arco, se reducen moderadamente las fuerzas en estribos y bielas y se uniforman moderadamente las tracciones en la armadura de flexión (fig. 39-18 d)).

**HIPÓTESIS 4. PLASTIFICACIÓN DEL HORMIGÓN DEL CORDÓN COMPRIMIDO Y DEL ARCO EN EL 99%.** El caso es análogo al anterior pero reduciendo a la centésima parte el módulo de deformación del hormigón en cordón comprimido y del arco, pero manteniendo el de las bielas.

<sup>1</sup> Debo agradecer al Prof. R. Alvarez Cabal, de la División de Control de Proyecto de INTEMAC, la elaboración del programa citado.

Como puede verse las conclusiones son, algo acentuadas, análogas al caso de la Hipótesis 3 (fig. 39-18 e)).

**HIPÓTESIS 5. PLASTIFICACIÓN DEL HORMIGÓN DE LAS BIELAS EN EL 90%.** Manteniendo al acero en su valor característico y también los de los hormigones de cordón y arco, se reduce al 10% el módulo de deformación del hormigón de las bielas.

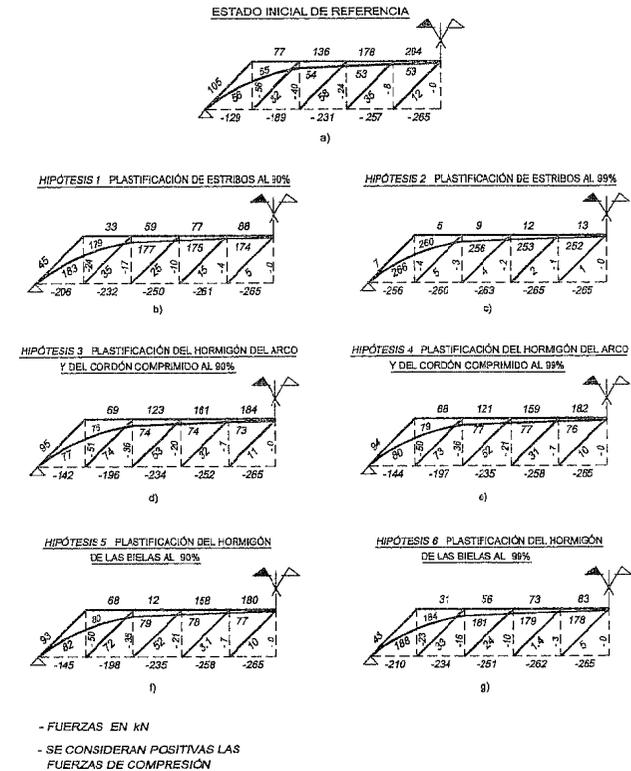


Figura 39-18

Se produce una moderada transferencia del cordón comprimido al arco, una reducción moderada de las fuerzas en las bielas y en los estribos y una pequeña igualación de fuerzas a lo largo de la armadura de tracción (fig. 39-18 f)).

**HIPÓTESIS 6. PLASTIFICACIÓN DEL HORMIGÓN DE LAS BIELAS EN EL 99%.** Se produce una intensificación importante con transferencia casi completa de las compresiones al arco, fuerte reducción de esfuerzos en estribos y bielas y gran igualación de tensiones en la armadura de tracción (fig. 39-18 g)).

## RESUMEN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Como puede verse, la plastificación del hormigón de la cabeza comprimida conduce a una escasa redistribución de fuerzas en la plastificación (Hipótesis 3 y 4).

En cambio la plastificación de los estribos (Hipótesis 1 y 2) conduce a una fortísima redistribución, reduciendo drásticamente el "efecto viga".

La plastificación de las bielas también conduce a una fuerte redistribución.

En la Tabla T-39.0, se recoge, para las siete hipótesis analizadas, el reparto del funcionamiento de la pieza entre el "efecto viga" y el "efecto arco". (Los porcentajes se han calculado como el valor medio de las fracciones de las cargas de 20 kN que son resistidas, en cada caso, por el "efecto viga" y por el "efecto arco").

Tabla T-39.0

HIPÓTESIS	FENÓMENO REPRESENTADO	% REPRESENTADO POR EL "EFECTO VIGA"	% REPRESENTADO POR "EL EFECTO ARCO"
-	Estado inicial de referencia	81	19
1	Plastificación de estribos en el 90%	37	63
2	Idem en el 99%	0	100
3	Plastificación del hormigón de cordón comprimido y arco en el 90%	73	27
4	Idem en el 99%	73	27
5	Plastificación del hormigón de las bielas en el 90%	72	28
6	Idem en el 99%	0	100

Creemos que el ejemplo visualiza bien los mecanismos de resistencia al corte para vigas sometidas a carga uniformemente repartida.

Obsérvese que la plastificación de estribos o bielas conduce a una uniformación de tensiones en la armadura de tracción. En el ejemplo, como esta es constante, ello no origina ningún problema. Tampoco lo ocasionarían en el caso de una viga isostática pretensada con armadura pretesa, ya que ésta es constante en toda la luz.

Sin embargo, **debe prestarse gran atención** al hecho de que la plastificación de estribos o bielas en vigas ordinarias, en las que se reduce la armadura de tracción al acercarse a los apoyos, aun siendo debida a una falta de capacidad a corte, puede conducir secundariamente a fallos de anclaje de las armaduras de tracción cortadas antes de los apoyos<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> De hecho, en los ensayos reales en laboratorio, el fallo secundario de anclaje es con frecuencia, en estos casos, el único síntoma visible.

## 39.2.3 VARIACIONES DE TENSIÓN DE LAS ARMADURAS LONGITUDINALES Y DE LA FUERZA DE COMPRESIÓN EN EL HORMIGÓN DEBIDAS A LA FISURACIÓN POR ESFUERZO CORTANTE

### 39.2.3.1 MÉTODO DE ASIMILACIÓN A LA CELOSÍA

#### a) Variaciones en las armaduras de tracción y compresión

Con independencia del análisis específico que expondremos a continuación, es posible una demostración directa de las variaciones de tensión de las armaduras producidas por la fisuración de las piezas por esfuerzo cortante, armadas con armadura de corte. Basta partir de la analogía de Ritter-Mörsch, correspondiente a una celosía tipo PRAT con montantes verticales y diagonales a 45° y generalizarla a una celosía tipo WARREN con diagonales comprimidas formando un ángulo  $\theta$  con los cordones y diagonales traccionadas formando un ángulo  $\alpha$  con dichos cordones (fig. 39-19). La asimilación corresponde a la de un medio continuo, en el que las diagonales comprimidas sustituyen a las bielas de hormigón y las traccionadas a la armadura de corte. (Se desprecia en lo que sigue la resistencia a corte del hormigón).

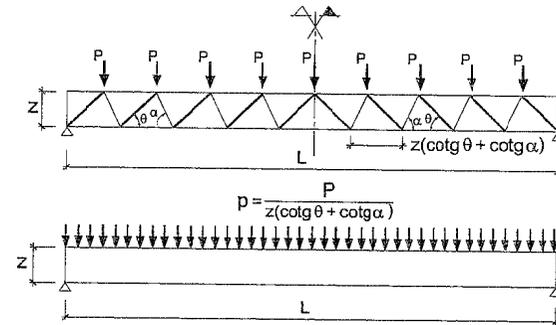


Figura 39-19

Si consideramos un segmento de la viga, tal como el indicado en la figura 39-20, podemos para un nudo 2 del cordón de tracción, calcular las fuerzas de tracción  $T_{1-2}$  y  $T_{2-3}$ .

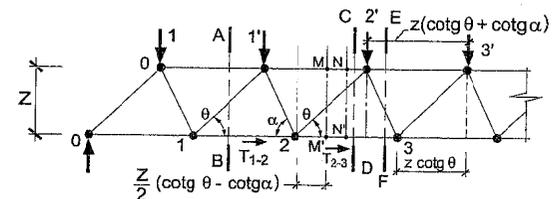


Figura 39-20

Dando el corte  $AB$  y tomando momentos en el nudo 1',

$$T_{1-2} z = M_1,$$

donde  $M_1$  es el momento flector de la viga en la sección que pasa por el nudo 1'. Análogamente

$$T_{2-3} z = M_2,$$

y por tanto el valor medio de la fuerza de tracción en el nudo 2 será

$$T_2 = \frac{1}{2}(T_{1-2} + T_{2-3}) = \frac{1}{2} \frac{M_1 + M_2}{z}$$

$\frac{M_1 + M_2}{2}$  es el momento flector en el punto medio  $M$  de 1'-2' y por lo tanto la tracción en el nudo 2, no corresponde al momento flector en esa sección, sino al de otra avanzada una distancia  $\overline{2-M}$ , en el sentido en el que aumenta el momento flector

$$\overline{2-M} = \frac{z (\cotg \theta + \cotg \alpha)}{2} - z \cotg \alpha$$

y expresando  $\overline{2-M}$  como un valor  $k_1 z$ , se tiene:

$$k_1 z = \frac{z}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \quad [39.39]$$

Correlativamente, si calculamos la fuerza media del cordón superior de compresión en el nudo 2', mediante el corte  $C-D$  y tomando momentos en el nudo 2, obtenemos

$$C_{1-2'} = \frac{M_2}{z}$$

y análogamente

$$C_{2'-3} = \frac{M_3}{z}$$

de donde

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2 + M_3}{z}$$

Como  $\frac{M_2 + M_3}{2}$  es el momento en el punto medio  $N'$  de 2-3 por lo tanto la fuerza de compresión en 2', no corresponde al momento flector en esa sección sino a otra retrasada una distancia  $\overline{2'-N}$  en el sentido en que decrece el momento flector

$$\overline{2'-N} = \frac{z (\cotg \theta + \cotg \alpha)}{2} - z \cotg \alpha$$

y expresando esta longitud como  $k_c z$ , resulta

$$k_c z = \frac{z}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha)$$

$$k_c = \frac{1}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \quad [39.40]$$

Es decir, que los desplazamientos en ambos cordones son iguales pero de sentido contrario.

#### b) Variaciones en la armadura de corte y en las bielas comprimidas

Si  $F$  es la fuerza en la armadura de corte representada por la diagonal 2'-3, dando el corte  $EF$  y proyectando sobre la normal a la directriz, se tiene

$$F \sen \alpha = V_3,$$

$$\text{o bien } F = \frac{V_3}{\sen \alpha} \quad [39.41]$$

Obsérvese que por lo tanto en toda la longitud  $\overline{2'-3}$ , la tensión en la armadura de corte es la correspondiente al esfuerzo cortante en la sección en 3', distante de la 3,  $z \cotg \theta$  y no al correspondiente a la sección en 2'.

Análogamente, llamando  $C$  a la compresión en la biela 2-2' y proyectando sobre la normal a la directriz

$$C \sen \theta = V_2.$$

$$C = \frac{V_2}{\sen \theta} \quad [39.42]$$

Por lo tanto la compresión en la biela en toda la longitud 2-2' es la correspondiente al esfuerzo cortante en la sección en 2' y no a la sección en 2.

### 39.2.3.2 MÉTODO DE ANÁLISIS DIRECTO

#### 39.2.3.2.1 INCREMENTO DE TENSIÓN EN LA ARMADURA DE TRACCIÓN

##### a) Pieza sin fisurar

Supongamos una pieza (fig. 39-21) sometida a un conjunto de cargas de cálculo  $P_d$  y en la que no se ha producido ninguna fisura<sup>1</sup>.

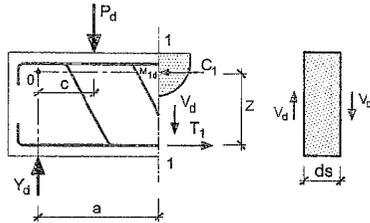


Figura 39-21

Tomando momentos respecto al punto  $O$ , intersección de la normal a la directriz por el apoyo y de la línea de actuación de la resultante de compresiones en el hormigón y en la armadura comprimida, se tiene:

$$T_1 z - V_d a - P_d c = 0$$

$$T_1 z = V_d a + P_d c \quad [39.43]$$

Como  $V_d = Y_d - P_d$

$$M_{1d} = T_1 z = Y_d a - P_d (a - c) \quad [39.44]$$

siendo  $M_{1d}$  el momento flector de la sección 1-1. Es decir, que la tracción en la armadura en la sección 1-1 corresponde al momento actuante en esa sección.

##### b) Pieza fisurada, sin armadura de corte

Supongamos ahora que en la pieza se produce una grieta pasando por el punto  $A$  y consideremos la pieza sin armadura de corte (fig. 39-22).

Al formarse la fisura, la tensión ortogonal a su dirección en un punto de la misma es nula y en sentido paralelo será  $\sigma_{CI}$ .

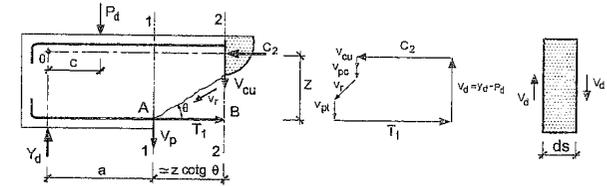


Figura 39-22

$$\text{De [39.12], } \sigma_{CI} = 0 \text{ y por tanto } \frac{\sigma_x}{2} = -\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

luego la tensión de compresión paralela a la fisura será

$$\sigma_{CI} = -2 \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

y como a lo largo de toda la fisura  $\sigma_x = 0$ , se tiene:

$$\sigma_{CI} = \tau_{xy} = 2 \tau_c$$

es decir

$$\sigma_{CI} = 2 \frac{V}{b z} \quad [39.45]$$

que es la tensión de compresión  $\sigma_C$  en la biela cuando no hay armadura de corte (fig. 39-1)

La resistencia a corte de la pieza sin armadura transversal será la suma vectorial de los sumandos siguientes:

$C_2$  = Resultante del bloque de compresiones y de la armadura comprimida en la sección 2-2.

$V_{cu}$  = Resistencia a corte de la zona comprimida.

$V_{pc}$  = Efecto de pasador (resistencia transversal) de la armadura comprimida.

$V_r$  = Rozamiento entre los labios de la grieta<sup>1</sup>.

$V_{pt}$  = Efecto de pasador (resistencia transversal) de la armadura de tracción

$T_1$  = Esfuerzo de tracción en la armadura en la sección 1-1.

1  $P_d$  es la expresión genérica de todas las cargas, concentradas y repartidas, actuantes en la parte de pieza considerada.

2 En esta expresión,  $V_d$  representa la componente dorsal del esfuerzo cortante en la rebanada elemental de la figura, que es en este caso positiva, y negativa la de la cara frontal. Para el equilibrio del trozo de viga aislado, empleamos la componente sobre la cara frontal, introduciendo los signos al tomar momentos, de acuerdo con la figura.

1 El término "rozamiento" es pobre para describir la complejidad del fenómeno. Un libro importante sobre el tema es el de WALRAVEN (39.7).

En el diagrama vectorial de la figura 39-22 puede observarse que la tracción en el punto 1 de la armadura no sólo es superior a la compresión  $C_1$  o tracción  $T_1$  en la sección 1-1, sino que incluso supera a la compresión  $C_2 > C_1$  de la sección 2-2. Es decir, que la tracción en 1 es incluso superior a la que ocurriría en la sección 2-2, de no haberse producido la grieta. Si como es usual se considera  $V_r = V_p = 0$ , la tracción en el punto 1 de la armadura iguala a la teóricamente existente en la sección 2-2, si no se hubiera fisurado la pieza<sup>1</sup>.

Esta última conclusión puede deducirse también tomando momentos en la figura 39-22 respecto a  $O$  y suponiendo  $V_r = V_p = 0$  y  $AB \approx z \cotg \theta$ <sup>2</sup>.

$$T_1 z - V_{cu} (a + z \cotg \theta) - P_d c = 0$$

$$T_1 z = V_{cu} (a + z \cotg \theta) + P_d c$$

y como  $V_d = V_{cu} = Y_d - P_d$

$$T_1 z = (Y_d - P_d) (a + z \cotg \theta) + P_d c$$

$$T_1 z = Y_d (a + z \cotg \theta) - P_d (a + z \cotg \theta - c) = M_{2d}$$

luego

$$T_1 = \frac{M_{2d}}{z} \quad [39.46]$$

Puede observarse que  $T_1 z = M_{1d} + V_d \cdot z \cdot \cotg \theta$

es decir que el incremento de tracción de la armadura por la fisuración debida al esfuerzo cortante, vale

$$\Delta T = V_d \cotg \theta \quad [39.47]$$

siendo  $V_d$  el esfuerzo cortante de cálculo de la sección 1-1.

La tracción en la armadura en la sección 1-1 corresponde al momento flector en la sección 2-2.

### c) Pieza fisurada, con armadura de corte

Supongamos ahora la pieza fisurada, con armadura transversal (fig. 39-23). El diagrama de equilibrio se indica en la figura.  $V_p$  y  $V_{su}$  son las fuerzas debidas al efecto

- 1 La no consideración expresa de  $V_r$  y  $V_p$  no significa que se desprecien sus influencias. En la práctica, las diversas Normas engloban su influencia en el valor que adoptan para  $V_{cu}$ .
- 2 La distancia entre las secciones 1 y 2 es exactamente  $(d - x) \cotg \theta$ , siendo  $x$  la profundidad del bloque de compresiones y oscila desde aproximadamente  $0,6 d \cotg \theta$ , hasta  $0,95 d \cotg \theta$ , según la cuantía. El valor  $z \cotg \theta$ , siendo  $z = 0,9 d$ , está suficientemente del lado de la seguridad para lo que sigue.

de pasador y a la tracción de la armadura de corte. El resto de las fuerzas es idéntico al considerado en el caso anterior. Supongamos también en este caso  $V_p$ ,  $V_{pr}$ ,  $V_{pc}$  y  $V_r$  englobados en  $V_{cu}$ .

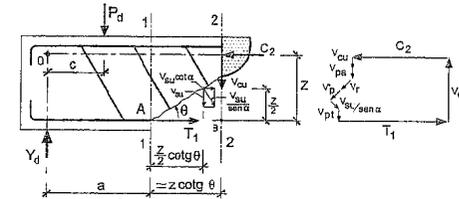


Figura 39-23

En la sección 2-2 actuará el cortante  $V_{cu}$  absorbido por el hormigón y reemplacemos el esfuerzo cortante  $V_{su}$  resistido por la armadura por una fuerza única situada a una distancia igual a  $\frac{z}{2}$  de la armadura de tracción. Tomando momentos respecto a  $O$ , se tiene:

$$T_1 z - V_{su} (a + \frac{z}{2} \cotg \theta) + V_{su} \frac{z}{2} \cotg \alpha - V_{cu} (a + z \cotg \theta) - P_d c = 0.$$

o bien

$$T_1 z = a (V_{su} + V_{cu}) + P_d c + V_{su} \frac{z}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) + V_{cu} z \cotg \theta$$

y considerando que  $V_{su} + V_{cu} = V_d$ <sup>1</sup>

$$T_1 z = a V_d + P_d c + \frac{z}{2} V_{su} (\cotg \theta - \cotg \alpha) + z V_{cu} \cotg \theta \quad [39.48]$$

y, teniendo en cuenta [39.43],

$$T_1 z = M_{1d} + z \left[ \frac{V_{su}}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) + V_{cu} \cotg \theta \right]$$

Si hacemos  $\frac{V_{su}}{V_d} = \lambda$

1 Se sobreentiende que  $V_{su}$  es el valor correspondiente a la armadura estrictamente necesaria.

$$T_1 z = M_{1d} + z V_d \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right]$$

Es decir, que el incremento de tracción en la armadura, debido a la fisuración por esfuerzo cortante es

$$\Delta T_1 = V_d \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right]$$

siendo  $V_d$  el esfuerzo cortante de cálculo en la sección 1-1

$$\text{y haciendo } \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) = k'_1$$

$$T_1 z = M_d = M_{1d} + V_d k'_1 z \quad [39.49]$$

$$\text{Como } V_d = Y_d - P_d$$

$$M_d = M_{1d} + (Y_d - P_d) k'_1 z$$

o bien, teniendo en cuenta [39.44],

$$M_d = Y_d a - P_d (a - c) + (Y_d - P_d) k'_1 z$$

$$M_d = Y_d (a + k'_1 z) - P_d (a + k'_1 z - c)$$

que, de acuerdo con la figura 39-24, es la expresión del momento flector en la sección distante  $k'_1 z$  de la sección 1-1 en el sentido en que crece el momento flector.

Por tanto, la tracción de la armadura en la sección 1-1 es la correspondiente a otra sección situada a la distancia  $k'_1 z = z \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right]$  en el sentido en que aumentan los momentos flectores.

Si en la expresión

$$k'_1 z = z \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right]$$

hacemos  $z = 0,9 d$ , se tiene:

$$k'_1 z = 0,9 d \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right] = k_1 d \quad [39.50]$$

que, al referirse al canto útil, resulta de empleo más cómodo.

Y de [39.49] el incremento de tracción de la armadura resulta

$$\Delta T_1 = k_1 V_d \quad [39.51]$$

Los valores de  $k_1$  para distintos valores de  $\alpha$  (ángulo de la armadura de corte con la directriz),  $\theta$  (ángulo de las fisuras con la directriz) y  $\lambda = \frac{V_{sn}}{V_d}$ , se indican en la tabla T-39.1. Como el valor de  $V_{sn}$  es el estrictamente necesario, es mejor en adelante, definir  $\lambda = \frac{V_d - V_{cu}}{V_d} < 1$ .

Como puede observarse, la traslación  $k_1 d$  es tanto más importante cuanto menos importante es el papel de la armadura de corte en la absorción del esfuerzo cortante total, cuanto más ortogonal sea la armadura de corte a la directriz y cuanto más tendida sea la fisuración.

Debe atenderse a que la conclusión de lo expuesto es que *la armadura que debe disponerse en una sección de una pieza sometida a flexión simple es la correspondiente a la sección distante  $k_1 d$  de la anterior, en el sentido en que crece el momento flector*. La regla simplificada de trasladar, a estos efectos, la longitud  $k_1 d$  del diagrama de momentos flectores no es correcta más que si la pieza es de sección constante. Si, por ejemplo, consideramos una viga de ancho variable, pueden ocurrir los cuatro casos siguientes, en los que la fisura atraviesa el plano del cambio de sección.

d) Momentos positivos

d-1) Sección que se reduce al aumentar el momento flector (fig. 39-24)

La armadura en 1-1 es la correspondiente a  $M_2$  aplicado a la sección 1. La regla de trasladar  $k_1 d$  del diagrama de momentos, al conducir<sup>2</sup> a una sección de hormigón

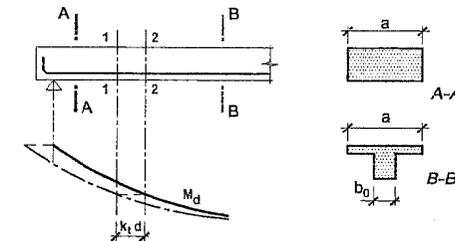
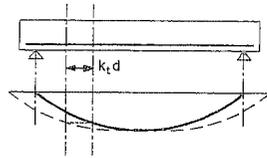


Figura 39-24

- 1 Obviamente,  $\lambda = 1$  significa  $V_{sn} = V_d$  lo cual es un caso límite con  $V_{cu} = 0$  que puede darse en flexión simple, solamente si la sección está sometida a un esfuerzo de tracción. Se ha introducido en las tablas, precisamente como valor *límite de*  $\lambda$ .
- 2 Si el bloque comprimido está en la tabla en la zona nervada, ambas soluciones coinciden.

TABLA T-39.1  
 TRASLACIÓN  $k_t d$  DE LA LEY DE MOMENTOS  
 EN ARMADURAS DE TRACCIÓN  
 (En el sentido en que aumenta el momento flector)



$$k_t = 0,9 \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right]$$

Valores de  $k_t$

$\theta = 27^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	1,77	1,43	1,10	0,77	0,43
60°	1,77	1,48	1,19	0,91	0,62
90°	1,77	1,55	1,32	1,10	0,88
$\theta = 35^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	1,29	1,01	0,74	0,47	0,19
60°	1,29	1,06	0,83	0,61	0,38
90°	1,29	1,12	0,96	0,80	0,64
$\theta = 45^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	0,90	0,68	0,45	0,23	0,00
60°	0,90	0,72	0,55	0,37	0,19
90°	0,90	0,79	0,68	0,56	0,45
$\theta = 63^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	0,46	0,29	0,12	0,00	0,00
60°	0,46	0,34	0,21	0,09	0,00
90°	0,46	0,40	0,34	0,29	0,23

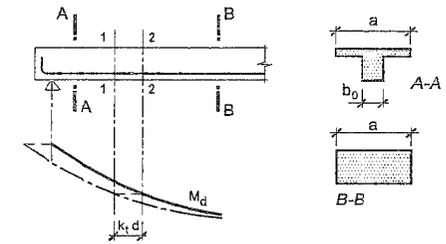


Figura 39-25

mayor, puede conducir a un  $z$  mayor y, por tanto, a menor armadura en 1-1 de la debida<sup>1</sup>.

d-2) Sección que aumenta al aumentar el momento flector (fig. 39-25)

La armadura en 1-1 es la correspondiente a  $M_2$  aplicado a la sección 1-1. La regla de trasladar el diagrama puede ser excesivamente segura.

e) Momentos negativos

e-1) Sección que se reduce al aumentar el momento flector (fig. 39-26)

La armadura en 1-1 debe ser la correspondiente a  $M_2$  actuando en 1-1. La regla de trasladar el diagrama puede no ser segura, pues la armadura resultante para la sección rectangular de ancho  $b$ , puede ser notablemente inferior a la correspondiente al ancho  $b_0$ .

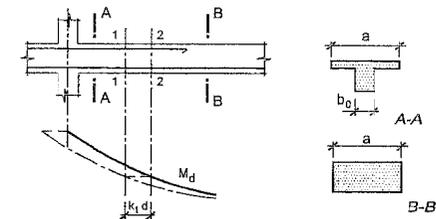


Figura 39-26

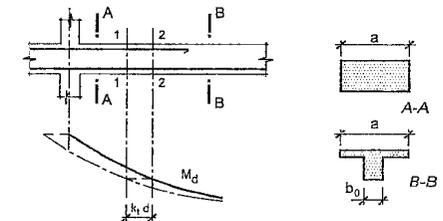


Figura 39-27

<sup>1</sup> Para pieza de ancho variable, las deducciones de  $k_t z$  realizadas anteriormente son sustancialmente válidas. No puede afirmarse lo mismo para variaciones de canto, aunque el error es pequeño.

e-2) Sección que aumenta al aumentar el momento flector (fig. 39-27)

La armadura en 1-1 debe ser la correspondiente a  $M_2$  actuando en 1-1. La regla de trasladar el diagrama puede ser excesivamente segura.

En definitiva, la regla de desplazar el diagrama, en el caso de secciones de ancho variable, sólo es segura cuando la sección disminuye en el mismo sentido que el momento flector.

### 39.2.3.2.2 DECREMENTO DE LA FUERZA DE COMPRESIÓN EN LA CABEZA COMPRIMIDA

Considerando la figura 39-23 y proyectando las fuerzas sobre la directriz de la pieza

$$T_1 + V_{su} \cotg \alpha - C_2 = 0$$

$$C_2 = T_1 + V_{su} \cotg \alpha$$

y como según vimos y haciendo  $V_{su} = \lambda V_d$

$$C_2 = \frac{M_{1d} + V_d k'_1 z}{z} + \lambda V_d \cotg \alpha$$

donde  $V_d$  es el esfuerzo cortante en la sección 1-1.

$$C_2 z = M_{1d} + V_d k'_1 z + \lambda V_d z \cotg \alpha$$

$$C_2 z = M_{1d} + z V_d (k'_1 + \lambda \cotg \alpha)$$

y sustituyendo  $k'_1$  de [39.50]

$$C_2 z = M_{1d} + z V_d \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \right]$$

y con  $V_d = Y_d - P_d$  y llamando  $k'_c = \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha)$  [39.52]

$$C_2 z = M_{1d} + k'_c z (Y_d - P_d) \quad [39.53]$$

o bien, sustituyendo [39.44]

$$C_2 z = Y_d a - P_d (a - c) + k'_c z (Y_d - P_d)$$

de donde

$$C_2 z = Y_d (a + k'_c z) - P_d (a - c + k'_c z)$$

Es decir, la compresión  $C_2$  en la sección 2-2, corresponde al momento en una sección avanzada  $k'_c z$  respecto a la 1-1, en el sentido en que crece el momento flector.

Lo anterior, puede expresarse más claramente si se calcula la distancia de retraso a partir de la sección 2-2, que vale  $k''_c z$ , donde

$$k''_c = \cotg \theta - k'$$

$$k''_c = \frac{\lambda}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha)$$

Es decir la fisuración debida al esfuerzo cortante, motiva el que la compresión en una sección 2-2, no sea la debida al momento en esa sección, sino en otra retrasada respecto a ella en una longitud  $k''_c z$  en el sentido en que se reduce el momento flector.

Si hacemos  $z = 0,9 d$ , la distancia de retraso vale  $k_c d$ , donde

$$k_c = 0,9 \frac{\lambda}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \quad [39.54]$$

Tomando momentos respecto a la sección retrasada  $k''_c z$  respecto a la 2-2 es inmediato ver que el decremento de compresión en la cabeza comprimida vale

$$0,9 k_c V_d$$

Los valores de  $k_c$  para distintos valores de  $\alpha$  y  $\theta$ , con  $\lambda = \frac{V_d - V_{cu}}{V_d} < 1$  se indican en la tabla T-39.2.

### 39.2.3.2.3 SECCIÓN A CONSIDERAR PARA EL CÁLCULO DE LA ARMADURA DE CORTE

Designando simbólicamente por  $P_1$  el conjunto de acciones exteriores que actúan desde el apoyo hasta la sección 1-1 y por  $P_2$  el que actúa entre las secciones 1-1 y 2-2, (fig. 39-28), se tiene:

$$Y_d - P_1 = -V_{d1}$$

$$Y_d - (P_1 + P_2) = -V_{d2} = -V_{cu} - V_{s1(1-2)}$$

por lo tanto  $V_{s1(1-2)} = V_{d2} - V_{cu}$

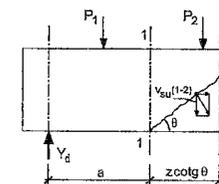
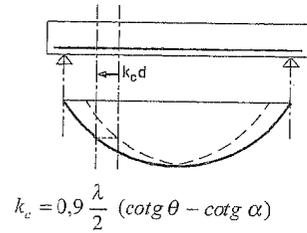


Figura 39-28

TABLA T-39.2  
 TRASLACIÓN DE LA LEY DE MOMENTOS  
 EN LA CABEZA COMPRIMIDA  
 (En el sentido en que disminuye el momento flector)



$$k_c = 0,9 \frac{\lambda}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha)$$

Valores de  $k_c$

$\theta = 27^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	0,00	0,11	0,22	0,32	0,43
60°	0,00	0,16	0,31	0,47	0,62
90°	0,00	0,22	0,44	0,66	0,88
$\theta = 35^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	0,00	0,05	0,10	0,14	0,19
60°	0,00	0,10	0,19	0,29	0,38
90°	0,00	0,16	0,32	0,48	0,64
$\theta = 45^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
60°	0,00	0,05	0,10	0,14	0,19
90°	0,00	0,11	0,23	0,34	0,45
$\theta = 63^\circ$					
$\alpha \backslash \lambda$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
45°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
60°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
90°	0,00	0,06	0,11	0,17	0,23

Es decir, la armadura de corte entre una sección 1-1, ha de calcularse en función del esfuerzo cortante en la sección 2-2, trasladada  $z \cotg \theta$  en el sentido en que se reduce el esfuerzo cortante.

#### 39.2.3.2.4 Sección a considerar para la comprobación de las bielas comprimidas

Tal como se indica en la figura 39-29, la resultante de las tensiones de compresión en la biela ha de estar en equilibrio con el incremento de tracción en la armadura y con la resultante de las tracciones de la armadura de corte. Por lo tanto, al igual que en ésta, las tensiones en la biela comprimida en la sección 1-1 (fig. 39-28) deben calcularse con el esfuerzo cortante en la sección 2-2 distante  $z \cotg \theta$  en el sentido en que reduce el esfuerzo cortante.

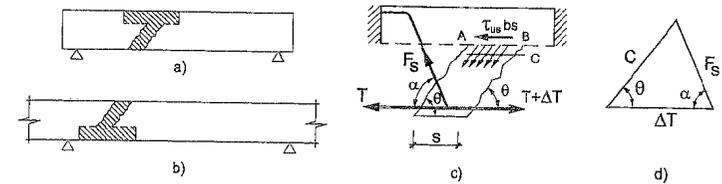


Figura 39-29

#### 39.2.4 REGLA DE COSIDO

La Instrucción EHE establece con carácter general, con la excepción de elementos lineales, losas y placas, que en todo elemento cualquier sección hipotética según un plano  $P$  (fig. 39-30), sobre la que las acciones producen tensiones tangenciales, debe ser atravesada por armaduras transversales de cosido, convenientemente ancladas a ambos lados del plano  $P$ , y tales que equilibren las tensiones tangenciales<sup>1</sup>.

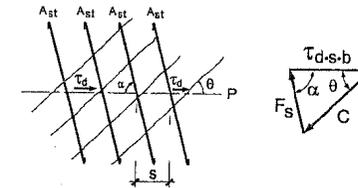


Figura 39-30

<sup>1</sup> Lo que sigue se refiere a secciones por el plano  $P$  en zonas monolíticas de la pieza. Si se trata de piezas compuestas, las tensiones en la superficie de contacto se estudian como esfuerzo rasante de acuerdo con el Capítulo 40.

Supongamos que la armadura está compuesta por barras de sección individual  $A_{st}^1$ , a separación  $s$  y con límite elástico de cálculo  $f_{y\alpha,d}$ . Supongamos también que en el agotamiento de la pieza la fisuración se produce con un ángulo  $\theta$  respecto al plano  $P$ .

En el agotamiento, el equilibrio se consigue mediante la actuación de las tres fuerzas indicadas en el diagrama de la figura 39-30. Considerando una longitud  $s$  en el sentido del plano  $P$ , y llamando  $b$  al ancho de la pieza en sentido perpendicular al plano de la figura, las tres fuerzas son:

$\tau_d s b$  = Resultante de las tensiones tangenciales de cálculo en la superficie  $bs$ .

$C$  = Resultante de las compresiones en las bielas entre fisuras, actuando sobre la superficie  $bs$  con inclinación  $\theta$ .

$F_s$  = Resultante de las tracciones en las armaduras que atraviesan la superficie  $bs$ .

De la figura 39-30, se deduce:

$$\frac{\tau_d s b}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{F_s}{\text{sen} \theta} \quad [39.55]$$

y haciendo  $F_s = A_{st} f_{y\alpha,d}$  y operando

$$\tau_d \leq \frac{A_{st}}{b s} f_{y\alpha,d} \text{sen} \alpha (\text{cotg} \alpha + \text{cotg} \theta) \quad [39.56]$$

En la fórmula anterior, si  $n$  armaduras se proyectan juntas sobre el plano de la figura, en [39.55] debe sustituirse  $A_{st}$  por  $n A_{st}$ .

Si existen distintas familias de armaduras con diferentes ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , con separación  $s_i$ , la fórmula [39.55] se generaliza inmediatamente.

$$\tau_d \leq \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_{st,i}}{b s_i} f_{y\alpha,d} \text{sen} \alpha_i (\text{cotg} \alpha + \text{cotg} \theta) \quad [39.57]$$

Las dos fórmulas anteriores permiten calcular el valor de  $\tau_d$  a partir de la armadura  $A_{st}$ , estrictamente necesaria, o bien calcular la sección de armadura necesaria a partir del valor de  $\tau_d$ .

Es útil a veces introducir en estas fórmulas la notación  $A_{sa} = \frac{A_{st}}{bs}$  como armadura por unidad de superficie, medida en el plano.

Para  $\theta = 45^\circ$ , como es usual en hormigón armado, [39.55] se transforma en:

$$\tau_d \leq \frac{A_{st}}{b s} f_{y\alpha,d} \text{sen} \alpha (1 + \text{cotg} \alpha) \quad [39.58]$$

1 Se denomina  $A_n$  al área del conjunto de barras que se proyectan juntas sobre la misma línea en la figura.

Si  $\alpha = 45^\circ$  (Barras dobladas)

$$\tau_d \leq \sqrt{2} \frac{A_{st}}{b s} f_{y\alpha,d} \quad [39.59]$$

Si  $\alpha = 90^\circ$  (Estribos)

$$\tau_d \leq \frac{A_{st}}{b s} f_{y\alpha,d} \quad [39.60]$$

Lo anterior indica que las barras dobladas son  $\sqrt{2}$  veces más eficaces que los estribos<sup>1</sup>, a igualdad de peso de acero empleado. Sin embargo, el alto grado de industrialización alcanzado en la fabricación de estribos modifica sustancialmente esta conclusión, desde el punto de vista del coste global de la armadura colocada. Ampliaremos el tema en 39.2.5.d).

EHE establece la limitación<sup>2</sup>

$$f_{y\alpha,d} \leq 400 \text{ N/mm}^2 \quad [39.61]$$

Obsérvese que la Regla de Cosido establece un condicionante conservador al no considerar colaboración alguna del hormigón.

Es necesario comprobar también la compresión del hormigón en las bielas entre fisuras. De la figura 39-30 se deduce

$$C = \text{sen} \alpha \frac{F_s}{\text{sen} \theta}$$

y de [39.55] se obtiene

$$C = \frac{\tau_d s b \text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

y como la tensión de compresión en la biela vale  $\sigma_c = \frac{C}{b s \text{sen} \theta}$ , se obtiene

$$\sigma_c = \frac{\tau_d}{\text{sen}^2 \theta (\text{cotg} \alpha + \text{cotg} \theta)} \quad [39.62]$$

Para evitar daños por microfisuración del hormigón (véase J. CALAVERA y otros (39.9)) se adopta la limitación  $\sigma_c \leq 0,6 f_{cd}$ , con lo que resulta

1 De hecho,  $\alpha = 45^\circ$  conduce al mínimo peso de acero en armadura transversal.

2 La razón, aunque discutible, es limitar el alargamiento de las armaduras de corte, especialmente por motivos de compatibilidad de deformaciones y de fisuración. La Norma ACI 318-95 (39.8) contiene una variación interesante, bien fundada experimentalmente, al permitir, cuando el esfuerzo cortante se resiste con mallas electrosoldadas, elevar el límite elástico de cálculo del acero a 500 N/mm<sup>2</sup>.

$$\tau_d \leq 0,6 f_{cd} \operatorname{sen}^2 \theta (\cotg \alpha + \cotg \theta) \quad [39.63]$$

Si existen varias familias de armaduras con secciones  $A_{st,i}$ , separaciones  $s_i$  y ángulos  $\alpha_i$  como no son conocidos los valores  $\tau_{di}$  correspondientes a cada familia, es mejor expresar  $\sigma_c$  en función de la armadura **estrictamente necesaria** para resistir la tensión tangencial  $\tau_d$ .

De la figura 39-30

$$\frac{C}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{F_s}{\operatorname{sen} \theta} \quad C = \frac{A_{st} f_{y\alpha,d} \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$y \quad \sigma_c = \frac{A_{st} f_{y\alpha,d} \operatorname{sen} \alpha_i}{b s_i \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Si existen  $n$  familias de ramas con área  $A_{st,i}$ , inclinación  $\alpha_i$  y separación  $s_i$ , cada rama origina una componente  $\sigma_{ci}$  de la tensión total de compresión

$$\sigma_{ci} = \frac{A_{st,i} f_{y\alpha,d} \operatorname{sen} \alpha_i}{b s_i \operatorname{sen}^2 \theta}$$

y sumando

$$\sigma_c = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_{st,i} f_{y\alpha,d} \operatorname{sen} \alpha_i}{b s_i} \quad [39.64]$$

siendo el área de acero **la estrictamente necesaria**, como ya hemos dicho.

### 39.2.5 RESISTENCIA A ESFUERZO CORTANTE DE ELEMENTOS LINEALES

Supongamos un trozo de viga de sección rectangular, comprendida entre una fisura y el apoyo, bien sea simplemente apoyada (fig. 39-31 a)) o continua (fig. 39-31 b)). El conjunto de fuerzas que componen la resistencia a corte está indicado en ambas figuras y se compone de los sumandos expuestos en 39.2.3.2.1 b) más el esfuerzo de tracción en la armadura de corte,  $V_s$  y el de pasador de dicha armadura  $V_p$ .

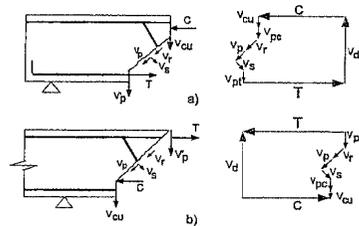


Figura 39-31

En la práctica habitual se desprecian los sumandos  $V_{pc}$ ,  $V_r$ ,  $V_p$  y  $V_{pr}$ . (Mejor dicho, su influencia, que es importante, se recoge globalmente en  $V_{cu}$ ).

Las fórmulas para el cálculo pueden establecerse de acuerdo con lo siguiente:

Sea un trozo de viga entre dos fisuras consecutivas, tal como el que se indica sombreado en la figura 39-32 a) y en detalle en la figura 39-32 c).

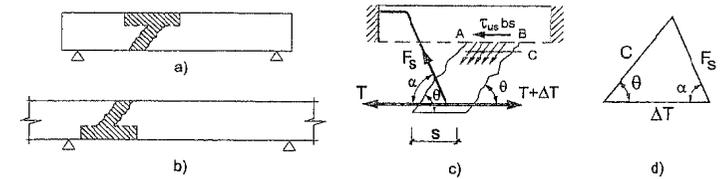


Figura 39-32

### a) Esfuerzo cortante resistido por el hormigón

De acuerdo con EHE, en elementos lineales el esfuerzo cortante resistido por el hormigón viene dado por la fórmula experimental

$$V_{cu} = \left[ 0,10 \xi (100 \rho_\ell f_{ck})^{1/3} - 0,15 \sigma'_{cd} \right] b_0 d \quad [39.65]$$

donde

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (d \text{ en mm})^1$$

$\rho_\ell$  = cuantía geométrica de la armadura de tracción ( $\rho_\ell = \frac{A_s}{b_0 d} > 0,02$ , donde

$b_0$  es el ancho en secciones rectangulares y el ancho del alma en secciones T y  $\pi$ ).

$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$ , donde  $N_d$  es el esfuerzo axial del cálculo (positivo si es tracción) y  $A_c$

el área de la sección bruta de hormigón. (En flexión simple,  $N_d = 0$  y por tanto  $\sigma'_{cd} = 0$ ).

- 1 El coeficiente  $\xi$  recoge el fenómeno, contrastado por la experimentación, de que la resistencia unitaria a corte  $\frac{V_{cu}}{b_0 d}$  crece al reducirse el canto.
- 2 La fórmula está basada en ensayos con acero B400. Si se emplea acero B500 puede multiplicarse el valor de  $\rho$  por 1,25 y el límite de 0,02 debe reducirse a 0,016.

b) Esfuerzo cortante resistido por la armadura de corte

La fuerza en la armadura  $F_s$ , la resultante de las compresiones en la biela entre las dos fisuras y el esfuerzo rasante en el plano  $AB$  han de estar en equilibrio, formando un triángulo vectorial que se indica en la figura 39-32 d). De ello, teniendo en cuenta que  $\Delta T = \tau_{ts} b s$ , se tiene:

$$\frac{F_s}{\text{sen } \theta} = \frac{C}{\text{sen } \alpha} = \frac{\tau_{ts} b s}{\text{sen } (\theta + \alpha)} \quad [39.66]$$

Sustituyendo en [39.66]  $\tau_{ts} = \frac{V_{su}}{b z} \equiv \frac{V_{su}}{0,9 b d}$ , siendo  $d$  el canto útil, se tiene:

$$F_s = \frac{V_{su} \text{sen } \theta}{0,9 \frac{d}{s} (\text{sen } \theta \cos \alpha + \cos \theta \text{sen } \alpha)}$$

Operando y suponiendo  $F_s = A_{st} f_{y\alpha,d}$ , donde  $A_{st}$  es el área de armadura transversal en la longitud  $s$  y  $f_{y\alpha,d}$  su límite elástico de cálculo (no mayor que 400 N/mm<sup>2</sup> de acuerdo con EHE), se tiene:

$$V_{su} = 0,9 \frac{d}{s} A_{st} f_{y\alpha,d} (\cos \alpha + \text{sen } \alpha \cotg \theta)$$

Como  $\frac{A_{st}}{s}$  es la armadura transversal por unidad de longitud, que llamaremos  $A_w$ , se tiene:

$$V_{su} = 0,9 d A_w f_{y\alpha,d} \text{sen } \alpha (\cotg \alpha + \cotg \theta) \quad 1 \quad [39.67]$$

En la fórmula anterior, si  $n$  armaduras se proyectan juntas sobre el plano de la figura, se sustituirá  $A_w$  por  $n A_w$ .

Si existen distintas familias de armaduras con distintos ángulos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , la fórmula [39.67] se escribe

$$V_{su} = 0,9 d \left[ \sum_{i=1}^{i=n} A_{\alpha_i} f_{y\alpha_i,d} \text{sen } \alpha_i (\cotg \alpha_i + \cotg \theta) \right] \quad [39.68]$$

1 La fórmula [39.67] es idéntica a [39.56] y puede pasarse directamente de [39.56] a [39.67] sin más que hacer en aquella  $\tau_d = \frac{V_d}{0,9 b d}$  y  $\frac{A_{st}}{s} = A_w$ . Se prefiere la deducción expuesta, porque visualiza mejor el funcionamiento de la armadura transversal en el caso de vigas.

c) Compresión máxima admisible en las bielas

A diferencia del caso de la Regla de Cosido, que vimos en el apartado 39.25, en el caso de elementos lineales se cuenta con una cierta resistencia a corte del hormigón  $V_{cu}$ .

Del diagrama de la figura 39-32, llamando  $\sigma_c$  a la tensión en la biela y  $b$  al ancho de la pieza

$$\frac{\tau_d s b}{\text{sen } (\alpha + \theta)} = \frac{C}{\text{sen } \alpha}$$

(Se toma el valor de  $\tau_d$ , debido a  $V_d = V_{cu} + V_{su}$ ),

de donde

$$C = \sigma_c b s \text{sen } \theta = \frac{\tau_d b s \text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + \theta)}$$

o bien

$$\tau_d = \sigma_c \text{sen}^2 \theta (\cotg \alpha + \cotg \theta)$$

donde  $\sigma_c$  es la tensión de compresión del hormigón en la biela comprimida. Llamando  $V_d$  al esfuerzo cortante de cálculo

$$\tau_d b d = V_d = \sigma_c b d \text{sen}^2 \theta (\cotg \alpha + \cotg \theta) \quad 1$$

Para evitar la microfisuración del hormigón en compresión, tal como vimos anteriormente

$$\sigma_c \leq 0,6 f_{cd}$$

y resulta,

$$V_{d1} = 0,6 b d f_{cd} \frac{(\cotg \alpha + \cotg \theta)}{1 + \cotg^2 \theta} \quad [39.69]$$

Si hay esfuerzo axil, el valor [39.69] debe multiplicarse por el coeficiente de base experimental

$$K = \frac{5}{3} \left[ 1 + \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \right] \quad [39.70]$$

donde  $N_d$  es el valor del esfuerzo axil (positivo si es tracción) y  $A_c$  el área de la sección de hormigón.

Si existen varias familias de armaduras con sección  $A_{\alpha_i}$ , por unidad de longitud y ángulos  $\alpha_i$ , es necesario hacer alguna hipótesis sobre el reparto de  $V_{cu}$ , en relación con

1 Aceptamos  $z = d$  como simplificación.

las distintas familias  $A_{\alpha_i}$ . Una hipótesis aceptable es suponer descompuesto  $V_{cu}$  en fracciones  $V_{cu,i}$  tales que

$$\frac{V_{cu,i}}{V_{su,i}} = \frac{V_{cu}}{V_{su}} \quad [39.71]$$

de acuerdo con ello

$$\sigma_{c,i} = \frac{V_{cu,i} + V_{su,i}}{b d \operatorname{sen}^2 \theta (\cotg \alpha_i + \cotg \theta)}$$

o bien  $\sigma_{c,i} = \frac{V_{su,i} \left[ \frac{V_{cu}}{V_{su}} + 1 \right]}{b d \operatorname{sen}^2 \theta (\cotg \alpha_i + \cotg \theta)}$

$$\sigma_c = \frac{V_d}{V_{su} b d \operatorname{sen}^2 \theta} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{V_{su,i}}{\cotg \alpha_i + \cotg \theta}$$

y sustituyendo  $V_{su,i}$  y  $V_{su}$  y operando

$$\sigma_c = \frac{V_d}{b d \operatorname{sen}^2 \theta} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cotg \alpha_i + \cotg \theta}$$

lo que conduce con  $\sigma_c \leq 0,6 f_{cd}$

$$V_d \leq \frac{0,6 f_{cd} b d \operatorname{sen}^2 \theta}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cotg \alpha_i + \cotg \theta}} \quad [39.72]$$

El valor [39.72] debe multiplicarse por el coeficiente  $K$  indicado por [39.70] si hay esfuerzo axil.

#### d) Valores límites del ángulo $\alpha$ de la armadura transversal de la pieza

La Instrucción EHE establece la condición  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Es realmente una limitación convencional, aunque recoge verdaderamente el campo de interés práctico.

De [39.68] se deduce que la eficacia en la absorción de esfuerzo cortante de un área de armadura  $A_{\alpha i}$  es función de

$$A_i = A_{\alpha i} (\cos \alpha_i + \operatorname{sen} \alpha_i \cotg \theta) \quad [39.73]$$

1 EHE adopta un valor medio ponderado  $\cotg \alpha = \frac{\sum A_i \cotg \alpha_i}{\sum A_i}$  que es también una buena aproximación.

El valor de  $\alpha_i$  que hace máxima la expresión [39.73] coincide con la solución de la ecuación

$$\frac{d A_i}{d \alpha_i} = 0$$

lo que es lo mismo que

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \cotg \theta \quad [39.74]$$

que en el caso más usual de hormigón armado, que es el de adoptar  $\theta = 45^\circ$  conduce a  $\alpha_i = 45^\circ$ .

Si con  $\theta = 45^\circ$  adoptamos  $\alpha_i = 90^\circ$

$$\frac{A_{i,45}}{A_{i,90}} = \sqrt{2}$$

La eficacia teórica por tanto es máxima para barras dobladas a  $45^\circ$  con una ventaja frente a los estribos de un 41%. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 57, las ventajas que la solución de estribos presenta tanto en el corte y doblado como en la colocación en obra de la ferralla, inclinan la solución a favor de los estribos, aunque en casos especiales se adopte la solución de barras dobladas a  $45^\circ$ .

Aparte de lo anterior, existen piezas en las que, aunque no por razones de absorción de esfuerzo cortante, sino por otras generalmente de orden constructivo, existen barras dobladas con  $\alpha > 90^\circ$ .

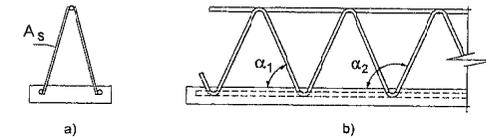


Figura 39-33

Un caso muy frecuente en la práctica es el de las viguetas prefabricadas de celosía para forjados<sup>1</sup> (Fig. 39-33 a) y b)). En ella se dispone una celosía de alambres que hasta el endurecimiento del hormigón funciona como una estructura metálica. De acuerdo con la figura y despreciando el efecto espacial llamando  $A_s$  a la sección del alambre, con  $\theta = 45^\circ$  y  $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ , [39.68] conduce a

$$V_{su} = 0,9 d \left[ 2 A_s f_{y\alpha,d} (\cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_1) + 2 A_s f_{y\alpha,d} (\cos (\pi - \alpha_1) + \operatorname{sen} (\pi - \alpha_1)) \right]$$

$$V_{su} = 3,6 d A_s f_{y\alpha,d} \operatorname{sen} \alpha_1 \quad [39.75]$$

1 Véase un estudio detallado en J. CALAVERA "Cálculo Construcción y Patología de Forjados". 4ª Edición. INTEMAC. Madrid, 1988 (32.10).

Si por ejemplo  $\alpha_1 = 60^\circ$ , obsérvese que la rama con  $\alpha_1 = 60^\circ$  absorbe un esfuerzo cortante  $V_{su1} = 2,45 d A_s f_{y\alpha,d}$  mientras que la rama con inclinación  $\alpha_2 = 120^\circ$  absorbe sólo un esfuerzo cortante  $V_{su2} = 0,66 d A_s f_{y\alpha,d}$ , es decir que la eficacia de la segunda rama es sólo el 27% de la primera, pero ya que se dispone por razones constructivas, sería ilógico no considerarla a efectos de esfuerzo cortante.

De [32.70], la compresión en las bielas provocada por las ramas con inclinación  $\alpha_1$  es

$$\begin{aligned}\sigma_{c,1} &= \frac{2,45 d A_s f_{y\alpha,d} V_d}{(2,45 + 0,66) d A_s f_{y\alpha,d} b d (1 + 0,58)} \\ &= 0,5 \frac{V_d}{b d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{c,2} &= \frac{0,66 d A_s f_{y\alpha,d} V_d}{(2,45 + 0,66) d A_s f_{y\alpha,d} b d (1 - 0,58)} \\ &= 0,5 \frac{V_d}{b d}\end{aligned}$$

Es decir, que aunque las contribuciones a la resistencia a corte de ambas ramas son muy diferentes, las compresiones que originan en las bielas son iguales.

Lo anterior se deduce de forma inmediata, considerando el diagrama equivalente al de la figura 39-32 c), que se indica en la figura 39-34.

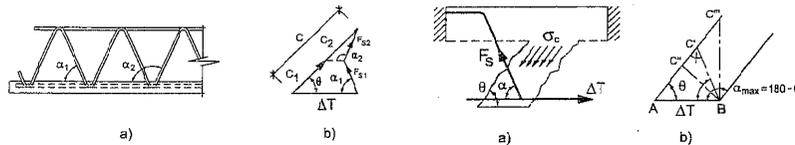


Figura 39-34

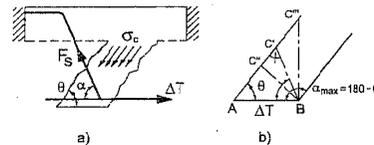


Figura 39-35

De una forma general, en la figura 39-35 se indica el diagrama general de equilibrio para una armadura de corte que proporcione una fuerza  $F_s$  con ángulo  $\alpha$ , siendo  $\theta$  la inclinación de las fisuras.

La figura indica que la fuerza  $F_s$  mínima ( $BC''$ ) se consigue con  $\alpha = 90^\circ - \theta$ . Los ángulos  $\alpha < 90^\circ - \theta$  conducen a menores compresiones en las bielas pero mayor cantidad de armadura de corte.

Los ángulos  $\alpha > 90^\circ - \theta$  conducen a mayores compresiones de bielas y a mayor cantidad de armadura de corte, por lo que no están justificados, salvo en casos como el visto anteriormente de que ya se disponga armadura de corte por otros motivos. El límite teórico absoluto para que una armadura de corte sea eficaz es  $\alpha < 180^\circ - \theta$  pues a partir de ese valor pasa a estar comprimida en lugar de traccionada.

En la figura 39-36 se indica un problema sobre el cual no se posee información suficiente. Los ángulos de las fisuras con la armadura son

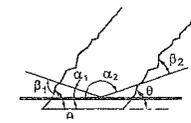


Figura 39-36

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 + \theta \\ \beta_2 &= 180 - (\alpha_2 + \theta)\end{aligned}$$

Si  $\beta$  es muy reducido, cabe la duda de si la armadura de corte en el estado límite último se alargará lo suficiente para alcanzar su límite elástico. Mientras no se disponga de más información creemos prudente la condición

$$\beta \geq 15^\circ$$

cuando  $\theta = 45^\circ$  esto supone

$$\alpha_2 \leq 120^\circ$$

En la pieza prefabricada este aspecto debe siempre justificarse con una base experimental suficiente, que permitirá economías importantes respecto al puro cálculo teórico.

### 39.2.5.1 Condiciones de comprobación

Son necesarias, en general, dos comprobaciones. Llamamos en lo que sigue  $V_{rd}$  al esfuerzo cortante efectivo de cálculo. (Ver 39.2.7). (En piezas armadas de canto constante  $V_{rd} = V_d$ ).

#### a) Comprobación del agotamiento por compresión oblicua del alma

$$V_{rd} \leq V_{u1} \quad [39.76]$$

donde  $V_{u1}$  viene dado por [39.69], si existe una sola familia de armaduras de corte, o por [39.72] si existen varias.

Si [39.69] o en su caso [39.72] no se cumplen, el problema no puede solucionarse más que por uno de los procedimientos siguientes:

- Emplear un ángulo de fisuras diferente. (Ver 39.2.5.3)
- Aumentar  $b$  o  $d$  indistintamente<sup>1</sup>.
- Mejorar la resistencia del hormigón.

<sup>1</sup> Por supuesto, en general es preferible aumentar  $d$ , pues producirá una reducción de la armadura de tracción.

b) Comprobación del agotamiento por tracción del alma (hormigón y armaduras)

$$V_{rd} \leq V_{u2} \quad [39.77]$$

donde

$$V_{u2} = V_{cu} + V_{su}$$

viniendo  $V_{cu}$  expresado por [39.65] y  $V_{su}$  por [39.67] si existe una sola familia de armaduras de corte y por [32.68] si existen varias.

Si [39.67] no se cumple, la solución más simple en principio es aumentar la armadura de corte. Las tres soluciones indicadas en a) son también aplicables si conducen a una solución más económica.

39.2.5.1.1 Cálculo a esfuerzo cortante de acuerdo con EHE

La Instrucción EHE, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, expresa la resistencia al corte proporcionada por la armadura en función del ángulo  $\theta$  de formación de fisuras, para su uso general en el caso de hormigón armado y de hormigón pretensado, si bien para hormigón armado es usual considerar  $\theta = 45^\circ$ .

Según ello, las fórmulas se simplifican de acuerdo con lo siguiente:

a) Comprobación del agotamiento por compresión oblicua del alma

$$V_{rd} \leq V_{u1} \quad [39.78]$$

donde [39.69] se simplifica con  $\theta = 45^\circ$

$$V_{u1} = 0,3 f_{cd} b d (1 + \cot g \alpha) \quad [39.79]$$

si hay una sola familia de armaduras de corte y de acuerdo con [39.72] y,

$$V_{u1} = \frac{0,3 f_{cd} b d}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{1 + \cot g \alpha_i}} \quad [39.80]$$

si hay varias familias.

En ambos casos, si existe esfuerzo axial, los valores [39.79] y [39.80] deben multiplicarse por el coeficiente  $K$  definido por [39.70].

1 La existencia de un esfuerzo normal no debido al pretensado es tenida en cuenta por el valor  $\sigma'_{cd}$  en la fórmula [39.65] de  $V_{cu}$ .

b) Comprobación del agotamiento por tracción del alma (hormigón y armaduras)

$$V_{rd} \leq V_{u2} \quad [39.81]$$

donde

$$V_{u2} = V_{cu} + V_{su}$$

siendo

$$V_{cu} = \left[ 0,10 \xi (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} - 0,15 \sigma'_{cd} \right] b_0 d \quad [39.82]$$

donde

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad (d \text{ en mm})^1.$$

$$\rho_l = \text{cuantía geométrica de la armadura de tracción} \left( \rho_l = \frac{A_s}{b_0 d} > 0,02, \text{ donde} \right.$$

$b_0$  es el ancho en secciones rectangulares y el ancho del alma en secciones T y ).

$$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c} \text{ donde } N_d \text{ es el esfuerzo axial del cálculo (positivo si es tracción) y } A_c \text{ el área de la sección bruta de hormigón. (En flexión simple, } N_d = 0 \text{ y por tanto } \sigma'_{cd} = 0).$$

$$y \quad V_{su} = 0,9 d A_\alpha f_{y\alpha,d} (\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha) \quad [39.83]$$

si existe una sola familia de armaduras de corte

$$y \quad V_{su} = 0,9 d \left[ \sum_{i=1}^{i=n} A_\alpha f_{y\alpha,d} (\text{sen } \alpha_i + \text{cos } \alpha_i) \right]$$

si existen varias familias.

Como se dijo anteriormente  $A_\alpha$  es el área de la armadura de corte por unidad de longitud en la dirección de la directriz de la pieza y  $f_{y\alpha,d}$  es el límite elástico de cálculo de la armadura de corte, con la limitación  $f_{y\alpha,d} \leq 400 \text{ N/mm}^2$ . (Véase nota en el apartado

1 El coeficiente  $\xi$  recoge el fenómeno, contrastado por la experimentación de que la resistencia unitaria a corte  $\frac{V_{cu}}{b_0 d}$  crece al reducirse el canto.

2 La fórmula está basada en ensayos con acero E400. Si se emplea acero B500 puede multiplicarse el valor de  $\rho$  por 1,25 y el límite de 0,02 debe reducirse a 0,016.

39.2.4, para el caso de que se empleen mallas electrosoldadas como armadura de corte).

Si la armadura de corte está constituida solamente por estribos con  $\alpha = 90^\circ$ , la fórmula se simplifica

$$V_{su} = 0,9 d A_{\alpha} f_{y\alpha,d} \quad [39.84]$$

### 39.2.5.1.2 Cálculo por el método de las bielas de inclinación variable (método del model code 90 y del eurocódigo ec-2)<sup>1</sup>

El planteamiento del cálculo a esfuerzo cortante con  $\theta = 45^\circ$  es debido básicamente a la hipótesis de despreciar las tensiones de tracción en el hormigón y a la adopción de la hipótesis de una celosía a  $45^\circ$ , debida a desarrollos paralelos realizados por RITTER (39.11) y MÖRSCH (39.12). MÖRSCH desarrolló las fórmulas de resistencia a corte con la hipótesis de  $\theta = 45^\circ$ . De hecho MÖRSCH expresó claramente su opinión de que al presentarse el problema con cuatro incógnitas ( $\sigma_c$ ,  $\Delta T$ ,  $F_s$  (función de la tensión en la armadura de corte) y el ángulo de inclinación de fisuras  $\theta$ ), el problema no podía resolverse. Esto era cierto si el problema se plantea en condiciones estrictas de equilibrio estático, pues ello conduce a sólo tres ecuaciones.

Debe señalarse que las hipótesis de MÖRSCH y de RITTER han conducido a fórmulas que para el hormigón armado han supuesto una precisión que debe señalarse más como excelente que como aceptable, lo cual debe ser destacado por lo temprano de sus trabajos.

Los ensayos en laboratorio demostraban que en general, en vigas de hormigón armado los valores de  $\theta$  suelen ser algo inferiores a  $45^\circ$  y las deformaciones medidas en los estribos indicaban tensiones menores que las correspondientes a la hipótesis de  $\theta = 45^\circ$ .

Un trabajo de especial importancia dentro de los muchos realizados que no podemos reseñar aquí por razones de espacio fue el debido a KUPFER (32.13) que a partir de la aplicación del principio del trabajo mínimo, desarrolló un método para calcular el ángulo  $\theta$ . Posteriormente esta teoría ha sido notablemente perfeccionada y deben destacarse los trabajos de COLLINS (39.14) y NIELSEN (39.15) como especialmente importantes.

El CEB y la FIP en su MODEL CODE de 1990 y el EUROCÓDIGO EC-2 han hecho uso de todo lo anterior resumiéndolo a un nivel de aplicación práctico.

En concreto, el EUROCÓDIGO EC-2 adopta dos métodos de cálculo a esfuerzo cortante: El primero (Método Normalizado), coincide con el desarrollado en el apartado 39.2.5.1.1 adoptado por la Instrucción EHE, con la única diferencia de que el valor de  $V_{cu}$  (fórmula [39.65])<sup>2</sup> es sustituido por la expresión, también de origen experimental

$$V_{cu} = [\tau_{Rd} k (1,2 + 40 \rho_l) + 0,15 \sigma_{cd}] b_0 d \quad [39.85]$$

1 Como ya hemos dicho, EHE también adopta este método.

2 La expresión [39.65] de EHE procede del MODEL CODE-90 CEB-FIP.

donde las notaciones son idénticas a las empleadas en [39.65] y  $\tau_{Rd}$  viene dado por la Tabla T-39.3.

TABLA T-39.3

VALORES DE  $\tau_{Rd}$  (N/mm<sup>2</sup>) con  $\gamma_c = 1,5$  EN FUNCIÓN DE LA RESISTENCIA CARACTERÍSTICA DEL HORMIGÓN

$f_{ck}$ (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$\tau_{Rd}$ (N/mm <sup>2</sup> )	0,18	0,22	0,26	0,30	0,34	0,37	0,41	0,44	0,48

El valor de  $\rho_l$  no debe tomarse mayor que 0,02. (Véase la nota en el apartado 39.2.5 a) para aceros de límite elástico superior a 400 N/mm<sup>2</sup>).

El segundo método, denominado **Método de las bielas de inclinación variable** se expone a continuación.

El método permite el cálculo a partir de un valor previamente elegido del ángulo  $\theta$  de inclinación de fisuras, con la limitación

$$0,4 \leq \cot g \theta \leq 2,5 \quad [39.86]$$

para piezas con armadura longitudinal constante y

$$0,5 \leq \cot g \theta \leq 2 \quad [39.87]$$

para piezas con armadura longitudinal variable.

Adoptando [39.87] como representativa de los casos usuales en la práctica, ello equivale a la condición

$$27^\circ \leq \theta \leq 63^\circ \quad [39.88]$$

Elegido  $\theta$  dentro del campo acotado por [39.88], las comprobaciones de corte se realizan de acuerdo con lo siguiente:

#### a) Comprobación del agotamiento por compresión oblicua del alma

Rige la condición

$$V_{Rd} \leq V_{ul} \quad [39.89]$$

donde  $V_{ul}$  es el valor expuesto en [39.69] con la variación del EC-2 de tomar  $z$  en lugar de  $d$ .

$$V_{ul} = v f_{cd} b_0 z \frac{\cot g \theta + \cot g \alpha}{1 + \cot g^2 \theta} \quad [39.90]$$

1 Las limitaciones se establecen por razones de compatibilidad de deformaciones y control de la fisuración debida al esfuerzo cortante.

El coeficiente  $\nu$  que controla el agotamiento por compresión de las bielas viene dado por la expresión

$$\nu = 0,7 - \frac{f_{ck}}{200} < 0,5 \quad [39.91]$$

**b) Comprobación del agotamiento por tracción del alma (hormigón y armaduras)**

Rige la condición

$$V_{Rd} \leq V_{u2} \quad [39.92]$$

donde

$$V_{u2} = V_{su}$$

(Se desprecia la resistencia a corte del hormigón, es decir  $V_{cu} = 0$ )

donde

$$V_{su} = z A_{\alpha} f_{y\alpha,d} \operatorname{sen} \alpha (\cotg \theta + \cotg \alpha) \quad [39.93]$$

Esta fórmula se diferencia de [39.68] solamente en tomar el valor de  $z$  en lugar de  $d$ , valor este último clásico en la normalización española.

El EUROCÓDIGO EC-2 incluye además una condición de cuantía mínima

$$\frac{A_{\alpha} f_{y\alpha,d}}{b} \leq \frac{\frac{1}{2} \gamma f_{cd} \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad [39.94]$$

Debe aclararse que esta condición es realmente superflua pues es inmediato demostrar que con  $\alpha \leq 45^\circ$  y  $\cotg \theta \geq 0$  la condición [39.94] está envuelta por [39.90].

- Dentro del campo de variaciones de  $\theta$  definido por [39.86] ó [39.87], los valores bajos de  $\theta$  reducen la cantidad de armadura de corte necesaria. Recuérdese sin embargo que de acuerdo con [39.58] y la TABLA T-39.1, al reducirse  $\theta$  aumenta el incremento de tracción de la armadura de flexión debida al esfuerzo cortante, así como la traslación de la ley de momentos flectores.
- Si se emplean valores altos de  $\theta$ , aumenta la armadura de corte necesaria pero se reduce el incremento de tracción de la armadura de flexión y la traslación de la ley de momentos flectores.
- Si el cortante es pequeño, especialmente si es inferior o si supera poco el valor  $V_{cu}$  del Método de EHE, es preferible aplicar dicho método, pues el de las bielas de inclinación variable al suponer  $V_{cu} = 0$  conduciría a más armadura de corte.

<sup>1</sup> Véase la discusión del valor de  $\nu$  en (39.16). EHE cuando aplica el método de las bielas de inclinación variable toma  $\nu = 0,6$ . (Para hormigones de alta resistencia, véase el Anejo N° 5).

En el fondo, el problema es una cuestión de optimización, considerando que el valor de  $\theta$  sea habida cuenta de la armadura de corte a la que conduzca y que el aumento de armadura de flexión que ocasione, lleven a un coste mínimo.

El método, en todo caso, permite más libertad al proyectista que el de suponer "a priori"  $\theta = 45^\circ$ .

Debe señalarse que para Informes de Patología y otros análogos, este método u otros más refinados, son de empleo obligado, pues la armadura de corte en una pieza no puede considerarse válida o no válida con la hipótesis de  $\theta = 45^\circ$  sino que debe ser analizado si al variar  $\theta$  de acuerdo con la armadura de flexión realmente dispuesta, el estado límite último de esfuerzo cortante está o no cubierto con un ángulo  $\theta \neq 45^\circ$ .

**39.2.6 CÁLCULO A ESFUERZO CORTANTE DE PIEZAS SIN ARMADURA DE CORTE**

**a) MÉTODO DE EHE**

En el caso habitual de losas, placas, zapatas, muros de contención, etc.

Al no existir armadura de corte el agotamiento se produce por tracción excesiva del alma. La Instrucción EHE adopta la formulación del MODEL CODE-90 CEB-FIP, con

$$V_{cu} = \left[ 0,12 \xi (100 \rho_t f_{ck})^{1/3} - 0,15 \sigma'_{cd} \right] b_0 d \quad [39.95]$$

con las mismas notaciones y significado que se emplearon en 39.2.5 a) (Fórmula [39.65]).

**b) MÉTODO DEL EUROCÓDIGO**

El EUROCÓDIGO EC-2 emplea la fórmula

$$V_{cu} = \left[ \tau_{Rd} k (1,2 + 40 \rho_t) - 0,15 \sigma'_{cd} \right] b_0 d \quad [39.96]$$

con las mismas anotaciones y significados que se emplearon en ella.

**c) MÉTODO DEL ACI 318-95**

De acuerdo con lo que se expuso en el Capítulo 31, la capacidad resistente según las fórmulas del ACI expresadas en MPa, N, mm y en valores de cálculo de la resistencia del hormigón viene dado por el mayor de los dos valores siguientes

$$V_{cu} = 0,13 \sqrt{f_{ck}} b_0 d \quad [39.97]$$

$$V_{cu} = \left[ 0,12 \sqrt{f_{ck}} + 13,5 \rho_t \frac{V_d d}{M_d} \right] b_0 d \geq 0,23 \sqrt{f_{ck}} b_0 d \quad [39.98]$$

Las notaciones son las mismas ya empleadas y  $V_d$  y  $M_d$ , el esfuerzo cortante y el momento flector de cálculo, concomitantes en la sección considerada.

En la figura 39-37 se indica una comparación gráfica entre los valores de la resistencia a corte de piezas sin armadura de corte de la Instrucción Española EHE, del MODEL CODE 90, del EUROCÓDIGO EC-2 y del Código Norteamericano ACI 318-95. Es clara la ventaja importante del Código Norteamericano, para cuantías bajas de la armadura de flexión, fruto de una experimentación muy amplia y que introduce el coeficiente adimensional  $\frac{V_d d}{M_d}$ , no considerado por las otras normas.

Obsérvese el carácter pesimista del MODEL CODE 90 y de EHE para cuantías bajas, frente al EUROCÓDIGO.

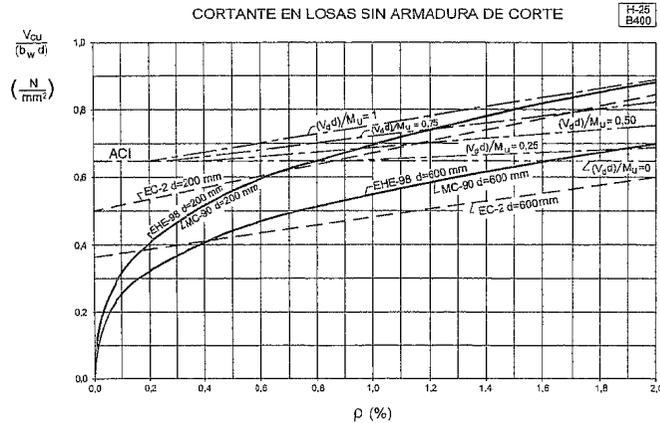


Figura 39-37

### 39.2.7 ESFUERZO CORTANTE EN PIEZAS DE CANTO VARIABLE

En todo lo visto anteriormente en este capítulo, se ha supuesto la pieza de canto constante. Consideremos ahora una rebanada de una pieza de canto variable (fig. 39-38), sometida a un momento  $M_d$  y un esfuerzo axial  $N_d$ , actuando en su c.d.g.

Es evidente que el esfuerzo cortante efectivo  $V_{rd}$  se ve modificado por las componentes verticales de la compresión  $C$  y la tracción  $T$ , oblicuas respecto a la directriz de la pieza.

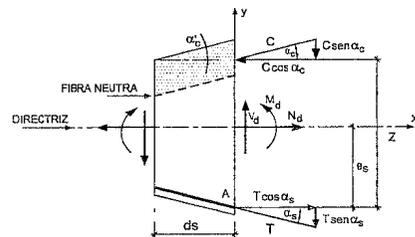


Figura 39-38

Expresando las condiciones de equilibrio, se tiene:

Proyectando sobre  $OY$ :

$$V_{rd} = V_d - C \operatorname{sen} \alpha_c + T \operatorname{sen} \alpha_s \quad [39.99]$$

Proyectando sobre  $OX$ :

$$T \cos \alpha_s - C \cos \alpha_c - N_d = 0 \quad [39.100]$$

Tomando momentos respecto al punto A de la armadura de tracción:

$$C z \cos \alpha_c = M_d = N_d e_s \quad [39.101]$$

Resolviendo el sistema [39.99], [39.100], [39.101], se obtiene:

$$V_{rd} = V_d - \frac{M_d - N_d e_s}{z} \operatorname{tg} \alpha_c + \left( \frac{M_d - N_d e_s}{z} + N_d \right) \operatorname{tg} \alpha_s \quad [39.102]$$

Si  $N_d = 0$

$$V_{rd} = V_d - \frac{M_d}{z} (\operatorname{tg} \alpha_c - \operatorname{tg} \alpha_s) \quad [39.103]$$

En las fórmulas anteriores,  $\alpha_c$  y  $\alpha_s$  son los ángulos de las componentes paralelas a  $OX$ , de las líneas de acción de  $C$  y  $T$ , con tales líneas, considerado positivos cuando el giro es contrario al reloj. (En la figura 39-38, por ejemplo,  $\alpha_c$  es positivo y  $\alpha_s$  negativo).

De [39.103] se ve inmediatamente que, si el canto crece al crecer el momento,  $V_{d,ef}$  es menor que  $V_d$ . Lo contrario ocurre si el canto decrece al crecer el momento. La figura 39-39 indica algunos casos típicos.

### 39.2.8 ESTADO DE CORTE-FRICCIÓN

Es un estado límite último no considerado explícitamente por EHE, pero de gran interés. En todo el resto de este capítulo se han presentado métodos de cálculo encaminados fundamentalmente a proporcionar una seguridad adecuada frente al fallo por tracción principal del hormigón y no se ha considerado, realmente, el fallo directo por esfuerzo cortante, propiamente dicho. En este apartado consideraremos el caso en que la transferencia de esfuerzos entre dos partes de la pieza se realiza realmente por cortante (39.14). Esto se aplica al cálculo de estados de corte a través de una superficie potencial de fisuración o una superficie de junta entre dos hormigones (fig. 39-40 a)). Al experimentar un corrimiento paralelo a la superficie mencionada de las partes A y B, las crestas de las superficies rugosas montan unas sobre otras (fig. 39-40 b)) tensando cualquier armadura de cosido,  $A_{st}$ , hasta su límite elástico, si el ángulo  $\alpha$  es tal que el corrimiento relativo pone en tensión la armadura.

1 Se acepta  $\alpha_c \approx \alpha'_c$ .

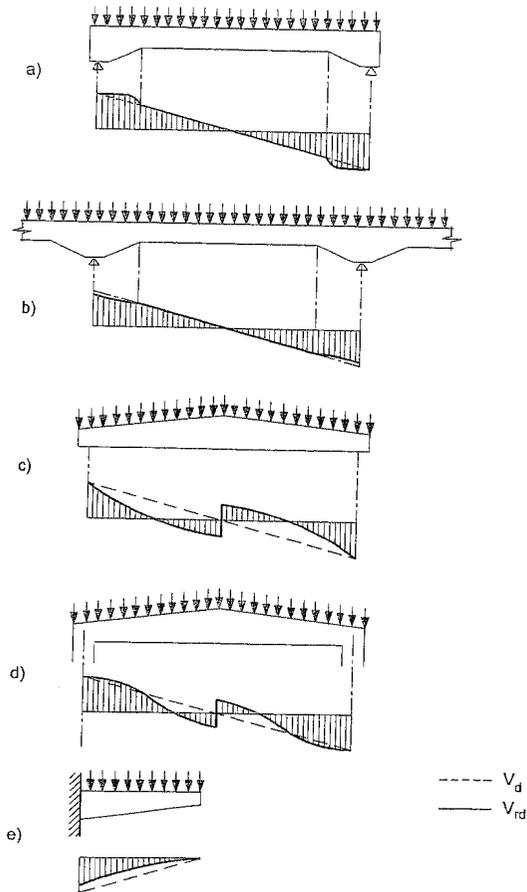


Figura 39-39

El diagrama de fuerzas se indica en la figura 39-40 c). Llamando  $\tau_d$  a la tensión tangencial en la superficie de fractura y  $b$  al ancho de la pieza en sentido perpendicular al plano de la figura, podemos escribir

$$\tau_d b s = A_{st} f_{yd} \cos \alpha + \mu A_{st} f_{yd} \sin \alpha \quad [39.104]$$

donde  $\mu$ , es el coeficiente de rozamiento entre ambos hormigones. La ecuación [39.104] puede escribirse

$$\tau_d = \frac{A_{st} f_{yd}}{b s} [\mu \sin \alpha + \cos \alpha] \quad [39.105]$$

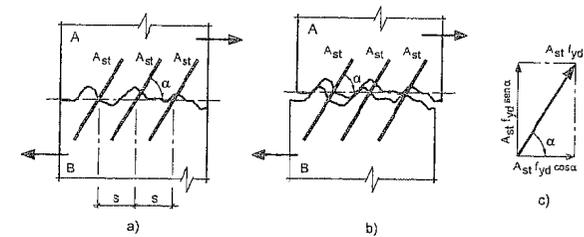


Figura 39-40

Realmente hablando,  $\mu$  no es solamente un coeficiente de rozamiento, sino que engloba el rozamiento, el efecto de engranaje de las crestas de la superficie de fractura y el efecto de pasador de la armadura, que a su vez se compone de las resistencias indicadas en la figura 39-41 a), b) y c).

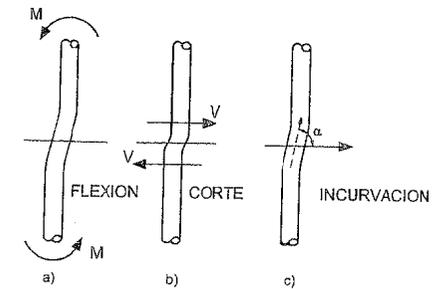


Figura 39-41

De acuerdo con lo anterior, se adoptan valores convencionales de  $\mu$ . La Norma ACI 318-89 especifica:

$\mu = 1,4$  para hormigón colocado monolíticamente.

$\mu = 1,0$  para hormigón colocado contra otro endurecido, de superficie intencionadamente rugosa. (Puede identificarse con la superficie tipo A que expondremos en 33.4.2).

$\mu = 0,6$  para hormigón colocado contra otro endurecido, de superficie no intencionadamente rugosa. (Puede identificarse con la superficie tipo B del citado apartado 33.4.2).

Para planos en piezas de hormigón que han sido hormigonadas monolíticamente, de [39.105] se deduce

$$q = \frac{A_{st}}{b s} \geq \frac{\tau_d}{(1,4 \sin \alpha + \cos \alpha) f_{yd}} \quad [39.106]$$

que para  $\alpha = 90^\circ$ , resulta

$$q \geq \frac{\tau_d}{1,4 f_{yd}} \quad [39.107]$$

El Código ACI limita también el valor de  $\tau_d$ , dado por [39.105], a un máximo de  $0,16 f_{ck}$  pero no más de  $4,3 \text{ N/mm}^2$ .

Obsérvese que la fórmula [39.105], aunque conceptualmente de distinto origen, permite un cálculo más económico que la [39.48] de la Regla de Cosido, ya que, para hormigón colocado monolíticamente,  $\mu = 1,4$ <sup>1</sup>.

### 39.2.9 ESFUERZO CORTANTE EN LAS ALAS DE SECCIONES EN T<sup>2</sup>

En el caso de secciones en T, I, TT, □ y, en general, siempre que se produzcan vuelos de las cabezas de compresión o tracción respecto al alma (fig. 39-42), aparecen tensiones tangenciales paralelas a la directriz de la pieza.

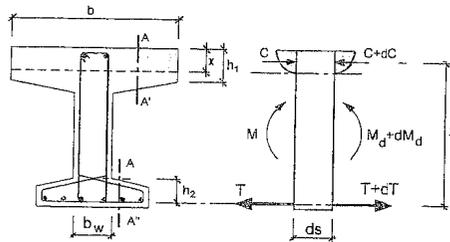


Figura 39-42

#### a) Cabeza comprimida

##### a-1) Condiciones para que pueda suponerse redistribución plástica de tensiones

La Instrucción EHE parte de que existe posibilidad de redistribución plástica del esfuerzo cortante en el ala, ya que presupone que en ésta se ha dispuesto la armadura transversal correspondiente a losas que fija en:

1 El estado de corte-fricción (como veremos luego con el de esfuerzo rasante) es diferente del de esfuerzo cortante. La semejanza es puramente formal y debida al tratamiento simplificado en que se basa [39.106]. La diferencia aparece más clara si en lugar de [39.106] se maneja la fórmula de MATTOCK (39.17) (39.18) basada en estudios experimentales

$$\tau_d = \frac{A_{st} f_{yd}}{b s} (0,8 \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) + b s k_1 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

que ya no presenta semejanza de ningún tipo con [39.106].

2 Empleamos el término "cortante" y no "rasante" como hace EHE, pues preferimos reservar el de rasante para las juntas entre hormigones de diferente edad.

$$q = 2,0\text{‰ con acero B-400S}$$

$$q = 1,8\text{‰ con acero B-500S}$$

La condición para que pueda suponerse readaptación plástica de esfuerzos a lo largo del ala la establecemos como equivalente a que la cuantía de cosido de la armadura transversal situada en el ala, sea capaz de garantizar el estado de corte-fricción. De acuerdo con [39.107] y llamando  $\tau_{md}$  al valor medio de  $\tau$  (consecuencia de la readaptación).

$$q \geq \frac{\tau_{md}}{1,4 f_{yd}} \quad [39.108]$$

donde  $\tau_{md}$  viene dada por la fórmula (fig. 39-42)

$$\tau_{md} = \frac{F_{sd}}{a_r h_1} \quad [39.109]$$

$F_{sd}$  se define a continuación en [39.112]. Por lo tanto

$$q \geq \frac{F_{sd}}{1,4 a_r h_1 f_{yd}} \quad [39.110]$$

Como hemos dicho, el valor [39.110] de cuantía para movilizar el estado de corte-fricción, se cumple siempre en la práctica si se ha dispuesto la armadura mínima de flexión en la losa, prevista por EHE.

##### a-2) Caso en que pueda suponerse readaptación plástica de esfuerzos a lo largo de la luz<sup>1</sup>

Basta para ello que se cumpla  $q \geq \frac{\tau_{md}}{1,4 f_{yd}}$

En este caso, se establecen las longitudes  $a_{ri}$  de redistribución plástica, de acuerdo con la ley de momentos de cálculo actuantes sobre la estructura.

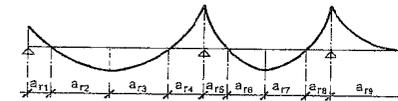


Figura 39-43

Las longitudes  $a_{ri}$  se establecen con la condición de que en ellas la ley de momentos debe ser monótonamente creciente o decreciente y además los puntos de momento nulo deben adoptarse siempre como extremos de longitudes  $a_{ri}$ . De acuerdo con lo anterior en la estructura de la figura 39-43 resultan las nueve longitudes  $a_{ri}$  allí indicadas.

1 Recordamos que EHE considera únicamente este caso.

El esfuerzo cortante medio por unidad de longitud viene dado por

$$S_d = \frac{A F_d}{a_r} \quad [39.111]$$

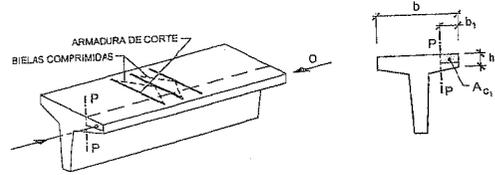


Figura 39-44

donde  $A F_d$  es la variación en  $a_r$  de la fuerza longitudinal actuante en la sección del ala exterior al plano P-P de comprobación.

En la práctica, (fig. 39-44) la fuerza  $A F_d$  es nula en un extremo de la longitud  $a_r$ . (Véase la figura 39-45) y el valor de  $F_d$  en el otro extremo viene dado por

$$\Delta F_{sd} = \frac{M_d}{0,9 d} \cdot \frac{b_1}{b} \leq 0,85 f_{cd} A_{c1} \quad [39.112]$$

La cota superior  $A_{c1} \cdot 0,85 f_{cd}$  de [39.112] opera en el caso de que el bloque de compresiones profundice más que el área  $A_{c1}$ .

La sollicitación actuante  $S_d$  ha de cumplir la doble consideración siguiente:

- Limitación por compresión excesiva de bielas. De [39.69], con  $\alpha = 90^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$ .

$$S_d \leq S_{d1} = 0,3 f_{cd} h_1 \quad [39.113]$$

- Limitación por tracción excesiva de la armadura transversal de corte.

$$S_d \leq S_{d2} = A_p f_{y\alpha,d} \quad [39.114]$$

donde  $A_p$  es el área de la armadura transversal perpendicular al plano P-P por unidad de longitud y  $f_{y\alpha,d}$  el límite elástico del acero ( $f_{y\alpha,d} < 400 \text{ N/mm}^2$ ).

En este tratamiento, que es el adoptado por EHE no se considera ningún valor de  $V_{cu}$ . Realmente, puede considerarse si el ala no está sometida a ninguna flexión transversal que ya la solicite a esfuerzo cortante.

Un caso frecuente y de especial interés es el de losas continuas enlazadas en las almas de las vigas (fig. 39-45).

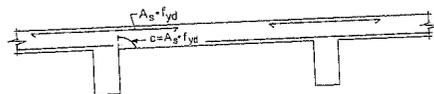


Figura 39-45

destinada a resistir dichos momentos y esfuerzos. Sin embargo, tal como se indica en la fig. 39-45, a la fuerza  $A_s f_{yd}$  de la armadura le responde una cabeza comprimida cuya resultante C es igual a  $A_s f_{yd}$ . Aceptando como coeficiente de rozamiento  $\rho = 1$ , la cabeza comprimida resiste un esfuerzo cortante en el alma igual a  $A_s f_{yd}$ .

En definitiva, la armadura  $A_s$  debe ser igual a la mayor de las áreas exigidas por la flexión de la losa o por el cortante en el ala.

### a-3) Caso en que no puede suponerse readaptación plástica de tensiones

En el caso de cabeza comprimida, el incremento total de la fuerza de compresión (fig. 39-42) si no se puede suponer readaptación plástica, vale

$$dC = \frac{dM}{z}$$

Llamando  $A_{co}$  al área sombreada, es decir, al área de la zona comprimida de cabeza volada a la derecha de la sección de comprobación A-A', y  $A_{cx}$  al área total comprimida en el agotamiento, podemos aceptar que la fuerza cortante, a lo largo de AA', es

$$R_d d_s = dC \cdot \frac{A_{co}}{A_{cx}} = \frac{dM_d}{z} \cdot \frac{A_{co}}{A_{cx}}$$

y la tensión tangencial para un espesor de rebanada  $ds$ , resulta

$$\tau_d = \frac{R_d}{h_1}$$

y sustituyendo y haciendo  $\frac{dM_d}{ds} = V_d$  y  $z = 0,9 d$ :

$$\tau_d = V_d \frac{\frac{A_{co}}{A_{cx}}}{0,9 d h_1} \quad [39.115]$$

La fórmula [39.115] es válida para una sección de forma cualquiera. En general es necesario tantear diversas secciones A-A' para obtener el valor pésimo de  $\tau_d$ .

En el caso particular de alas de espesor constante (fig. 39-46), la sección pésima es la A-A' y  $h_1 = h_0$ .

$$A_{co} = \frac{b - b_w}{2} x$$

$$A_{cx} = bx$$

1 Se acepta una distribución uniforme en todo el canto  $h_1$ .

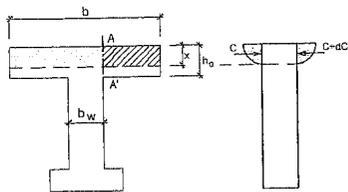


Figura 39-46

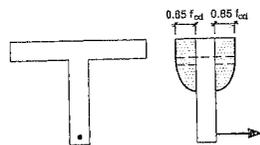


Figura 39-47

y sustituyendo en [39.115]

$$\tau_d = V_d \frac{b - b_w}{2b} \cdot \frac{1}{0,9 d h_0} \quad [39.116]$$

Es importante destacar que, la fórmula [39.115] presupone que el bloque comprimido está situado en el ala superior. Si el bloque ocupa parte del alma, además del ala superior, estamos de nuevo en que la situación analizada en 39.2.13 (fig. 39-14) y las fórmulas [39.115] y [39.116] quedan del lado de la seguridad (CALAVERA (39.3)). Como casos extremos, si imaginamos que la profundidad de la fibra neutra es tal que el ala entera está (fig. 39-47) situada en la zona rectangular del bloque parábola-rectángulo, evidentemente  $\tau_d = 0$  y, sin embargo, tanto [39.115] como [39.116] podrían conducir a grandes valores de  $\tau_d$ , si es elevado el valor de  $V_d$ . (En todo caso, no nulos).

Obtenido el valor de  $\tau_d$ , el valor  $\tau_d h_1$  es el esfuerzo cortante por unidad de longitud,  $V_{cu}$ , debiendo cumplirse

$$V_{rd} \leq V_{cu} + V_{su} \quad [39.117]$$

$$V_{cu} = \tau_d h_1 \leq \left[ 0,10 \xi (100 \rho_\ell f_{ck})^{2/3} \right] h_1$$

$$\text{ó} \quad V_{cu} = \tau_d h_1 \leq \left[ \tau_{rd} K (1,2 + 40 \rho_\ell) \right] h_1 \quad [39.118]$$

ó bien

$$V_{cu} = \tau_d h_1 \leq 0,13 \sqrt{f_{cd}} h_1 \quad [39.119]$$

según cumpla el método de EHE, el del EUROCÓDIGO EC-2 ó el del ACI-318-95 expuestos en 39.2.6.

$$\text{y} \quad V_{su} = A_p f_{y\alpha,d} \quad [39.120]$$

con las mismas notaciones que en [39.114]

En todos los casos las notaciones son las allí expuestas y  $\rho_\ell$  es la cuantía de armadura transversal en la cabeza, pudiendo ser  $\rho_\ell = 0$ . Obsérvese que EHE conduce en ese caso a  $V_{cu} = 0$ , cosa que no ocurre con los otros métodos.

No hay lugar en este caso a estudiar el agotamiento por compresión de las bielas pues las tensiones correspondientes son siempre muy reducidas.

Este método sólo puede usarse si el ala no está sometida a acciones directas de ningún tipo, que produzcan tensiones significativas de corte. En otro caso en [39.116] debe suponerse  $V_{cu} = 0$ .

### b) Cabeza traccionada

#### b-1) Caso de que puede suponerse redistribución plástica de tensiones

De nuevo es el único caso considerado por EHE, debido a la suposición de la cuantía mínima de armadura transversal, tal como se expuso en a-1) para el caso de la cabeza comprimida.

Las longitudes  $a_r$  de zonas se definen como allí se indicó (fig. 39-43) y el valor de  $A F_d$  ahora viene dado (fig. 39-42) por

$$A F_d = A_{s2} f_{yd} \quad [39.121]$$

donde  $A_{s2}$  área estricta de armadura situada a la derecha del plano A-A de comprobación y por tanto

$$S_d = \frac{A_{s2} f_{yd}}{a_r} \quad [39.122]$$

debiendo cumplirse las condiciones:

- Limitación por compresión excesiva de bielas

$$S_d \leq S_{ul} = 0,2 f_{cd} b_0 \quad [39.123]$$

expresión que procede de [39.69] con  $\alpha = 90^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$  pero tomando como tensión de agotamiento de las bielas  $0,4 f_{cd}$  debido a la presencia de tracciones longitudinales en el ala.

- Limitación por tracción excesiva de la armadura transversal de corte. Análogamente a [39.114].

$$S_d \leq S_{u2} = A_p f_{y\alpha,d} \quad [39.124]$$

donde  $A_p$  es el área de la armadura transversal perpendicular al plano A-A por unidad de longitud y  $f_{y\alpha,d}$  el límite elástico del acero ( $f_{y\alpha,d} > 400 \text{ N/mm}^2$ ).

Recuérdese que para la aplicación de este método la armadura transversal de corte debe cumplir la condición

$$q \geq \frac{A_{s2} f_{yd}}{1,4 a_r h_2 f_{yd}} \quad [39.125]$$

análoga a la [39.110] y destinada a garantizar la redistribución plástica mediante la movilización del estado de corte-fricción.

**b-2) Caso en que no puede suponerse redistribución plástica de tensiones**

Si el ala de la viga es la de tracción, llamando  $A_{so}$  al área de la armadura de tracción situada a la derecha de la sección de comprobación A-A' y  $A_s$  al área total de armadura de tracción (fig. 39-41), la fórmula análoga a [39.115] es

$$\tau_d = V_d \frac{A_{so}}{A_s} \cdot \frac{1}{0,9 d h_2} \quad [39.126]$$

Si el ala de tracción es de canto constante  $h_o$ , la sección pésima es la de arranque del vuelo y  $A_{so}$  es la armadura situada, en cada vuelo, fuera de los estribos del alma (fig. 39-42), siendo

$$\tau_d = V_d \frac{A_{so}}{A_s} \cdot \frac{1}{0,9 d h_o} \quad [39.127]$$

Conocido  $\tau_d$ , se calcula

$$V_{cu} = V_d \frac{A_{so}}{A_s} \cdot \frac{1}{0,9 d} \quad [39.128]$$

donde  $V_d$  es el esfuerzo cortante de cálculo en la sección considerada y la fórmula de comprobación resulta análogamente a [39.116]

$$V_{rd} \leq V_{cu} + V_{su} \quad [39.129]$$

donde  $V_{su} = A f_{y\alpha} d$

( $V_{su}$  toma los valores [39.118], [39.119] ó [39.120] con  $h_2$  en lugar de  $h_1$ ).

Tampoco en este caso ha lugar a la comprobación de las tensiones de compresión de las bielas que son siempre muy moderadas.

Por supuesto, si sobre las alas existiesen cargas directas, también en este caso debería considerarse nulo  $V_{cu}$  y si hubiera una losa inferior continua análogamente a lo visto en la cabeza comprimida, la armadura de momentos negativos de la losa podría ser considerada simultáneamente como armadura transversal para resistir el corte del ala.

**39.2.10 CARGAS PRÓXIMAS A LOS APOYOS**

De acuerdo con los principios establecidos por el Método de Bielas y Tirantes, se permite no considerar a efecto de necesidad de armadura de corte las cargas próximas a los apoyos en determinados casos, tales como el indicado en la figura 39-48, ya que en ese caso las cargas se encauzan directamente hacia el apoyo.

Sin embargo, **no debe olvidarse lo siguiente:**

- a) Las cargas en esa zona de longitud  $d$ , **si deben ser tenidas en cuenta** a efectos de flexión.
- b) Análogamente deben ser tenidas en cuenta para la comprobación de las tensiones de compresión de las bielas.

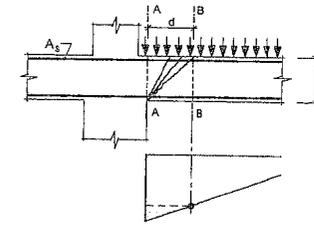


Figura 39-48

- c) La armadura de corte necesaria en B-B' debe ser mantenida hasta A-A'.
- d) Se sobreentiende que la armadura  $A_s$  es suficiente para funcionar como tirante de esas cargas directamente transmitidas al apoyo.
- e) La reducción no debe aplicarse a cargas concentradas actuando en la longitud  $d$ . (Ver fig. 39-49 e) y f)¹.

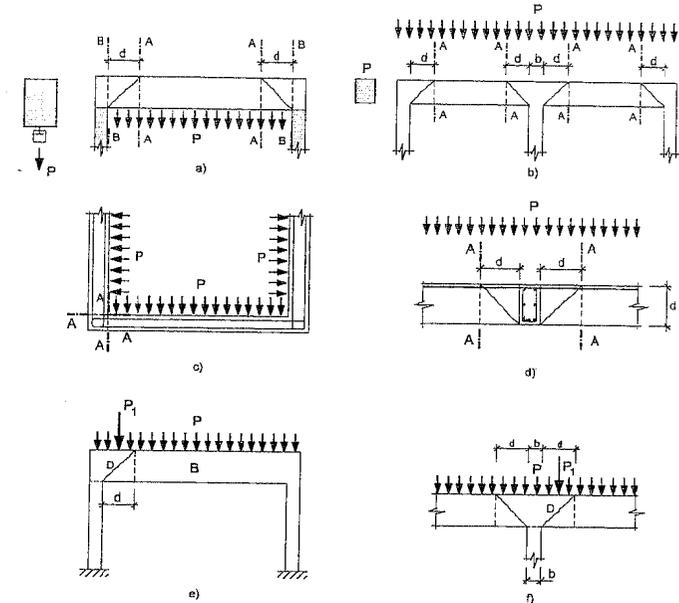


Figura 39-49

¹ Para este caso, véase el Capítulo 60.

Esta reducción debe aplicarse analizando previamente el sistema de transmisión de las cargas.

En la figura 39-49 a) se trata de una viga sometida a una carga uniforme colgada, las secciones de comprobación son las A-A puesto que la carga en la zona  $d$  se supone transferida a la cabeza comprimida. Basta por tanto aplicar lo que expondremos en 39.2.11 y entonces se podría dimensionar el cortante con el valor en A-A más la armadura de suspensión extendida hasta la cara del apoyo. Si no se dispone armadura de suspensión, la sección de comprobación debe ser la B-B.

En el caso de la figura 39-49 b), basta comprobar las secciones A-A y mantener la armadura de corte hasta la cara del apoyo.

Es claro que en la sección horizontal de un tanque para líquidos indicada en la figura 39-49 c), las secciones de comprobación han de ser las A-A.

El caso de la figura 39-49 d) es el de apoyo de una viga continua en otra transversal de su mismo canto. Las secciones de comprobación son las A-A, siempre que se disponga de la armadura necesaria de cuelgue de la viga continua de la transversal.

Los casos 39-49 e) y f) corresponden a cargas puntuales a distancias no superiores a  $d$  del apoyo. Este caso necesita ser resuelto considerando las regiones  $D$  indicadas en la figura como sesiones de discontinuidad. Parece prudente extender esta comprobación incluso para cargas puntuales hasta una distancia  $1,5 d$ .

### 39.2.11 CARGAS SUSPENDIDAS

Habitualmente las acciones son aplicadas a la cara superior de la pieza o al menos a nivel de su cabeza comprimida.

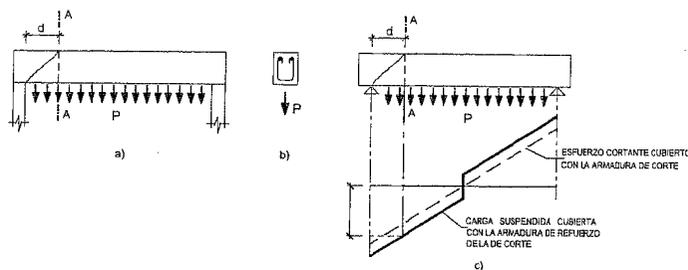


Figura 39-50

Sin embargo, en algunos casos como el de la figura 39-50 a), las cargas cuelgan de la viga y es necesario transferirlas a la cabeza comprimida en la viga mediante un área suplementaria de estribos por unidad de longitud,  $A_{\alpha,s}$ , que debe ser:

$$A_{\alpha,s} = \frac{P_d}{f_{y\alpha,d}} \quad [39-130]$$

El área de armadura  $A_{\alpha,s}$  debe añadirse a la resultante de las necesidades de esfuerzo cortante. ( $P_d$  es el valor de cálculo de la carga).

En el caso analizado en la figura 39-49 b), si como dijimos, se dispone de la armadura de cuelgue, la comprobación puede hacerse en la sección A-A, pero extendiendo la armadura de corte y la de cuelgue hasta la cara del apoyo.

En la práctica se presentan a veces situaciones intermedias como las indicadas en la figura 39-51. La carga se aplica en este caso, no a las caras inferiores de la viga, sino a una zona apreciable del canto, pero situada en la zona inferior. No existe investigación suficiente sobre este tema, por lo que de momento debe disponerse la armadura de suspensión indicada por [39.130].

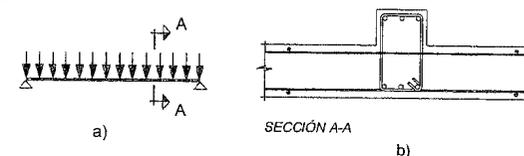


Figura 39-51

Finalmente, existe el caso de cargas colgadas de tipo puntual (fig. 39-52).

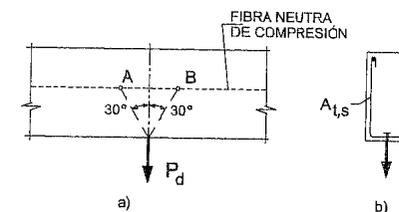


Figura 39-52

El ángulo de reparto de la carga hasta la fibra neutra de tensiones puede suponerse conservadoramente, de  $30^\circ$ . En la longitud AB debe disponerse una armadura vertical de cuelgue  $A_{t,s}$  dada por

$$A_{t,s} = \frac{P_d}{f_{yd}} \quad [39.131]$$

repartida en dicha longitud.

### 39.2.12 VIGAS COLGADAS

En este caso se trata de vigas continuas, cuyos apoyos consisten en la suspensión de otra viga. La figura 39-53 presenta los tres casos posibles. El cuelgue de la viga de

apoyo  $h_o$  puede por tanto ser nulo. La vista lateral del apoyo genérico 39-53 a) se indica en la figura 39-54.

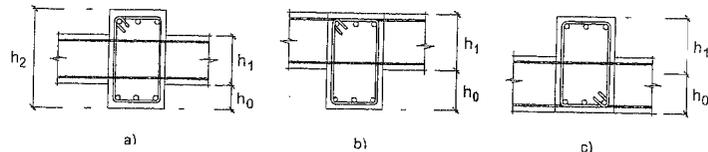


Figura 39-53

La armadura a disponer será:

$$A_{r,s} = \frac{V_{1d} + V_{2d}}{f_{yd}} \quad [39.132]$$

y debe ser distribuida en la longitud  $AB$ , de la viga de apoyo adicionalmente a la requerida por el esfuerzo cortante.  $V_{1d}$  y  $V_{2d}$  son los esfuerzos cortantes en valor absoluto. (Secciones sobre el apoyo de la de viga).

### 39.2.13 ESFUERZO CORTANTE EN PIEZAS COMPUESTAS

El tema es sistemáticamente obviado por las distintas Instrucciones, tanto nacionales como de carácter internacional. La experimentación y los estudios sobre el tema son sumamente escasos<sup>1</sup>.

#### a) Caso de vigas

Sea la sección de la figura 39-55, donde la zona  $H_1$  es de hormigón de resistencia  $f_{ck1}$  y la  $H_2$  de hormigón de resistencia  $f_{ck2}$ . Deben distinguirse tres zonas designadas como  $A$ ,  $B$  y  $C$ . En lo que sigue se supone  $f_{ck2} > f_{ck1}$ .

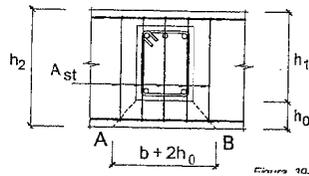


Figura 39-54

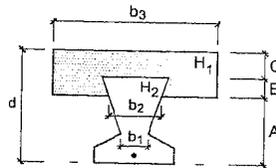


Figura 39-55

En la zona A:

$$V_{cuA} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho_{e1} f_{ck2})^{1/3} b_1 d \quad [39.133]$$

<sup>1</sup> Tratamos aquí únicamente el problema de esfuerzo cortante. El de esfuerzo rasante, que se supone asegurado en la unión entre ambos hormigones, se expondrá en el Capítulo 40.

donde  $\rho_{e1}$  es la cuantía geométrica referida a  $b_1 d$ .

En la zona B:

Se tomará como  $V_{cu}$  el menor de los dos valores<sup>1</sup>.

$$V_{cuB} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho_{e2} f_{ck2})^{1/3} b_2 d \quad [39.134]$$

$$V_{cuB'} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho_{e3} f_{ck1})^{1/3} b_3 d \quad [39.135]$$

$\rho_{e2}$  es la cuantía geométrica referida a  $b_2 d$  y  $\rho_{e3}$  la referida a  $b_3 d$ .

$b_2$  es el menor ancho de hormigón  $H_2$  en la zona B.

En la zona C:

$$V_{cuC} = 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100 \rho_{e3} f_{ck1})^{1/3} b_3 d \quad [39.136]$$

El valor de  $V_{cu}$  correspondiente a la sección compuesta es el menor de los valores  $V_{cu}$  de las tres zonas.

Como ya se dijo, es recomendable si el acero es B-500S multiplicar  $\rho_e$  por  $\frac{500}{400} = 1,25$

#### b) Caso de losas

En el caso de losas (fig. 39-56), de acuerdo con la fórmula [39-95] se tiene,

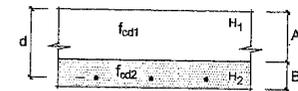


Figura 39-56

Zona A

$$V_{cuA} = 0,12 \left( 1 + \sqrt{\frac{d}{200}} \right) (100 \rho_{e1} f_{ck1})^{1/3} b d \quad [39.137]$$

<sup>1</sup> Con la investigación disponible no cabe pensar en fórmulas aditivas de ambas zonas de hormigón en una sección horizontal.

$$V_{cuB} = 0,12 \left( 1 + \sqrt{\frac{d}{200}} \right) (100 \rho_t f_{ck2})^{1/3} b d \quad [39.138]$$

donde  $\rho_t$  es la cuantía referida a  $bd$  y multiplicada por 1,25 si el acero es B-500S.

Como habitualmente  $f_{ck2} > f_{ck1}$ , el valor a adoptar será  $V_{cuA}$ .

### 39.2.14 CUANTÍAS LÍMITES

La Instrucción EHE establece como condición de cuantía mínima de armadura de corte en vigas

$$\sum \frac{A_{\alpha} f_{y\alpha,d}}{\sin \alpha} \geq 0,02 f_{cd} b_o \quad [39.139]$$

que puede presentarse bajo la forma

$$\sum \frac{0,9 d A_{\alpha} f_{y\alpha,d}}{\sin \alpha} \geq 0,018 f_{cd} b_o d$$

y que para el caso de estribos resulta

$$V_{su,min} \geq 0,018 f_{cd} b_o d$$

o bien

$$\left( \frac{V_{su}}{f_{cd} b_o d} \right)_{min} \geq 0,018 \quad [39.140]$$

La cuantía máxima está ya limitada por las condiciones de limitación de la tensión de compresión del hormigón de las bielas.

#### EJEMPLO 39.4

Dada una viga de 5,80 m de luz libre y de sección rectangular con  $b = 250$  mm,  $d = 565$  mm, con hormigón H-25 y acero B-400S, con  $\gamma_s = 1,35$ ,  $\gamma_q = 1,50$ ,  $\gamma_c = 1,5$  y  $\gamma_s = 1,15$ , calcular la armadura de corte necesaria para resistir una carga permanente de 30 kN/m que incluye el p.p y una sobrecarga de 20 kN/m.

Se desea que la armadura de corte esté constituida por estribos, con tres campos de armado: cuartos extremos de la luz libre y mitad central de la misma. Supóngase  $\theta = 45^\circ$ . La armadura de flexión tiene una cuantía longitudinal  $\rho = 0,0025$ .

*Solución*

$$\text{Carga de cálculo p.m.l.} = 1,35 \cdot 30 + 1,5 \cdot 20 = 70,5 \text{ kN/m}$$

De acuerdo con 39.2.3.2.3 y con 39.2.10 el cortante de cálculo en el cuarto extremo de la luz vale:

$$V_d = 70,5 \left( \frac{5,80}{2} - 0,565 \right) = 164,6 \text{ kN}$$

El cortante de cálculo en el cuarto de la luz libre vale:

$$V_d = 70,5 \left( \frac{5,80}{4} - 0,565 \right) = 62,4 \text{ kN}$$

El cortante resistido por el hormigón vale:

$$V_{cu} = \left[ 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{565}} \right) (0,25 \cdot 25)^{1/3} \right] 250 \cdot 565 = 41,5 \text{ kN}$$

En cuartos extremos de la luz

$$V_{su} = 164,6 - 41,5 = 123,1 \text{ kN}$$

$$123100 = 0,9 \cdot 565 \cdot A_{\alpha} \cdot \frac{400}{1,15}$$

$$A_{\alpha} = 0,70 \text{ mm}^2/\text{mm} = 700 \text{ mm}^2/\text{m} \rightarrow \text{e de dos ramas } \phi \text{ 8 a 150 mm}$$

En la mitad central de la luz

$$V_{su} = 20,9 \text{ kN}$$

Como la cuantía mínima es

$$V_{cu} = 0,018 \cdot \frac{25}{1,5} 250 \cdot 565 = 42375 \text{ N}$$

rige ésta.

$$42375 = 0,9 \cdot 565 \cdot A_{\alpha} \cdot \frac{400}{1,15}$$

$$A_{\alpha} = 0,24 \text{ mm}^2/\text{mm} = 240 \text{ mm}^2/\text{m}$$

e de dos ramas  $\phi \text{ 8 a 300 mm}$

La cuantía máxima está ya limitada por las condiciones de limitación de la tensión de compresión del hormigón de las bielas.

### 39.2.15 DISPOSICIONES RELATIVAS A LA ARMADURA DE ESFUERZO CORTANTE

Las normas sobre formas y radios de doblado de la armadura de corte, se incluyen en el Capítulo 51.

a) La Instrucción EHE establece las siguientes disposiciones relativas a la armadura de esfuerzo cortante.

- La separación  $s_t$  entre armaduras, medida en dirección paralela a la directriz de la pieza, debe, para asegurar el adecuado confinamiento del hormigón sometido a compresión oblicua en las bielas, cumplir con lo siguiente

$$s_t \leq 0,8d \nlessgtr 300 \text{ mm} \quad \text{si} \quad V_{rd} \leq \frac{1}{5} V_{ul}$$

$$s_t \leq 0,6d \nlessgtr 300 \text{ mm} \quad \text{si} \quad \frac{1}{5} V_{ul} < V_{rd} \leq \frac{2}{3} V_{ul}$$

$$s_t \leq 0,3d \nlessgtr 200 \text{ mm} \quad \text{si} \quad V_{rd} > \frac{2}{3} V_{ul}$$

- Si existe armadura de compresión y se tiene en cuenta en el cálculo, los estribos cumplirán con la separación máxima de  $15 \phi_{\text{mín.}}$ , siendo  $\phi_{\text{mín.}}$  el diámetro mínimo de la armadura comprimida y su diámetro no será inferior a  $\frac{\phi_{\text{máx.}}}{4}$ , siendo  $\phi_{\text{máx.}}$  el diámetro máximo de la armadura comprimida<sup>1</sup>.

- Los estribos deben cumplir las separaciones impuestas por razones de fisuración en el Capítulo 47.
- En todos los casos los estribos se prolongarán en la pieza una distancia  $d/2$  más allá de donde dejan de ser necesarios.

b) Conviene completar lo anterior con las recomendaciones siguientes:

- La armadura de tracción debe estar situada dentro de los estribos figura 39-57 a). En la figura 39-57 b) se representa el caso de la armadura de momentos negativos.

Si la armadura se sitúa por fuera, la tensión rasante en el hormigón en el plano A-A (fig. 39-57 b)) vale

$$\tau_d = \frac{V_{d2}}{0,9bd} \quad [39.141]$$

donde  $V_{d2}$  es el esfuerzo cortante concomitante con el momento flector resistido por la armadura  $A_{s2}$ . (La solución sólo sería aceptable si  $\tau_d$  fuera tan bajo que lo pudiera resistir el hormigón sin necesidad de estribos.)

Las soluciones de las figuras 39-57 c) y d) son aceptables pero no la e) en la que se puede producir la solución por corte por la línea inclinada F-F. Análogamente, si se emplean mallas como armadura de corte, la armadura de negativos debe ser encerrada con los estribos indicados en la figura 39-57 f). El estribo dibujado en negro con patilla y gancho permite una colocación fácil.

<sup>1</sup> Esta recomendación es sumamente prudente. Véase la tesis doctoral de J. CORTÉS BRETÓN. (Referencia (39.19)).

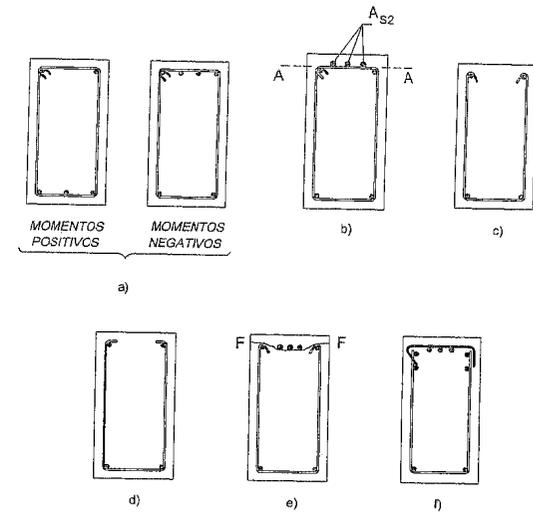


Figura 39-57

- La separación  $s$  entre barras dobladas será, en general, menor que  $0,85 d$ , pudiendo, para  $\alpha = 45^\circ$ , llegar a  $s = 1,2 d$  en zonas donde el esfuerzo cortante no sea máximo.
- Si se emplean barras dobladas, se dispondrán además estribos que absorban al menos  $\frac{V_{su}}{3}$ .
- Un punto no tratado habitualmente en las Normas (fig. 39-58) es el de en qué punto es necesario comenzar a bajar barras dobladas.

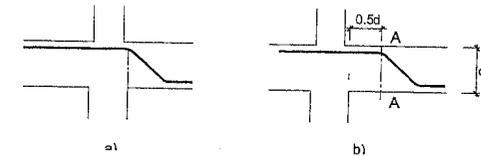


Figura 39-58

La solución clásica es la a). Sin embargo, la experiencia de los ensayos realizados indica que puede comenzarse a bajar barras a  $0,5 d$  de la cara del pilar inferior. Hasta ese punto, basta mantener la secuencia de estribos prevista en la sección A-A. El tema es importante, desde el punto de vista económico, porque en la solución a) la barra doblada es útil a efectos de esfuerzo cortante, pero muy poco eficaz para cubrir momentos negativos. En cambio, la solución b) hace que la barra doblada resulte eficaz para ambos propósitos.

- Debemos añadir que, sobre todo si se emplean forjados de viguetas, que usualmente entrarán en las vigas, la separación  $s$  de estribos no deberá ser inferior a 200 mm. Si a ello se añade la conveniencia práctica de que la separación de estribos sea múltiplo de 50 mm, ello reduce las separaciones posibles a 200, 250 y 300 mm, en estructuras usuales.

Puede ser interesante, en cambio (fig. 39-59), aparear estribos. (Solución a) claramente preferible a la b).

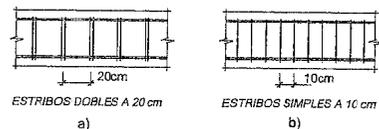


Figura 39-59

- El primer estribo de un vano (fig. 39-60) si se sitúa en el plano de la cara del apoyo, no resulta útil a efectos de corte. Una distancia de 50 mm resulta preferible. El tramo AB de viga no lleva estribos.

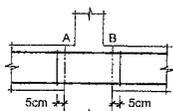


Figura 39-60

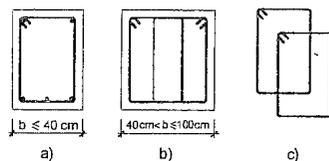


Figura 39-61

- Una recomendación útil en el caso de piezas de ancho importante es la de repartir las armaduras de corte en el ancho de la sección, de forma que no queden zonas de más de 350 mm sin armar.

Para anchos  $b$  superiores a 400 mm, resulta ya conveniente pasar a estribos de más de dos ramas (fig. 39-61).

- Un estribo de una pieza con varias ramas, debe tener una armadura longitudinal en cada doblado (fig. 39-62).

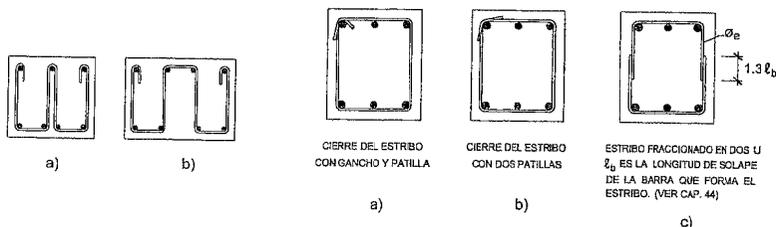


Figura 39-62

Figura 39-63

- En ciertas ocasiones la colocación del estribo debe hacerse después de colocada la parte principal de la ferralla, en particular las armaduras longitudinales. La figura 39-63 indica varias soluciones prácticas posibles.

Para todo lo relativo a formas de ganchos y patillas en estribos, véase el Capítulo 51.

En todos los casos indicados los estribos deben estar debidamente anclados en ambas cabezas. (Recuérdese lo dicho en 39.2, sobre formas de agotamiento por esfuerzo cortante).

En particular deben cumplirse las especificaciones siguientes<sup>1</sup>.

- Los estribos de una sola pata (fig. 39-64 e)), los estribos en  $U$  (fig. 39-57 c) y d) y en  $U$  múltiple (fig. 39-62) deben anclarse mediante:
- Para estribos hasta  $\phi$  25 mm de acero B-500S, se dispondrá un gancho o doblado alrededor de una barra longitudinal y además la distancia desde el punto medio del canto hasta el extremo exterior del estribo no será inferior a  $82 \frac{\phi}{\sqrt{f_{ck}}}$  con  $\phi$  en mm y  $f_{ck}$  en MPa. (Para  $f_{ck} = 25$  MPa, esto significa  $16 \phi$ ).
- En el caso de estribos en  $U$  formados con mallas electrosoldadas, debe cumplirse lo indicado en la figura 39-64 a), b), c) o d). Para estribos de una sola rama, frecuentes en prefabricación, debe seguirse lo indicado en la figura 39-64 e).

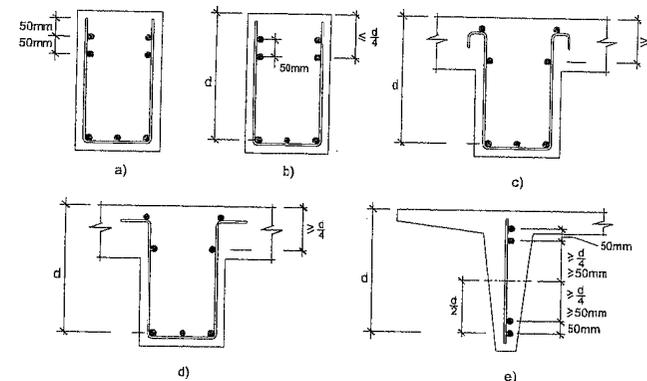


Figura 39-64

### 39.2.16 TEORÍAS DE ESFUERZO CORTANTE BASADAS EN LOS CAMPOS DE PLASTICIDAD DE TENSIONES

Las teorías de RITTER y MÖRSCH partían de suponer un valor fijo para el ángulo de fisuración  $\theta = 45^\circ$ , según vimos en el apartado 39.2.5.2. En la más general

<sup>1</sup> Tomadas de ACI-318-95 (39.8).

de la teoría de bielas de inclinación variable, expuesta en el apartado 39.2.5.1.2, si bien, permite elegir el valor de  $\theta$ , esta elección se hace de forma convencional.

Desde hace mucho tiempo se ha intentado abordar, por métodos energéticos el cálculo a esfuerzo cortante, lo cual en definitiva equivale, dadas las incógnitas  $\sigma_c$  de compresión en las bielas,  $\Delta T$  de incremento de tracción en la armadura (armada y pretensada en el caso más general),  $\sigma_s$  de tensión en la armadura de corte, y ángulo  $\theta$  de formación de fisuras, a establecer las tres ecuaciones de equilibrio más la derivada del cálculo de la energía del sistema. El volumen de investigación sobre el tema ha sido realmente muy importante y aquí se resumen sólo los aspectos más esenciales.

Un primer trabajo notable es el desarrollado por el Prof. KUPFER de la Escuela de Ingenieros de la Universidad Politécnica de Munich en 1964 (39.13). Estudia el problema en teoría elástica y mediante el teorema del mínimo trabajo determina  $\theta$ , que para los casos ordinarios de vigas de hormigón armado resulta inferior a los 45°.

- a) CAMPOS DE PLASTICIDAD DE TENSIONES. Un camino diferente ha sido el de los campos de plasticidad de tensiones en los que deben destacarse los trabajos de THURLIMANN (Suiza) (39.20), NIELSEN (Dinamarca) (39.15) y de VECHIO y COLLINS (Canadá) (39.21).

Curiosamente estos métodos arrancan de un antiguo trabajo de WAGNER en 1929 (39.22), relativo a estructuras metálicas. WAGNER estudió el comportamiento de las vigas de alma delgada, con rigidizadores, después de la presentación del pandeo del alma (fig. 39-65).

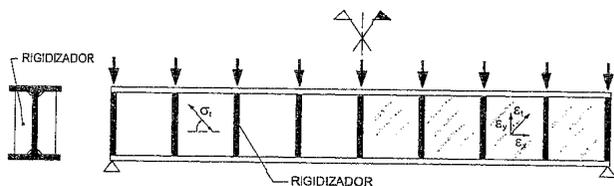


Figura 39-65

Partió de que una vez iniciado el pandeo el alma ya no podía resistir compresiones y que por tanto el esfuerzo cortante tenía que ser resistido por un campo de tensiones de tracción  $\sigma_t$  con ángulo  $\theta$ , tal como se indica en la mitad derecha de la figura 39-38 y a partir de ello estableció que las deformaciones  $\epsilon_x, \epsilon_y$  en las direcciones de la directriz y ortogonal a ella, y la  $\epsilon_t$  en las bielas de tracción estaban ligadas por la ecuación

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\epsilon_x - \epsilon_t}{\epsilon_y - \epsilon_t}$$

La teoría aplicada al campo de tensión de las bielas comprimidas por el esfuerzo cortante en piezas de hormigón armado, resulta (fig. 39-66).

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\epsilon_x - \epsilon_c}{\epsilon_y - \epsilon_c} \quad [39.142]$$

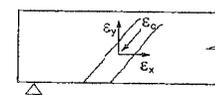


Figura 39-66

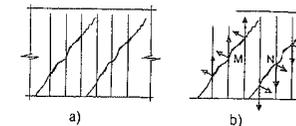


Figura 39-67

donde los alargamientos son positivos y los acortamientos son negativos.

Con este planteamiento, a partir de [39.142] y dada la resultante de tensiones  $\sigma_x, \sigma_y$  debidas al pretensado, en el caso más general, que es de cable oblicuo, podemos establecer las funciones  $\epsilon_x = f(\sigma_x)$ ,  $\epsilon_y = f(\sigma_y)$  y  $\epsilon_c = f(\sigma_c)$ . Para las leyes entre tensiones y deformaciones puede manejarse cualquiera de los modelos adoptados por el MODEL CODE-90 o también el propuesto por COLLINS (39.23). En definitiva con la cuarta ecuación [39.142] se completa la solución del problema.

- b) MÉTODO DEL CAMPO MODIFICADO DE TENSIONES. En el método general del campo de tensiones expuesto en el apartado anterior se parte de suponer que una vez fisurado el hormigón bajo la acción del esfuerzo cortante y formadas las bielas, la tensión de tracción perpendicular a las bielas es nula.

Esto no es cierto en la realidad. Tal como se indica en la figura 39-67 a) la biela está atravesada por la armadura de-corte. Aislando la biela (fig. 39-67 b)) se aprecia la existencia de tracciones perpendiculares al eje de la biela. Considerando una biela aislada en los puntos  $M, N$  de los labios de la fisura la tensión de tracción es absorbida por la armadura de corte. Pero al introducirse ésta en la biela, se va produciendo su anclaje por adherencia al hormigón y transmiten tensiones de tracción al mismo y correlativamente se reduce la de la armadura. El fenómeno es tanto más intenso cuanto más ancha sea la biela, más fino el diámetro de la barra, mejor son sus características adherentes y mayor la resistencia del hormigón.

Esto modifica el campo de tensiones anteriormente expuesto. COLLINS y VECHIO (39.21) han desarrollado un método de cálculo basado en el campo modificado. Una exposición detallada puede verse en el libro de COLLINS (39.23).

No debe olvidarse que el desarrollo de estos métodos exige el conocimiento de la fisuración por cortante y de los fenómenos de anclaje. En ambos campos, especialmente en el primero, nuestro conocimiento es muy imperfecto, por lo que los resultados no pueden tampoco ser, de momento, de una gran precisión.

- c) ESQUEMA DE FORMACIÓN DE UN CAMPO PLÁSTICO DE TENSIONES. De acuerdo con lo anteriormente visto, en la figura 39-68 se representa un dintel continuo de dos vanos sometido a una carga uniformemente repartida  $p$  y a una concentrada  $P$ , así como la distribución de estribos.

En la figura, y a partir de las limitaciones

$$25^\circ \leq \theta \leq 63^\circ$$

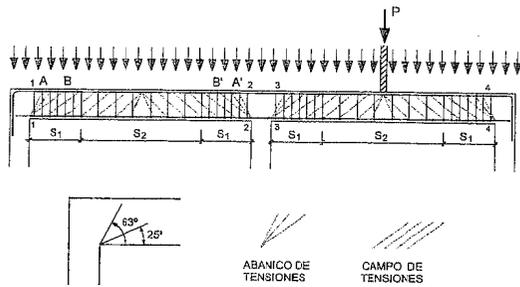


Figura 39-68

se han dibujado los abanicos de tensiones correspondientes a los apoyos. (Regiones D) y a los campos de tensiones de las zonas restantes (Regiones B). Obsérvese que los estribos junto a los apoyos 1, 2, 3 y 4, no funcionan en la resistencia a corte, ya que para ellos  $\theta$  es muy superior a  $63^\circ$ . Los estribos próximos a los apoyos, dan lugar a abanicos de tensiones y los restantes corresponden a campos de tensiones.

### 39.3. PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

La existencia de la fuerza de pretensado introduce variaciones importantes en su resistencia al esfuerzo cortante que se exponen a continuación.

#### 32.3.1 ESFUERZO CORTANTE EFECTIVO

Consideremos una pieza pretensada sometida a las acciones exteriores (fig. 39-69 a) y en ella una rebanada  $AA'-BB'$ , tal como se indica en la figura 39-69 b). Sobre la rebanada actúa la fuerza de cálculo de pretensado  $N_{pd}$  ( $N_{pd} = \gamma_p N_p$ ), formando un ángulo  $\beta$  con la directriz<sup>1</sup>. (Se considera para lo que sigue  $N_p$  positiva cuando es tracción). La fuerza  $N_p$  producirá un diagrama lineal de tensiones de pretensado sobre la sección con tensiones en las fibras extremas  $\sigma_{cp1}$  y  $\sigma_{cp2}$ . (Positivas, para lo que sigue, cuando son compresiones). (Fig. 39-69 c)).

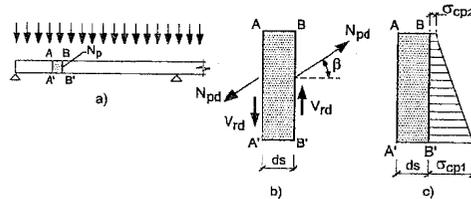


Figura 39-69

<sup>1</sup> En piezas de canto variable,  $\beta$  es el ángulo de la tangente al tendón con el eje OX de la figura 39-38.

Llamando  $V_d$  al esfuerzo cortante de cálculo, debido al peso propio de la pieza y a las restantes acciones exteriores, la fuerza  $N_{pd}$  modifica el valor del esfuerzo cortante en la rebanada en el valor  $N_{pd} \cdot \text{sen } \beta$ , componente de  $N_{pd}$  en el sentido ortogonal a la directriz. Con ello, el esfuerzo cortante efectivo de cálculo será

$$V_{rd} = V_d + N_{pd} \text{sen } \beta \quad [39.143]$$

En [39.143] y para el caso particular de la figura 39-70,  $N_{pd}$  sería compresión y reduciría el valor de pretensado, como es lo habitual, de  $V_d$  a  $V_{rd}$ .

#### 39.3.2 FISURACIÓN DE LA PIEZA POR TRACCIÓN DIAGONAL DEL HORMIGÓN

Consideremos una pieza general sometida a las acciones exteriores y a la fuerza de pretensado. Considerando una sección A-A, las tensiones principales en un punto cualquiera de la sección, sometido a unas tensiones de pretensado  $\sigma_{cp,x}$   $\sigma_{cp,y}$  y a unas tensiones  $\sigma_{ce,x}$   $\sigma_{ce,y}$ , debidas a las acciones exteriores y a unas tensiones de corte  $\tau_{cxy,e}$ ,  $\tau_{cxy,p}$ , debidas respectivamente a las acciones exteriores y al pretensado, tenemos, según las fórmulas clásicas de la teoría de la elasticidad. Véase (39.1).

$$\sigma_{cl} = \frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x} + \sigma_{ce,y} + \sigma_{cp,y}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x} - \sigma_{ce,y} - \sigma_{cp,y}}{2}\right)^2 + (\tau_{cxy,e} + \tau_{cxy,p})^2} \quad [39.144]$$

$$\sigma_{clI} = \frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x} + \sigma_{ce,y} + \sigma_{cp,y}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x} - \sigma_{ce,y} - \sigma_{cp,y}}{2}\right)^2 + (\tau_{cxy,e} + \tau_{cxy,p})^2} \quad [39.145]$$

$$\text{tg } \theta = \sqrt{\frac{\sigma_{ce,y} + \sigma_{cp,y} - \sigma_{cl}}{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x} - \sigma_{cl}}} \quad [39.146]$$

En el caso general de flexión simple sin pretensado vertical, que es el habitual salvo muy raros casos,  $\sigma_{ce,y} = \sigma_{cp,y} = 0$  y llamando  $\tau_{cxy} = \tau_{cxy,e} + \tau_{cxy,p}$ , las fórmulas [39.144], [39.145] y [39.146] se transforman en

$$\sigma_{cl} = \frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x}}{2}\right)^2 + \tau_{cxy}^2} \quad [39.147]$$

$$\sigma_{clI} = \frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x}}{2}\right)^2 + \tau_{cxy}^2} \quad [39.148]$$

$$\operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{-\sigma_{cl}}{\sigma_{ce,x} + \sigma_{cp,x} - \sigma_{cl}}} \quad [39.149]$$

que permiten calcular las tensiones principales en cualquier punto de la sección.

Como veremos más adelante, las únicas tensiones que interesa calcular en la práctica, son las correspondientes al c.d.g. de la sección, que haciendo  $\sigma_{ce,x} = 0$  en las fórmulas anteriores, resultan

$$\sigma_{cl} = \frac{\sigma_{cp}}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_{cp}^2}{4} + \tau_{cv}^2} \quad [39.150]$$

$$\sigma_{cll} = \frac{\sigma_{cp}}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{cp}^2}{4} + \tau_{cv}^2} \quad [39.151]$$

$$\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{\frac{-\sigma_l}{\sigma_c - \sigma_l}} \quad [39.152]$$

La fisuración se producirá cuando la tensión principal de tracción,  $\sigma_{ll}$  alcance el valor de la resistencia media a tracción del hormigón,  $f_{ct,m}$ . (Considerada positiva).

De [39.151], llamando  $\sigma_{cp,o}$  a la tensión de pretensado en la fibra que pasa por el c.d.g. de la sección y  $\tau_c$  a la tensión cortante en el mismo nivel, se obtiene

$$\frac{\sigma_{cp,o}}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{cp,o}^2}{4} + \tau_c^2} = f_{ct,m} \quad [39.153]$$

donde  $\tau_c$  es el valor de la tensión de corte que produce la fisuración del hormigón por tracción diagonal en la sección considerada. De [39.153] obtenemos

$$\tau_{cr} = f_{ct,m} \sqrt{1 - \frac{\sigma_{cp,o}}{f_{ct,m}}} \quad [39.154]$$

y el ángulo  $\theta$  de la fisura [39.152] resulta

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{\frac{2\tau_{cr}}{\sigma_{cp,o}}} \quad [39.155]$$

### EJEMPLO 39.3

Dada la sección B-B' de la figura 39-70 (coincide con la 39-5), calcular las tensiones cortantes que producen la fisuración del alma por tracción diagonal; suponiendo hormigón H-40.

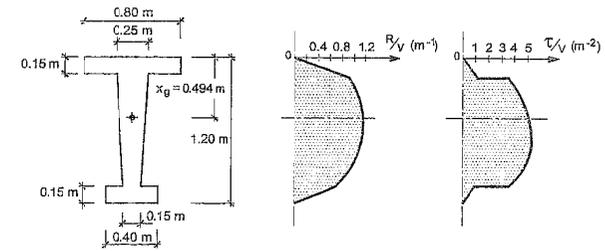


Figura 39-70

- En la hipótesis de que la sección es armada.
- En la hipótesis de que sobre ella actúa una fuerza de pretensado con armaduras pretesas que produce tensiones en fibras extremas  $\sigma_{c1} = 11 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{c2} = 0$ .

Solución

- Si la sección es de hormigón armado, la tensión  $\tau_c$  a nivel del c.d.g., de acuerdo con [39.15], resulta

$$\sigma_{ll} = f_{ct,m} = \tau_{cr,h}$$

Para hormigón H-40, de la Tabla T-28.1 se obtiene  $f_{ct,m} = 3,5 \text{ N/mm}^2$  y por tanto  $\tau_{cr,h} = 3,5 \text{ N/mm}^2$ .

- Si la sección es de hormigón pretensado, la tensión  $\sigma_{cp,o}$  a nivel del c.d.g. vale

$$\sigma_{cp,o} = \frac{494}{1.200} \cdot 11 = 4,5 \text{ N/mm}^2$$

y de acuerdo con [39.154], con  $f_{ct,m} = 3,5 \text{ N/mm}^2$

$$\tau_{cr,p} = 3,5 \sqrt{1 + \frac{4,5}{3,5}} = 5,3 \text{ N/mm}^2$$

Como a igualdad de tensión transversal, los esfuerzos cortantes resistidos aumentan en proporción a los valores de  $\tau_c$ , el incremento de capacidad resistente debido al pretensado es en este caso igual a

$$\frac{\tau_{cr,p}}{\tau_{cr,h}} = \frac{5,3}{3,5} = 1,51$$

es decir del 35%.

El ángulo  $\theta$  de la fisuración, se obtiene de [39.155]

$$\operatorname{tg} 2\theta = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,3}{4,5}} = 1,53$$

$$\theta = 28,4^\circ$$

### 39.3.3 RESISTENCIA A ESFUERZO CORTANTE DE ELEMENTOS LINEALES

El planteamiento es análogo al expuesto en 39.2.5 para elementos de hormigón armado, con las salvedades que a continuación se exponen:

#### a) Esfuerzo cortante resistido por el hormigón

De acuerdo con EHE, en elementos lineales el esfuerzo cortante resistido por el hormigón viene dado por la fórmula experimental

$$V_{cu} = [0,10 \xi (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} - 0,15 \sigma'_{cd}] b_o d \beta \quad [39.156]$$

donde

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad \text{con } d \text{ en mm}$$

$\rho_l$  = Cuantía geométrica de la armadura longitudinal traccionada, pasiva y activa adherente, anclada a una distancia  $k_{td}$  a partir de la sección considerada

$$\rho_l = \frac{A_s + A_p \cdot \frac{f_{yp}}{f_{yd}}}{b_o d} \geq 0,02$$

$\sigma'_{cd}$  =  $\frac{N_d}{A_c}$ , donde  $N_d$  es el esfuerzo axial de cálculo (positivo si es tracción)

incluyendo el pretensado con su valor de cálculo.

$b_o$  =  $b - n \Sigma \phi$ , donde  $b$  es el ancho mínimo del elemento en todo el canto útil,  $\phi$ , suma de los diámetros de las vainas al nivel en que resulte más desfavorable el valor  $b - n \Sigma \phi$ ,

$n = 0,5$  para vainas con armadura adherente

$n = 1,0$  para vainas con armadura no adherente

$n \Sigma \phi$  se tomará como 0 si  $\Sigma \phi < \frac{b}{6}$

$d$  = Canto útil referido al conjunto de las capacidades mecánicas de las armaduras pasiva y activa.

El valor de  $\beta$  viene definido por

$$\beta = \frac{2 \cot g \theta - 1}{2 \cot g \theta_e - 1} \quad \text{si } 0,5 \leq \cot g \theta < \cot g \theta_e \quad [39.157]$$

1 La fórmula está basada en ensayos realizados con acero B 400S. Si se emplea acero B 500S, debe multiplicarse el valor de  $\rho_l$  por 1,25 y el límite de 0,02 debe reducirse a 0,016.

$$\beta = \frac{\cot g \theta - 2}{\cot g \theta_e - 2} \quad \text{si } \cot g \theta_e \leq \cot g \theta \leq 2 \quad [39.158]$$

donde  $\theta_e$  es el ángulo de referencia de inclinación de las fisuras, calculado mediante la expresión

$$\cot g \theta_e = \sqrt{\frac{f_{ct,m} - \sigma_{cey,o} - \sigma_{cpx,o}}{f_{ct,m} - \sigma_{cey,o} - \sigma_{cpx,o}}} \quad [39.159]$$

y  $\theta$  es el ángulo elegido para el cálculo a esfuerzo cortante, dentro de la limitación [39.82] ó [39.87], obtenido haciendo  $\sigma_{ct} = f_{ctm}$  en [39.144] y sustituyendo  $\sigma_{ct}$  en [39.146].  $\sigma_{cey,o}$ ,  $\sigma_{cpx,o}$  son las tensiones en el c.d.g de la sección debidas a las acciones exteriores y  $\sigma_{cpx,o}$ ,  $\sigma_{cpx,o}$  las debidas en el mismo punto a la fuerza de pretensado (Fig. 39-71).

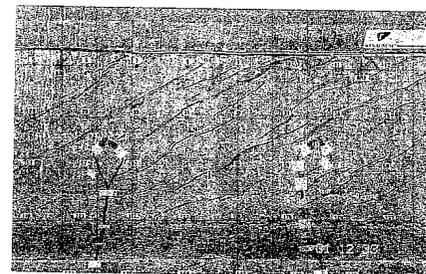


Figura 39-71

Formación de fisuras de corte en una viga pretensada. (Ensayos de INTEMAC en un plan de investigación de FEDECE).

Si como es el caso ordinario, no hay pretensado vertical,  $\sigma_{cpx,o}$  y si la pieza está sometida a flexión simple  $\sigma_{cey,o} = \sigma_{cey,o} = 0$ , con lo que [39.159] se transforma en

$$\cot g \theta_e = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{cpx,o}}{f_{ct,m}}} \quad [39.160]$$

Es interesante examinar la variación de  $\beta$  en función de  $\theta_e$  y  $\theta$  (fig. 39-72). Como puede verse, para cada valor de  $\theta_e$  el valor máximo  $\beta = 1$  se obtiene adoptando para el cálculo  $\theta = \theta_e$ . Si se adopta el método de las bielas de inclinación variable para el cálculo de la armadura de corte, debe atenderse a lo siguiente<sup>1</sup>:

1 En principio cabe extrañarse de que formándose las fisuras con ángulo  $\theta_e$ , pueda adoptarse para el cálculo de las bielas de inclinación variable otro diferente. La razón es que en el equilibrio del sistema interviene también el rozamiento entre labios de las fisuras.

- Si la pieza pretensada lo es con armaduras pretensas, la armadura pretensada es constante a lo largo de la luz, por lo que la reducción de armadura de tracción derivada de adoptarse valores de  $\theta$  altos, no ahorra armadura de tracción y en cambio reduce  $\beta$  y por tanto  $V_{cu}$ . En estos casos interesan los valores de  $\theta_e$  bajos ya que reducirían la cantidad de estribos. Como en la práctica el valor [39.157] suele ser próximo al límite inferior de  $27^\circ$ , lo más práctico es adoptar  $\theta = \theta_e$ .

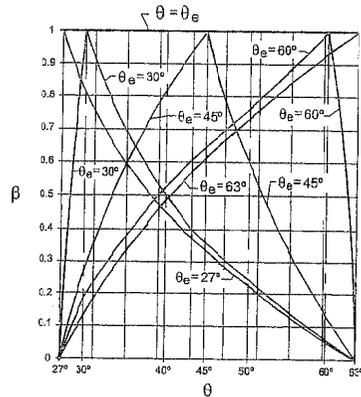


Figura 39-72

- Si la armadura es postesa, si bien puede obtenerse una economía en su cantidad adoptando valores altos de  $\theta$  debe considerarse que si bien se ahorra armadura de tracción, se reducirá el valor de  $V_{cu}$  y aumentará la cuantía de estribos. El valor interesante de  $\theta$  es el que optimice el corte, pero usualmente lo más interesante, también en este caso es adoptar  $\theta = \theta_e$ .

**b) Esfuerzo cortante resistido por la armadura de corte**

Vale íntegramente lo expuesto en 39.2.5 b) y en particular las fórmulas [39.65] y [39.66].

**c) Compresión máxima admisible en las bielas**

Vale íntegramente lo expuesto en 39.2.5.c) y en particular las fórmulas [39.65] y [39.66].

Recuérdese que debe incluirse en este caso el coeficiente K dado por [39.69], donde  $N_d$  incluye el esfuerzo axial, si lo hubiera, y la componente de la fuerza de pretensado paralela a la directriz de la pieza.

**39.3.4 CONDICIONES DE COMPROBACIÓN**

Rige íntegramente lo expuesto en 39.2.5.1 y en particular las fórmulas [39.72] y [39.73].

**39.3.4.1 Cálculo a esfuerzo cortante de piezas lineales pretensadas según EHE**

Calculado el valor de  $V_{cu}$  con [39.156], adoptado el correspondiente valor de  $\theta$ , el valor de  $V_{su}$  se calcula mediante las fórmulas [39.65] y [39.66].

La comprobación de la compresión de las bielas se realiza con [39.67] y [39.70].

**39.3.4.2 Cálculo de esfuerzo cortante de piezas lineales pretensadas según el eurocódigo EC-2**

El EC-2 adopta como dijimos un método normalizado y otro de bielas de inclinación variable.

Vale íntegramente lo expuesto en 39.2.5.1.2.

Recuérdese que en el valor de  $V_{cu}$  dado por [39.81], el valor de  $\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}$ , incluye el efecto del pretensado.

**EJEMPLO 39.5**

En la viga de la figura 39-73 a), construida con hormigón H-50 y cuya sección transversal se indica en b), actúa una fuerza de pretensado  $N_p = 625$  kN, que forma  $4,75^\circ$  con la horizontal y otra horizontal de valor 1.250 kN. El esfuerzo cortante de cálculo en la cara frontal de la rebanada es de 1.350 kN y el diagrama de tensiones en la sección B-B' se indica en las figuras c) y d). La cuantía de armadura longitudinal es  $\rho_t = 0,031$ .

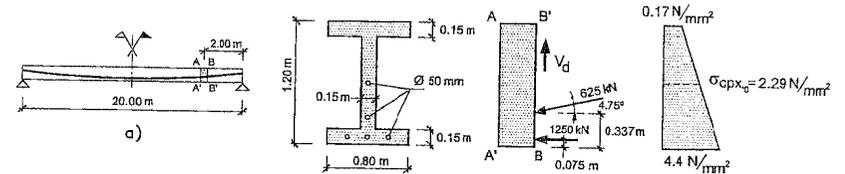


Figura 39-73

El esfuerzo cortante efectivo en la sección B-B' será

$$V_{rd} = 1.350 - 625 \cos 85,25^\circ = 1.298 \text{ kN}$$

Para el cálculo de  $V_{cu}$ , calculamos primero el valor de  $\theta_e$ . Para H-50,  $f_{ct,m} = 4,1$  N/mm<sup>2</sup> y de [39.159] tenemos

$$\text{con } \sigma_{cxy,o} = \sigma_{cpy} = 0 \text{ y } \sigma_{cpx,o} = -2,29 \text{ N/mm}^2$$

$$\cotg \theta_e = \sqrt{\frac{4,1 + 2,29}{4,1}} = 1,25$$

$$\theta_e = 39^\circ$$

Tomando  $\theta = \theta_e = 39^\circ$ , con lo que  $\beta = 1$  y como  $\rho_t > 0,02$ .

$$V_{cu} = \left[ 0,10 \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{1.200}} \right) (100 \cdot 0,02 \cdot 50)^{1/3} + 0,15 \frac{625.000 \cos 4,75^\circ + 1.250.000}{375.000} \right] \cdot (150 - 50) \cdot 0,9 \cdot 1.200 = 152 \text{ kN}$$

$$V_{su} = V_{rd} - V_{cu} = 1.298 - 152 = 1.146 \text{ kN}$$

y con estribos de acero B 400S, de acuerdo con [39.67] para  $\alpha = 90^\circ$  y  $\theta = 39^\circ$

$$1.146.000 = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 1.200 A_\alpha \frac{400}{1,15} \cot g 39^\circ$$

$A_\alpha = 2,65 \text{ mm}^2/\text{mm}$ , que son e  $\phi 12$  de dos ramas a 85 mm.

### BIBLIOGRAFÍA

- (39.1) TORROJA, E. "Lecciones elementales de elasticidad con aplicación a la técnica de construcción". DOSSAT. Madrid. 1951.
- (39.2) FLORIN, G. "Shear and bond in reinforced concrete". Trans Tech Publications. Pennsylvania. 1980.
- (39.3) CALAVERA, J. "Some anomalies in the shear at the interface design of composite members". Betonwerk + Fertigteil-Technik. Heft 5/1989.
- (39.4) MÖRSCH, E. "Der eisenbeton. Seine theorie und auwendung". Wittwer. Stuttgart. 1908.
- (39.5) LEONHARDT, F. "Reducing the shear reinforcement in reinforced concrete beams and slabs". Magazine of Concrete Research. December. 1965.
- (39.6) BAUMANN, T.; RUSCH, A. "Versuche zum studium der verdubelungswirkung der biegezugbewehrung eines stahlbetonbalkens". Deutscher Ausschuss für stahlbeton. Berlin. Nº. 210. 1970.
- (39.7) WALRAVEN, J.C. "Aggregate interlok. A theoretical and experimental analysis". Delf University Press. 1980.
- (39.8) "Building code requirements for structural concrete" (ACI 318-95). American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (39.9) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; DELIBES, A.; FERNÁNDEZ PARÍS, J.M. "Influencia de las compresiones previas en el hormigón sobre su microfisuración y resistencia a compresión". ASIC. 1977.
- (39.10) CALAVERA, J. "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". INTEMAC. Madrid. 4ª. Edición. 1988.
- (39.11) RITTER, W. "Constructions techniques de Henebique. Schweizerische Bauzeitung. Zurich. Feb. 1899.
- (39.12) MÖRSCH, E. "La construcción en hormigón armado. Su teoría y práctica". INTEMAC. Madrid. 1995.
- (39.13) KUPFER, H. "Extension to the truss analogy of Mörsch using the principle of minimum potential energy". CEB. Bulletin d'Information Nº. 40. Jan. 1964.
- (39.14) COLLINS, M.P.; MITCHELL, D. "Shear and torsion design of prestressed and nonprestressed concrete beams". P.C.I. Journal. Sep-Oct. 1980.
- (39.15) NIELSEN, M.P. "Limit analysis and concrete plasticity". Prentice-Hall. New Jersey. 1984.
- (39.16) APARICIO, A.C.; CALAVERA, J.; del POZO, F.J. "Plan de investigación sobre la compresión máxima en bielas, por esfuerzo cortante, para vigas prefabricadas de hormigón pretensado con armaduras pretensas". FEDECE. Noviembre. 1997.
- (39.17) MATTOCK, A.H.; HAWKINS, N.M. "Shear transfer in reinforced concrete research". Journal P.C.I. March-April 1972.
- (39.18) MATTOCK, A.H. "Shear transfer in concrete having reinforcement at an angle to the shear plane". "Shear in reinforced concrete". SP-42. A.C.I. Detroit. 1974.
- (39.19) CORTÉS BRETÓN, J. "Estudio experimental de la capacidad mecánica de secciones de hormigón con armadura comprimida según el grado de coacción al pandeo de las armaduras". Tesis doctoral realizada bajo la dirección de J. Calavera, en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. Septiembre. 1989.
- (39.20) THÜRLIMANN, B.; MARTI, P.; PRALONG, J.; RITZ, P.; IMMERLI, B. "Applications of the theory of plasticity to reinforced concrete". Eidgenössische Technische Hochschule. Zurich. April. 1983.
- (39.21) VECHIO, F.; COLLINS, M.P. "The response of reinforced concrete to inplane shear and normal stresses". Pub. 82/03. University of Toronto. 1982.
- (39.22) WARGNER, N. "Ebene Blechwandträger mit sehr dunnen stegblecti. Zeitschrift für Fugtechnik. Vol. 20. 1929.
- (39.23) COLLINS, M.P. "Prestressed concrete structures". Prentice-Hall. New Jersey. 1991.
- (39.24) MAC GREGOR, J.G.; HANSON, J.M. "Proposed changes in shear provisions for reinforced and prestressed concrete beams". Journal of A.C.I. April 1969.

## CAPÍTULO 40

### ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE ESFUERZO RASANTE

#### 40.1 GENERALIDADES

Tanto en obras públicas como en edificación es frecuente el uso de secciones compuestas, es decir, secciones formadas por la asociación de una parte prefabricada con otra hormigonada "in situ". En general, ambos hormigones suelen tener resistencias diferentes a 28 días, además, por supuesto, de distintas edades.

La posibilidad de funcionamiento de una pieza de este tipo se basa en la capacidad que ambos hormigones presenten para trabajar unidos. Pueden incluso considerarse dos tipos de piezas compuestas, según que la unión de los dos hormigones se garantice solamente en el estado de servicio o permanezca hasta rotura. Este último caso es el más frecuente.

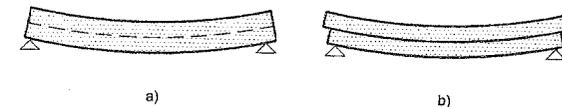


Figura 40-1

El fallo típico de esfuerzo rasante se indica en la figura 40-1. En la figura a) se indica una flexión conjunta de ambas partes. En la figura b) se indica la formación de una fisura a lo largo de la superficie de contacto. En el caso a) la resistencia a flexión es la de la pieza compuesta. En el caso b) la resistencia se reduce a la de la *suma de las de las dos piezas simples*.

Si ambas piezas se "cosen" mediante abundante armadura transversal, el fallo es el indicado en la figura 40-2<sup>1</sup>.

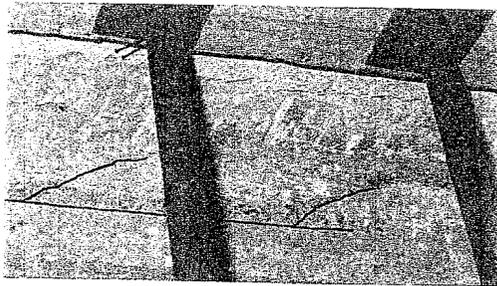


Figura 40-2

En la figura 40-2 se indica un fallo real ocurrido en una estructura, análogo al indicado en la figura 40-1 b).

## 40.2 CÁLCULO DE LA TENSIÓN RASANTE EN UNA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN SIMPLE

### 40.2.1. SECCIONES NO FISURADAS CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

Sea  $P$  el contorno de la pieza prefabricada (figura 40-3) y  $H$  el contorno de la zona hormigonada "in situ". Sea  $O$  el centro de gravedad de la sección homogeneizada, es decir, el obtenido afectando a cada elemento diferencial de área de la sección del hormigón "in situ", de un coeficiente  $n = \frac{E'_{ch}}{E'_{cp}}$ , donde  $E'_{ch}$  y  $E'_{cp}$  son los módulos de deformación del hormigón "in situ" y el de la pieza prefabricada. Las áreas de armadura se homogeneizan con  $m_s = \frac{E_s}{E'_{cp}}$  y  $m_p = \frac{E_p}{E'_{cp}}$ . [1]  $E_p$  es el módulo de deformación de la armadura.

A lo largo de la directriz de la pieza consideramos dos secciones normales  $A$  y  $A'$  separadas  $ds$ . La resultante de tensiones normales, en la sección  $A$ , actuantes sobre el hormigón "in situ", será:

$$R = \int_{y_1}^{y_2} \sigma b dy, \text{ donde en general } b = \varphi(y)$$

<sup>1</sup> Si la resistencia de la unión es muy alta, el fallo, en vez de producirse por un deslizamiento a lo largo de la superficie de contacto, puede producirse por excesiva tracción o compresión diagonal, pero eso ya se habrá considerado en la comprobación de la pieza a esfuerzo cortante.

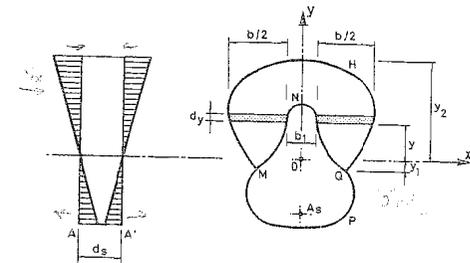


Figura 40-3

siendo:

$$\sigma = n \frac{My}{I}$$

$b$  = Ancho de la sección de hormigón "in situ", a distancia  $y$ .

$M$  = Momento flector actuante en la sección.

$I$  = Momento de inercia de la sección homogeneizada respecto a  $OX$ . En este valor de  $I$ , se tienen en cuenta las secciones  $A_s$  y  $A_p$  de armadura con un coeficiente de equivalencia  $m_s = \frac{E_s}{E'_{cp}}$  y  $m_p = \frac{E_p}{E'_{cp}}$ . De análoga forma se

procedería con las eventuales armaduras situadas en la zona comprimida de la sección.

Igualmente, la resultante en la sección  $A'$  será:

$$R' = \int_{y_1}^{y_2} \sigma' b dy = \int_{y_1}^{y_2} (M + dM) \frac{y}{I} b dy$$

y podemos escribir:

$$R' = \int_{y_1}^{y_2} \sigma b dy + \int_{y_1}^{y_2} \sigma' b dy = R ds$$

siendo  $R$  la resultante de tensiones tangenciales paralelas a la directriz de la pieza, producidas en el contorno  $MNQ$ , por unidad de longitud de pieza.

Con  $\sigma = n \frac{My}{I}$   $\sigma' = n \frac{(M + dM)y}{I}$  podemos escribir:

$$\int_{y_1}^{y_2} n \frac{dM}{I} b y dy = R ds$$

$$\frac{dM}{I} \int_{y_1}^{y_2} n b y dy = R ds \rightarrow \frac{S}{I} \cdot \frac{dM}{ds} = R \quad [40.1]$$

o bien con  $\frac{dM}{ds} = V_d$  ( $V_d$  = esfuerzo cortante de cálculo)<sup>1</sup> para una barra de hormigón

$$R_d = \frac{V_d S}{I} \quad [40.2]$$

donde  $S$  es el momento estático de la sección homogeneizada de hormigón "in situ" respecto al eje  $OX$ .

La expresión [40.2] proporciona el valor de la fuerza  $R_d$  por unidad de longitud de pieza debida a la flexión simple de la misma.

El valor medio de la tensión rasante en la superficie de contacto entre los dos hormigones, si llamamos  $p$  al perímetro  $MNQ$  de contacto, viene dado por

$$\tau_{md} = \frac{V_d S}{p I} \quad [40.3]$$

Sin embargo, este valor medio requiere consideraciones especiales:

- Si la superficie de contacto es del tipo  $AB$ , de la figura 40-4 el valor puede estimarse como una medida útil para el estudio de la resistencia de la unión.

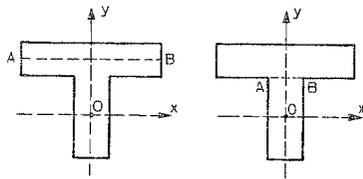


Figura 40-4

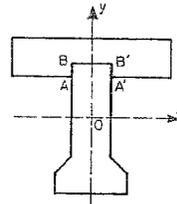


Figura 40-5

- Si la superficie de contacto es del tipo  $ABB'A'$ , de la figura 40-5  $\tau_{md}$  podría ser aceptable y, sin embargo, el valor  $\tau_d$  en algunos puntos ser excesivo y provocar el principio de un fallo progresivo.

Cuando la fibra  $y_1$  coincide con el nivel de c.d.g., es decir, cuando  $y_1 = 0$ , se tiene:

<sup>1</sup> Se supone que la sección está en régimen lineal, pero que la pieza ha alcanzado el agotamiento. (En general, en otra sección).

$$F = \int_0^{y_2} (\sigma b + \sigma_1 b_1) dy = \int_0^{y_2} \left( n \frac{Mb}{I} + \frac{Mb_1}{I} \right) y dy = \frac{M}{I} \int_0^{y_2} (nb + b_1) y dy = \frac{M S_o}{I} \quad [40.4]$$

donde  $F$  es la resultante de compresiones y  $S_o$  el momento estático de la parte de sección comprimida (prefabricada e "in situ"), respecto al eje que pasa por el c.d.g. de la sección total homogeneizada.

De [40.4],  $\frac{I}{S_o} = \frac{M}{F} = z$ , siendo  $z$  el brazo mecánico, es decir, la distancia entre las resultantes  $F$  de las tracciones y compresiones actuantes sobre la sección. Por tanto, si la superficie de contacto es plana y paralela a  $OX$ , pasa por el centro de gravedad y tiene ancho  $b$ , la fórmula [40.3], al ser  $S_o = S$ , se transforma en:

$$\tau_{md} = \frac{V_d}{bz} \quad [40.5]$$

siendo  $V_d$  el esfuerzo cortante actuante en la sección.

En todos los demás casos es necesario manejar la fórmula general [40.3].

#### 40.2.2 SECCIONES FISURADAS CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

En este caso, en la figura 40-6 no se tiene en cuenta el hormigón situado bajo el eje  $OX$  que pasa por el nuevo centro de gravedad  $O'$ .

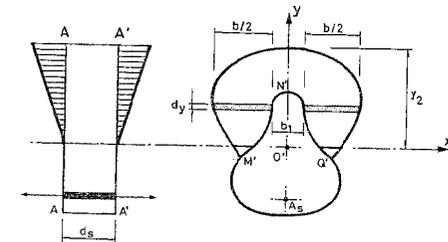


Figura 40-6

La resultante de las tensiones normales en la sección  $A$  sobre el hormigón "in situ" es

$$\int_0^{y_2} \sigma b dy$$

Sea  $I_f$  el momento de inercia de la sección comprimida (prefabricada e "in situ"), más la armadura debidamente homogeneizada. Por tanto:

$$\sigma = n \frac{M y}{I_f} \text{ en el hormigón "in situ"}$$

Análogamente sobre la sección  $A'$ , la resultante de las compresiones sobre el hormigón "in situ" vale

$$\int_0^{y_2} \sigma' b dy$$

y podemos escribir

$$\int_0^{y_2} \sigma b dy - \int_0^{y_2} \sigma' b dy = R ds$$

e igual que en el caso anterior

$$\int_0^{y_2} n \frac{dM}{I_f} b y dy = R ds$$

o bien

$$\frac{S_f}{I_f} \cdot \frac{dM}{ds} = R \rightarrow R = \frac{V S_f}{I_f}$$

y en valores de cálculo

$$R_d = \frac{V_d S_f}{I_f} \quad [40.6]$$

donde  $S_f$  es el momento estático de la zona de hormigón "in situ" comprimida, respecto al eje que pasa por el c.d.g.,  $O'$ , de la sección fisurada homogeneizada.

La tensión media a lo largo de la línea de contacto  $M'N'Q'$  entre hormigón "in situ" y pieza prefabricada, de longitud  $p$ , vale:

$$\tau_{md} = \frac{V_d S_f}{p I_f} \quad [40.7]$$

En el caso particular de que el perímetro coincida con el eje  $OX$  o esté situado por debajo de él (figura 40-7),

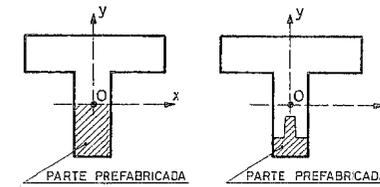


Figura 40-7

la fórmula [40.5] se transforma<sup>1</sup>

$$\tau_{md} = \frac{V_d}{p} \frac{I_f}{S_f} = \frac{V_d}{p z} \quad [40.8]$$

siendo  $z$  el brazo mecánico, es decir, la distancia del c.d.g. del volumen de compresiones a la armadura de tracción.

Si no se cumple la condición indicada, es necesario usar la fórmula [40.7].

#### 40.2.3 SECCIÓN FISURADA CON RELACIÓN NO LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES

a) Sea una sección como la indicada en la figura 40-8, tal que en rotura el bloque comprimido afecte sólo al hormigón "in situ".

En ella, el bloque de compresión en las fases de prerrotura hasta rotura está situado en la zona de hormigón "in situ". Siendo  $R$  la fuerza rasante por unidad de longitud se tiene

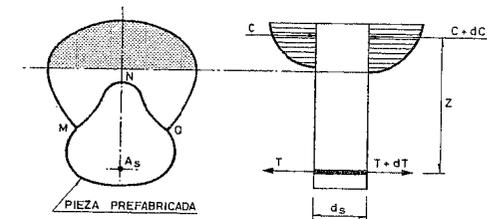


Figura 40-8

<sup>1</sup> Obsérvese que, en ese caso, la fuerza de compresión

$$F = \int_0^{y_2} (\sigma' b_1 + \sigma b) dy = \frac{M}{I_f} \int_0^{y_2} (b_1 + nb) y dy = \frac{M S_f}{I_f}, \text{ luego}$$

$$\frac{I_f}{S_f} = \frac{M}{F} = z$$

$$R ds = dC = \frac{dM}{z}$$

La fuerza rasante por unidad de longitud

$$R = \frac{1}{z} \cdot \frac{dM}{ds} = \frac{V}{z}$$

y en valores de cálculo

$$R_d = \frac{V_d}{z} \quad [40.9]$$

y la tensión media rasante a lo largo del perímetro  $MNQ$  de contacto, de longitud  $p$

$$\tau_{md} = \frac{V_d}{p z} \quad [40.10]$$

- b) Si la acción es tal (figura 40-9) que el bloque de compresión en rotura afecta sólo al hormigón de la pieza prefabricada, el razonamiento realizado en a) y las fórmulas [40.9] y [40.10] siguen siendo válidos.

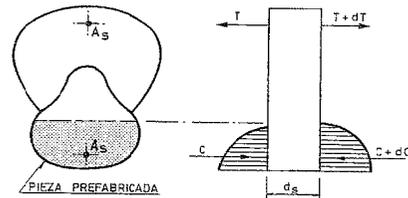


Figura 40-9

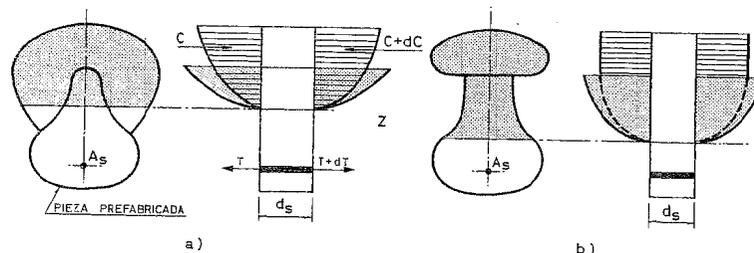


Figura 40-10

- c) En cambio, consideremos los casos indicados en la figura 40-10.

No existe posibilidad de una representación analítica, válida a estos efectos, de la curva tensión-deformación del hormigón, sino que ésta depende de muchas variables y, en particular, del tipo de carga, breve o de larga duración, que produce las tensiones. Por lo tanto, en cuanto el bloque afecta a parte del hormigón "in situ" y a parte de la pieza prefabricada, no es posible obtener una expresión válida de la resultante de compresiones sobre el hormigón "in situ" y, por tanto, tampoco de la tensión rasante. En los casos como el indicado en 40.10 b) se aprecia que la fuerza rasante puede ser muy pequeña y si adoptamos un diagrama rectangular o el hormigón "in situ" está en rotura en la zona rectangular de la parábola rectángulo, la fuerza rasante puede, incluso, resultar nula. Esto último es una expresión límite derivada de las simplificaciones introducidas al aceptar tales diagramas, pero la conclusión no hace más que señalar que, en esas zonas, la tensión rasante es muy pequeña.

El aplicar la fórmula [40.10] evidentemente está del lado de la seguridad, pero puede conducir a una seguridad excesiva<sup>1</sup>. (Sobre este tema véase CALAVERA (40.1)).

### 40.3 CÁLCULO DE TENSIONES RASANTES EN PIEZAS SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

#### 40.3.1 TIPO DE UNIÓN

En general, se presentan dos tipos de unión entre el hormigón de la pieza prefabricada y el hormigón "in situ".

##### a) Unión frágil

Es la existente cuando no se dispone armadura transversal o ésta es de muy baja cuantía. En estos casos, la rotura de la adherencia de ambos hormigones se presenta de forma repentina, con un deslizamiento relativo entre ambos sumamente pequeño. El fenómeno presenta una rotura frágil (rotura agria y sin aviso) y, por otra parte, ejemplares teóricamente iguales de piezas presentan variaciones importantes en el valor de su rotura de adherencia. No existe ninguna posibilidad práctica de "readaptación" del fenómeno a lo largo de la luz, ni del perímetro de la sección, sino que la rotura se inicia por el punto en que se rebasa el valor límite de la tensión rasante y se propaga al resto (40.2), (40.3), (40.4), (40.6), (40.7) y (40.8).

El carácter frágil de la rotura, la dispersión que presenta y la sensibilidad de este valor (40.4) al polvo y suciedad interpuestos en la unión hacen que se deba ser muy prudente al fijar los coeficientes de seguridad y que cualquier investigación experimental deba abarcar un número razonable de ensayos y no unos pocos valores aislados.

<sup>1</sup> Debe señalarse, para el caso de piezas compuestas, que las tensiones rasantes en estado límite último, son independientes de si la pieza ha sido hormigonada con o sin sopandas. Este aspecto afecta únicamente a las tensiones rasantes en servicio.

GONZÁLEZ VALLE<sup>1</sup> ha realizado una investigación extraordinariamente importante sobre la influencia que diferentes aspectos relacionados con la ejecución tienen en el comportamiento de las uniones sin armadura de cosido. Su investigación se centró en la primera parte del diagrama cargas desplazamientos establecido por HANSON, y sus resultados confirman que estas uniones son frágiles y de gran rigidez, pudiendo ser consideradas las piezas como monolíticas, pero teniendo condicionada la "interfase" su resistencia por la adhesión entre los hormigones más que por la rugosidad de la superficie de contacto (figura 40-11). Asimismo de la investigación aludida se deduce la influencia negativa en la resistencia en las uniones del encharcamiento, y la incidencia positiva del cepillado. Los procesos de compactación empleados en la fabricación de las piezas de ensayo, que fueron picado enérgico con barra y vibración interna, no presentaron influencia apreciable en la resistencia tangencial de las uniones para el modelo adoptado en la investigación.

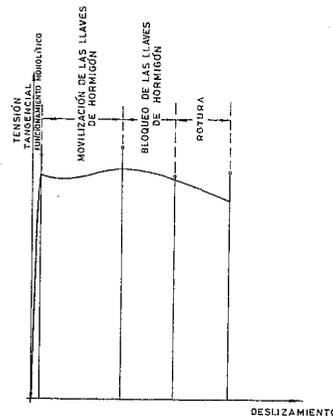


Figura 40-11

#### b) Unión dúctil. Concepto de fuerza rasante

Es la existente en el caso de cuantías apreciables de armadura transversal. La presencia de la armadura hace dúctil la rotura y permite aceptar una redistribución del fenómeno, al mismo tiempo que reducir los coeficientes de seguridad.

En este caso, es útil el concepto de fuerza rasante (figura 40-12).

La figura 40-12 a) indica el caso de vano más general de forjado, en que un apoyo es articulación, y el otro tiene un empotramiento de grado cualquiera.

<sup>1</sup> Véase (40.9): "Estudio experimental del comportamiento de juntas entre hormigones in situ y prefabricados con distintos tratamientos en la unión". Tesis Doctoral de E. GONZÁLEZ VALLE, en la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, realizada en el Laboratorio de INTEMAC, bajo la dirección de J. CALAVERA.

Otro trabajo importante es el de la tesis doctoral de J. GÁLVEZ, bajo la dirección de E. GONZÁLEZ VALLE (40.18).

En 40-12 b) se indican las tensiones rasantes que la parte de hormigón "in situ" ejerce sobre la parte prefabricada. Obsérvese que las tensiones se orientan desde los puntos de máximo momento de vano hacia los apoyos.

La figura 40-12 c) presenta aisladas las zonas de hormigón "in situ" entre el apoyo izquierdo y el punto de máximo momento de vano y entre éste y el de momento nulo, así como la zona de pieza prefabricada comprendida entre el punto de momento nulo y el de momento máximo en apoyo, indicándose en las dos primeras, las tensiones rasantes de la parte prefabricada sobre el hormigón "in situ" y, en la tercera, a la inversa.

Para la zona BCB'C', las tensiones rasantes aplicadas al área de contacto han de equilibrar la fuerza rasante entre las secciones 1 y 2. Dicha fuerza rasante;  $F_{r1-2}$ , adoptando el bloque rectangular de compresiones es igual, evidentemente, al menor de los valores

$$A_{s2} \cdot f_{yd} \quad 0,85 A_{ch} \cdot f_{cd,h}$$

donde  $A_{s2}$  es la armadura estricta en la sección de máximo momento de vano;  $A_{ch}$ , la sección comprimida de hormigón "in situ" en rotura, en la sección de máximo momento de vano, y  $f_{cd,h}$ , la resistencia de cálculo del hormigón "in situ"<sup>1</sup>.

Admitiendo la redistribución entre la sección 1 y la 2, resulta una tensión media

$$\tau_{md1,2} = \frac{A_{s2} f_{yd}}{p L_1} \geq \frac{0,85 A_{ch} f_{cd,h}}{p L_1} \quad [40.11]$$

donde  $p$  es el perímetro de contacto entre hormigón "in situ" y pieza prefabricada en la sección recta de la pieza y  $L_1$  la longitud de la zona correspondiente.

Análogamente, se procede con las zonas 2,3 y 3,4 y luego se calcula la tensión media a lo largo de la zona 2,4, como media de  $\tau_{md2,3}$  y  $\tau_{md3,4}$ .

$$\tau_{md2,4} = \frac{(A_{s2} f_{yd} \geq 0,85 A_{ch} f_{cd,h}) + (A_{s4} f_{yd} \geq 0,85 A_{cp} f_{cd,p})}{p (L_1 + L_2)} \quad [40.12]$$

donde  $A_{cp}$  es el área comprimida en rotura en la sección de la pieza prefabricada en la sección de máximo momento de apoyo y  $A_{s4}$ , la sección estricta de armadura en la misma sección y  $f_{cd,p}$ , la resistencia del hormigón prefabricado.

La fórmula [40.11] por supuesto es un caso particular de la [40.12] cuando el momento de apoyo es nulo.

### 40.3.2 CÁLCULO DE LAS TENSIONES RASANTES

#### a) Pieza isorresistente sometida a flexión

Este caso es el de aquellas piezas cuya armadura en cada sección es la estrictamente necesaria para resistir el momento flector de cálculo en ella. Por

<sup>1</sup> El valor  $0,85 A_{ch} f_{cd}$  es la compresión total sobre el área  $A_{ch}$ , aceptando un diagrama rectangular.

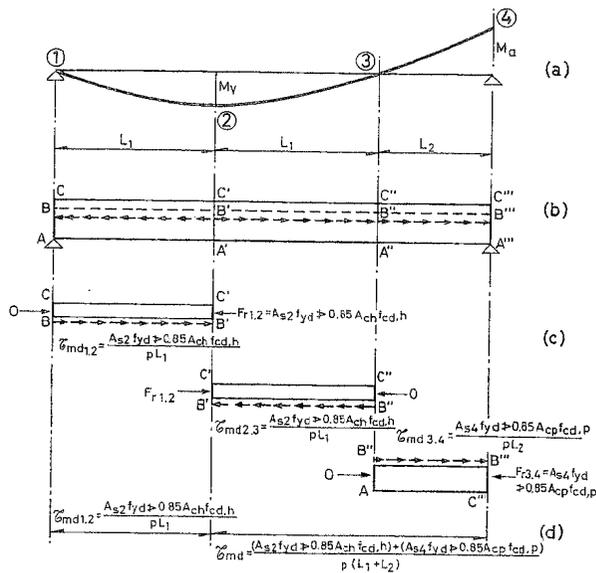


Figura 40-12

supuesto, es un caso inexistente en la práctica, pero su análisis tiene un gran interés como paso previo al de las piezas usuales, es decir, aquéllas con armadura cualquiera.

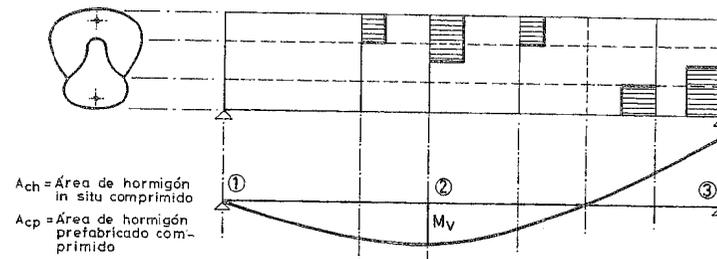
Consideraremos el caso más general de superficie de contacto no plana y sección en vano y apoyo tales que el bloque en rotura afecte a ambos hormigones. Al ser la pieza isorresistente, si suponemos que el agotamiento se produce, por ejemplo, por incremento homotético de la ley de cargas, todas las secciones alcanzan simultáneamente el estado de rotura. La situación se indica en la figura 40-13 en la que se analiza el caso general. La distribución de  $\tau_{md}$  en algunas zonas proporcionalmente a los esfuerzos cortantes *no coincide con la realidad*.

Es un caso, por lo tanto, en que, si se quieren conocer las tensiones rasantes con precisión, deben, por el momento, ser investigadas experimentalmente. Por supuesto, la fórmula [40.10] permite siempre un cálculo del lado de la seguridad.

**Unión dúctil.** La fuerza total rasante y, por lo tanto, la tensión media rasante, en la hipótesis de distribución plástica, pueden ser calculadas en todos los casos.

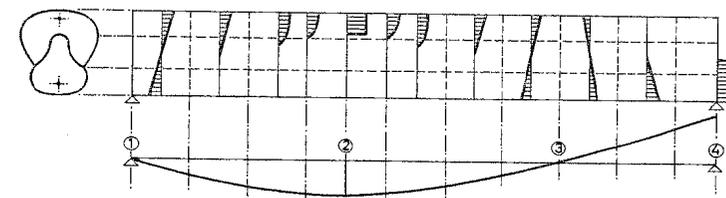
b) *Pieza cualquiera sometida a flexión*

El caso es más complejo, pues un exceso de armadura sobre la estrictamente necesaria (cosa habitual en los esquemas de armado usados en la práctica), puede conducir no sólo a que la sección no esté en estado de prerrotura, sino a que esté en régimen lineal de tensión-deformaciones del hormigón, con la zona de tracción fisurada, e incluso con dicha zona sin fisurar. En la figura 40-14 se analiza un caso que presenta todas las situaciones posibles.



Estado de fisuración de la pieza en la zona	Fisurada			
Diagrama de tensiones del hormigón	Rectangular			
Fórmula para el cálculo de la tensión rasante	$\tau_{md} = \frac{V_d}{p z}$	No conocida pero inferior a $\frac{V_d}{p z}$	$\tau_{md} = \frac{V_d}{p z}$	No conocida pero inferior a $\frac{V_d}{p z}$
Distribución de las tensiones rasantes	Proporcional a la de esfuerzos cortantes	No conocida	Proporcional a la de esfuerzos cortantes	No conocida
Fuerza rasante en la zona	$F_{r1,2} = 0,85 f_{cd} A_{ch2}$		$F_{r2,3} = 0,85 (f_{cd,h} A_{ch2} + f_{cd,p} A_{cp3})$	

Figura 40-13



Estado de fisuración de la pieza en la zona	No fisurada	Fisurada	Fisurada	Fisurada	Fisurada	No fisurada	No fisurada	Fisurada	Fisurada
Diagrama de tensiones del hormigón	Lineal	Lineal	No lineal	No lineal	Lineal	Lineal	Lineal	Lineal	No lineal
Fórmula para el cálculo de la tensión rasante	$\frac{V_d S}{p I}$ (1)	$\frac{V_d S_f}{p I_f}$ (2)	No conocida pero $\frac{V_d}{p z} < \frac{V_d}{p z}$	$\frac{V_d}{p z}$	No conocida pero $\frac{V_d}{p z} < \frac{V_d}{p z}$	$\frac{V_d S_f}{p I_f}$	$\frac{V_d S}{p I}$	$\frac{V_d S_f}{p I_f}$	No conocida pero $\frac{V_d}{p z} < \frac{V_d}{p z}$
Distribución de las tensiones rasantes	Según (1)	Según (2)	No conocida	Proporcional a V	No conocida	Según (2)	Según (1)	Según (2)	No conocida
Fuerza rasante en la zona	$F_{r1,2} = A_{s2} f_{yd}$				$F_{r2,3} = A_{s2} f_{yd}$				$F_{r3,4} = 0,85 f_{cd,p} A_{cp4}$

Figura 40-14

c) *Conclusiones*

Lo analizado en los apartados a) y b), sobre todo en este último, muestran lo complejo del problema. Intentamos a continuación establecer las conclusiones prácticas.

c-1) *Unión frágil*

En las figuras 40-15, 40-16 y 40-17 se representan los resultados de calcular las tensiones  $\tau_{md}$  para tres secciones, con tres cuantías diferentes, con lo que se cubren los empleos habituales en la práctica.

### ESFUERZO RASANTE EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO

a.- SECCION RECTANGULAR  
(CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA)

$\alpha_c = 1.50$   
 $\alpha_s = 1.15$   
 $\beta_f = 1.60$   
 $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$   
 $f_{yk} = 400 \text{ N/mm}^2$

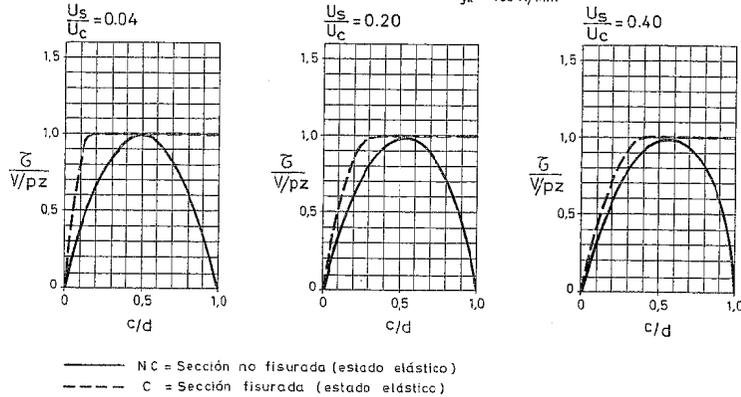
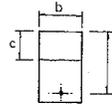


Figura 40-15

### ESFUERZO RASANTE EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO

b.- SECCION EN T  
(CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA)

$\alpha_c = 1.50$   
 $\alpha_s = 1.15$   
 $\beta_f = 1.60$   
 $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$   
 $f_{yk} = 400 \text{ N/mm}^2$

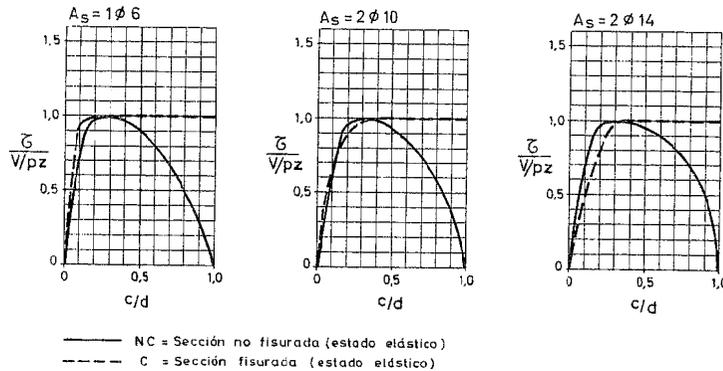
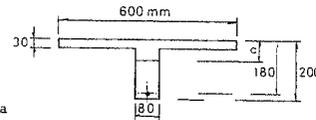


Figura 40-16

### ESFUERZO RASANTE EN LA SUPERFICIE DE CONTACTO

c.- FORJADO DE BOVEDILLAS  
(CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA)

$\alpha_c = 1.50$   
 $\alpha_s = 1.15$   
 $\beta_f = 1.60$   
 $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$   
 $f_{yk} = 400 \text{ N/mm}^2$

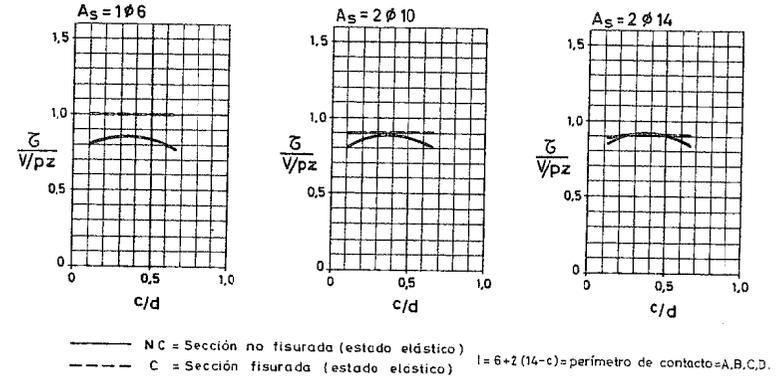
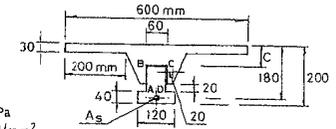


Figura 40-17

Las figuras contienen los valores  $\frac{\tau_{md}}{V_d/pz}$ , con lo que quedan establecidas

simultáneamente las comparaciones entre las tres fórmulas [40.3], [40.7] y [40.10]. Considerando además lo expuesto en a) y b), se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- La fórmula  $\tau_{md} = \frac{V_d}{pz}$  conduce a valores que están del lado de la seguridad, si

bien pueden estarlo excesivamente. Existen dos casos en que esta desviación puede resultar excesiva: uno es el de zonas en régimen lineal (p.ej., apoyos extremos de vanos continuos), en las que, especialmente si la unión de ambos hormigones está más alta que la fibra neutra, las fórmulas [40.3] ó [40.7] pueden conducir a valores más reales. Dada la dificultad de establecer si el hormigón está fisurado o no, si se emplean estas fórmulas, debe tomarse la que conduzca a mayores valores  $\tau_{md}$ . Otro caso es el de zonas de grandes momentos flectores (zonas de apoyos interiores en vanos continuos), si el bloque en rotura afecta a los dos hormigones (prefabricados e "in situ"). En este caso, también la fórmula [40.10] puede ser excesivamente conservadora, pero no existe, por el momento, un método analítico alternativo, por lo que el único camino para un diseño racional y económico es la experimentación directa.

- La distribución de tensiones rasantes a lo largo de la luz de la pieza sigue una ley proporcional a los esfuerzos cortantes, excepto en las zonas que en rotura estén en régimen lineal o aquéllas otras en la que en rotura el bloque de compresiones afecte a ambos hormigones. En estos dos casos, sin embargo, la

ley real queda envuelta por la  $\tau_{md} = \frac{V_d}{p z}$ . En la figura 40-18 se indica un esquema de la posible distribución de  $\tau_{md}$  correspondiente al caso analizado en la figura 40-10 b).

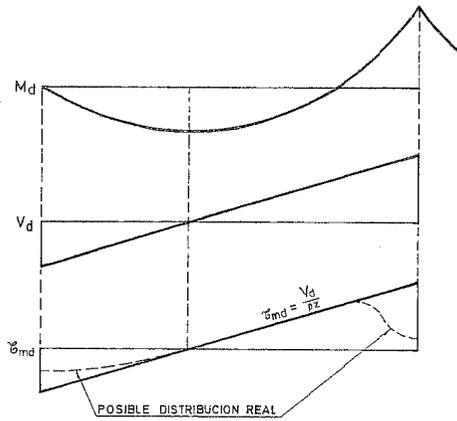


Figura 40-18

### c-2) Unión dúctil

En este caso, la fuerza rasante puede ser calculada siempre y, por lo tanto, también la tensión rasante mediante las fórmulas [40.11] y [40.12]. La aceptación de esta hipótesis parte de que se produce la necesaria readaptación de esfuerzos en la pieza<sup>1</sup>.

## 40.4 MÉTODO PARA EL DIMENSIONAMIENTO DE PIEZAS A ESFUERZO RASANTE

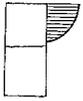
### 40.4.1 CÁLCULO DE LA TENSIÓN RASANTE

En primer lugar, veremos cuándo la unión se clasifica como frágil o como dúctil.

Para aceptar la redistribución de tensiones rasantes a lo largo de la luz (unión dúctil), adoptamos el criterio de que la armadura sea suficiente para garantizar la situación de resistencia a corte-fricción, expresando la condición de equilibrio entre la fuerza rasante y la resistencia a corte-fricción.

$$F_r \leq A_{st} \cdot \frac{L_1}{s} f_{y\alpha,d} (\mu \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$$

<sup>1</sup> Aunque el tema está poco investigado, parece conveniente, al menos por el momento, distribuir la armadura en los casos de unión dúctil en proporción a la ley de esfuerzos cortantes, aunque se haya aceptado la redistribución.

		TIPO DE UNIÓN	
		FRÁGIL	DÚCTIL
POSICIÓN DE SUPERFICIE DE CONTACTO AL BLOQUE COMPRIMIDO		$\tau_{md} = \frac{V_d}{p z}$	$\tau_{md} = \frac{V_d}{p z}$
		$M_d$ importante $\dot{\iota}$ $\tau_{md} = \frac{F_r}{p L}$	$M_d$ sin importancia $\tau_{md} = \frac{V_d S}{p I}$ ó $\tau_{md} = \frac{V_d S_f}{p I}$
			$\tau_{md} = \frac{F_r}{p L}$

donde:

$F_r$  = Fuerza rasante =  $\tau_{md} p L_1$ , donde  $\tau_{md}$  viene dada por [40.11] ó [40.12] y  $p$  es el perímetro de contacto.

$A_{st}$  = Área de un elemento de armadura transversal. (Si  $n$  barras se proyectan juntas sobre el plano medio de la pieza, por ejemplo, dos barras en el caso de estribos de dos ramas, en las fórmulas que siguen se sustituye  $A_{st}$  por  $nA_{st}$ ).

$L_1$  = Luz de la zona correspondiente a la fuerza rasante.

$f_{y\alpha,d}$  = Límite elástico de cálculo de la armadura transversal ( $f_{y\alpha,d} \geq 400 \text{ N/mm}^2$ ).

$\mu$  = Coeficiente de rozamiento entre ambos hormigones, igual a 1 para superficies con rugosidad tipo A y 0,6 para el tipo B<sup>2</sup>.

$s$  = Separación entre elementos de la armadura transversal en sentido paralelo a la directriz de la pieza.

Operando, se obtiene:

$\rho_d$  = Cuantía geométrica de la armadura transversal referida al área de la superficie de contacto.

$$\rho_d \geq \frac{F_r}{p L_1 f_{y\alpha,d} (\mu \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad [40.13]$$

<sup>1</sup> Sólo la experimentación en laboratorio resulta válida. La fórmula  $\tau_{md} = \frac{V_d}{p z}$  está, por supuesto del lado de la seguridad.

<sup>2</sup> Para las rugosidades tipo A y B, véase 40.4.2.

que es la condición para que la unión pueda ser considerada como dúctil.

La expresión [40.13] tiene la limitación práctica siguiente:

$$\rho_d \geq \frac{0,38}{f_{y\alpha,d} (\mu \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)}$$

donde  $f_{y\alpha,d}$  es el límite elástico de cálculo de la armadura transversal ( $f_{y\alpha,d} \geq 400 \text{ N/mm}^2$ ).

Una vez clasificado el tipo de unión, el cálculo de la tensión rasante se realiza de acuerdo con lo siguiente:

a) *Unión frágil*

La tensión rasante se calcula mediante la fórmula  $\tau_{md} = \frac{V_d}{pZ}$ , con las dos salvedades siguientes:

- En zonas de grandes esfuerzos cortantes y pequeños momentos flectores que puedan estar en régimen lineal cuando la pieza alcanza la rotura, el valor de  $\tau_{md}$  no se tomará superior al mayor de los dos valores de [40.3] [40.7]¹.

$$\tau_{md} = \frac{V_d S}{p I} ; \quad \tau_{md} = \frac{V_d S_f}{p I_f}$$

(Es el caso, por ejemplo, de apoyos de forjados de un solo vano o de apoyos extremos de forjados continuos).

- En zonas de grandes momentos flectores, si en rotura el bloque comprimido afecta a ambos hormigones, el valor  $\tau_{md} = \frac{V_d}{pZ}$  puede resultar muy conservador.

Según los casos, la vía experimental puede conducir a economías en el diseño.

b) *Unión dúctil*

El caso más general se indica en el figura 40-19.

Las fuerzas rasantes en las zonas 1,2 y 2,3 se calculan mediante las fórmulas:

$$F_{r,1-2} = A_{s1} f_{yd} (\geq 0,85 f_{cd,p} A_{cp1}) + A_{s2} f_{yd} (\geq 0,85 f_{cd,h} A_{ch}) \quad [40.14]$$

$$F_{r,2-3} = A_{s2} f_{yd} (\geq 0,85 f_{cd,h} A_{ch}) + A_{s3} f_{yd} (\geq 0,85 f_{cd,p} A_{cp3}) \quad [40.15]$$

donde:

$A_{s1}$  = Área *estrictamente necesaria* de acero en la sección del apoyo izquierdo.

$A_{s2}$  = Área *estrictamente necesaria* de acero en la sección del máximo momento de vano.

¹ Estas zonas pueden asimilarse a aquéllas en las que  $\gamma_f \geq 3$  frente al agotamiento por flexión.

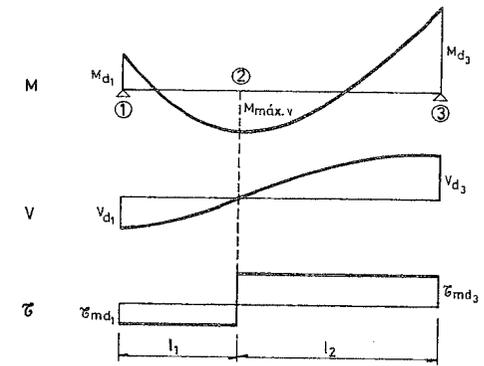


Figura 40-19

$A_{s3}$  = Área *estrictamente necesaria* de acero en la sección del apoyo derecho.

$A_{ch}$  = Área de hormigón "in situ" comprimido en rotura en la sección del máximo momento de vano.

$A_{cp1}$  = Área de la sección de hormigón prefabricado comprimido en rotura en la sección del apoyo izquierdo.

$A_{cp3}$  = Área de la sección de hormigón prefabricado comprimido en rotura en la sección del apoyo derecho.

$f_{yd}$  = Resistencia de cálculo del acero.

$f_{cd,h}$  = Resistencia de cálculo del hormigón "in situ".

$f_{cd,p}$  = Resistencia de cálculo del hormigón prefabricado.

Los valores de las tensiones rasantes resultan:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zona 1-2} \quad \tau_{md1} = \frac{F_{r,1-2}}{pl_1} \\ \text{Zona 2-3} \quad \tau_{md2} = \frac{F_{r,2-3}}{pl_2} \end{array} \right\} \quad [40.16]$$

#### 40.4.2. COMPROBACIÓN DE LA TENSIÓN RASANTE

Los valores de la tensión media de cálculo obtenidos mediante lo dicho en 40.4.1 han de compararse con unos valores de agotamiento que dependen de la rugosidad de la pieza prefabricada, de la resistencia del más débil de los dos hormigones y de la cantidad, calidad y posición de la armadura transversal.

Sea (figura 40-20) la superficie de contacto entre los dos hormigones que supondremos, en general, cosida por barras<sup>1</sup>, de sección  $A_{st}$ , con resistencia de cálculo  $f_{yd}$  y separación  $s$ , y formando un ángulo  $\alpha$  con la superficie de contacto.

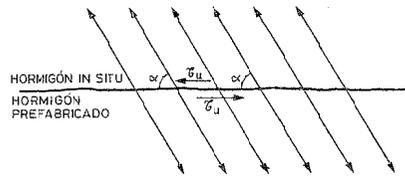


Figura 40-20

El agotamiento de la pieza por fallo de la colaboración de ambos hormigones por tensión rasante excesiva suponemos que se produce bajo la acción de una tensión rasante de agotamiento.

$$\tau_u = \tau_{uc} + \tau_{us} \quad [40.17]$$

donde  $\tau_{uc}$  corresponde al hormigón y  $\tau_{us}$  al acero, y debe cumplirse:

$$\tau_{md} \leq \tau_u \quad [40.18]$$

El valor  $\tau_{us}$  es el [39.95] obtenido en 39.19.

De acuerdo con lo anterior, adoptaremos como fórmula de comprobación general:

$$\tau_{md} \leq \beta_1 f_{ct,d} + \frac{A_{st} f_{y\alpha,d}}{s p} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha) + \mu \sigma_{cd} \geq 0,25 f_{cd} \quad [40.19]$$

donde:

- $\sigma_{cd}$  es el valor de la eventual tensión de compresión normal al plano de la junta. Recuérdese que  $f_{y\alpha,d} \geq 400$  N/mm<sup>2</sup> en [40.19]

- 1 Se entiende que las barras de la armadura transversal están perfectamente ancladas en ambos hormigones.
- 2 Si  $n$  barras se proyectan juntas en la figura (por ejemplo, dos barras en el caso de estribos de dos ramas), en las fórmulas que siguen se sustituye  $A_{st}$  por  $n A_{st}$ .
- 3 En viguetas de celosía, el segundo sumando se extiende a dos familias con ángulos  $\alpha$  y  $\pi - \alpha$  y resulta  $\tau_{md} = \beta_1 f_{ct,d} + \frac{A_{st} f_{yd}}{s p} 2\mu \sin \alpha$ , es decir, se cuentan ambas series de diagonales, salvo que  $\alpha < 45^\circ$ , en cuyo caso, de acuerdo con 39.2.5 d), se contaría sólo una serie. EHE exige  $\alpha_1 > 45^\circ$  y  $\alpha_2 > 135^\circ$ , lo que está del lado de la seguridad según vimos en 39.2.5 d).
- 4 La fórmula [40.19] refleja en forma muy simplificada el fenómeno. A. SOLAS, en su Tesis Doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA, ha demostrado que, además de la cantidad de armadura y su ángulo  $\alpha$ , la posición de la armadura también influye. En particular, los estribos de dos ramas con su plano medio normal a la dirección del esfuerzo rasante son claramente más eficaces que si el plano medio es paralelo a dicha dirección (40.16).

-  $f_{ct,d}$  es el valor de cálculo de la resistencia a tracción del menor resistente de ambos hormigones.

- El segundo sumando es el correspondiente a la resistencia a corte-fricción [39.95], ya deducida en el Capítulo 39.

En definitiva, y sólo para tensiones  $\tau_{md}$  moderadas, se acepta la coexistencia de una resistencia a rasante proporcionada por el hormigón con otra proporcionada por el acero. En particular, se acepta la posibilidad de resistir sólo el esfuerzo rasante con el hormigón, salvo casos particulares que más adelante se indican. Esta colaboración sólo es posible si los valores de  $\tau_{md}$  y de los corrimientos son pequeños. Se fija la condición

$$\tau_{md} \leq 0,25 f_{cd} \quad [40.20]$$

ACI-318-95 establece la condición  $\tau_{md} \leq 3,0$  N/mm<sup>2</sup> (40.10) y, si se supera, debe considerarse  $\beta_1 = 0$ , con lo que se pasa al estado de corte-fricción.

Para armadura transversal perpendicular a la superficie de contacto, la fórmula [40.19] se transforma en:

$$\tau_{md} \leq \beta_1 f_{ct,d} + \mu \frac{A_{st} f_{y\alpha,d}}{s p} + \mu \sigma_{cd} \geq 0,25 f_{cd} \quad [40.21]$$

Las fórmulas anteriores están deducidas en las hipótesis de un espesor medio de 50 mm a cada lado de la junta, con un espesor mínimo de 30 mm<sup>1</sup>.

Según la rugosidad del hormigón prefabricado, se adopta:

*Superficie de rugosidad tipo A (alta)*

Tomaremos  $\beta_1 = 0,4^2$  y  $\mu = 0,9^3$ , con lo que [40.19] se transforma en

$$\tau_{md} \leq 0,4 f_{ct,d} + \rho f_{y\alpha,d} (0,9 \sin \alpha + \cos \alpha) + 0,9 \sigma_{cd} \geq 0,25 f_{cd} \quad [40.22]$$

siendo  $\rho = \frac{A_{st}}{s p}$  la cuantía geométrica referida a la superficie de contacto (unidades en N y m).

Para  $\alpha = 90^\circ$  y  $\sigma_{cd} = 0$ , [40.22] se transforma en

$$\tau_{md} \leq 0,4 f_{ct,d} + 0,9 \rho f_{y\alpha,d} \quad [40.23]$$

Se entiende por superficie de rugosidad tipo A aquella que ha sido obtenida por uno de los procedimientos siguientes:

- Por "encofrado" del hormigón fresco con tela metálica u hojalata desplegada.

- 1 Debe prestarse atención, si se emplea armadura de cosido, a la dificultad de anclarla si el espesor de hormigón en dirección perpendicular a la junta, es pequeño.
- 2 Para superficies rugosas engarzadas en cola de milano se acepta  $\beta_1 = 0,5$ .
- 3 Estos valores son sensiblemente coincidentes con los de la publicación de la FIP (40.6).

- Por un raspado de la superficie del hormigón fresco con un peine de púas metálicas en sentido transversal a la dirección del esfuerzo rasante.
- "Apisonando" superficialmente el hormigón después de vibrado con un enrejado metálico del tipo del metal desplegado o malla metálica tupida.
- La obtenida en la superficie libre del hormigón por simple vibración interna, impidiendo la formación de lechada en la superficie.
- Por tratamiento con chorro de agua o chorro de arena, que deje visto el árido grueso.
- En el caso particular de semiviguetas, la obtenida con máquina "ponedora", siempre que el perfil de la vigueta presente el alma en cola de milano y la superficie quede abierta y rugosa<sup>1</sup> (40.13).
- Disponiendo un "almenado" en la pieza prefabricada en dirección transversal al esfuerzo rasante.

#### Superficie de rugosidad tipo B

Tomaremos  $\beta_1 = 0,2^2$  y  $\mu = 0,6$ , con lo que [40.19] se transforma en

$$\tau_{md} \leq 0,2 f_{ct,d} + \rho f_{y\alpha,d} (0,6 \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,6 \sigma_{cd} \geq 0,25 f_{cd} \quad [40.24]$$

Para  $\alpha = 90^\circ$  y  $\sigma_{cd} = 0$ , [40.24] se transforma en

$$\tau_{md} \leq 0,2 f_{ct,d} + 0,6 \rho f_{y\alpha,d} \quad [40.25]$$

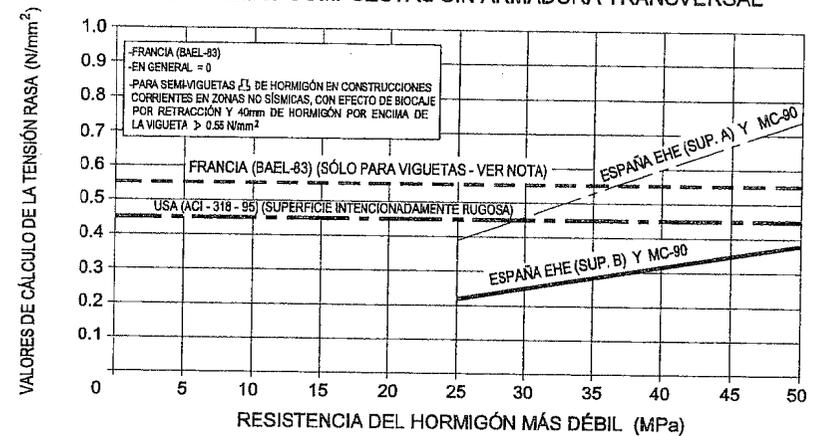
Se entiende por superficie de rugosidad tipo B la obtenida por uno de los procedimientos siguientes:

- Por técnicas de extrusión.
- Cepillando el hormigón en fresco, sin perturbar la adherencia árido grueso-mortero.
- En el caso particular de semiviguetas en forma de  $\perp$  la obtenida con máquina "ponedora" si el perfil no cumple las condiciones de la superficie A, pero la superficie queda abierta y rugosa.

Por lo que se refiere al valor de cálculo de la tensión rasante, [40.17], la discrepancia de unas normas a otras es importante y no puede serlo por menos, ya que el valor está fuertemente ligado a la rugosidad y estado de la superficie del hormigón de la pieza prefabricada. A título de ejemplo, en la figura 40-21 se indican los valores adoptados por el MODEL CODE, por la norma norteamericana ACI-318 (40.10), por la norma francesa BAEL-83 (40.12) y por la Instrucción española EHE. (Coincidente en este aspecto con el MODEL CODE).

- 1 El fabricante debe medir la rugosidad y expresar numéricamente esa medida controlando su constancia a lo largo de la producción. Ver método de medida en la referencia (40.6). La aplicación de la categoría A debe ser corroborada mediante ensayos iniciales. En otro caso debe considerarse como rugosidad tipo B.
- 2 Para superficies encofradas o fratasadas puede aceptarse  $\beta = 0,1$ .

### COMPARACIÓN DE VALORES DE CÁLCULO DE LA TENSIÓN RASANTE EN PIEZAS SIN ARMADURA DE COSIDO SEGÚN DISTINTAS NORMAS PARA PIEZAS COMPUESTAS SIN ARMADURA TRANSVERSAL



#### NOTAS

- 1) PARA LOS PAÍSES QUE REALIZAN EL CÁLCULO EN ESTADOS LÍMITE, SE HAN HOMOGENEIZADO LOS VALORES PARA QUE CORRESPONDAN A  $\gamma_{f_0} = 1,35$  Y  $\gamma_{f_1} = 1,5$  (EHE). LA COMPARACIÓN CORRESPONDE AL CASO DE RELACIÓN SOBRECARGA A CARGA PERMANENTE DE 0,5 (VIVIENDAS Y OFICINAS).
- 2) PARA LOS PAÍSES QUE REALIZAN EL CÁLCULO EN TENSIONES ADMISIBLES, SE HAN TRANSFORMADO LOS VALORES A VALORES ÚLTIMOS, MULTIPLICÁNDOLOS POR

$$\gamma_r = \frac{1,35 \cdot 1 + 1,50 \cdot 0,5}{1,5} = 1,40$$

- 3) SE HA SUPUESTO LA FÓRMULA DE CÁLCULO  $\tau_u = \frac{V_d}{pd}$  PARA QUE PUEDAN SER COMPARABLES LOS VALORES.

Figura 40-21

#### Observaciones

Los valores obtenidos mediante las fórmulas [40.24] y [40.25] se refieren a superficie de contacto libre de polvo y suciedad. Si esta situación no puede ser garantizada mediante un control de recepción eficiente, deben multiplicarse dichos valores por 2/3.

En las fórmulas [40.22] a [40.25] no se tendrá en cuenta la armadura si

$$\rho < \frac{0,38}{f_{y\alpha,d} (\mu \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad [40.26]$$

siendo  $f_{y\alpha,d}$  el límite elástico del acero considerado en el cálculo ( $f_{y\alpha,d} \geq 400$  N/mm<sup>2</sup>), expresado en N/mm<sup>2</sup>.

- 1 Para el caso en que  $\rho < \frac{0,38}{f_{y\alpha,d}}$ , es decir, cuando el esfuerzo es íntegramente desarrollado por el hormigón, M. VESA ha desarrollado un procedimiento que conduce a aumentar el valor  $\tau_{uc}$  hasta en un 50% en función de las características de la sección, de la posición de la superficie de contacto y de los esfuerzos aplicados. Ver referencia (40.5).

Como ya dijimos, la norma ACI-318-95 especifica que, si  $\tau_{md}$  excede el valor de 3,0 N/mm<sup>2</sup>, las fórmulas [40.22] a [40.25] no son aplicables y la unión debe comprobarse de acuerdo con la teoría de corte-fricción expuesta en 32.19<sup>1</sup>.

Si la unión se ha calculado como frágil, la armadura debe distribuirse a lo largo de la luz en proporción a los esfuerzos cortantes. Si se calcula como dúctil, es conveniente también distribuirla según la ley de esfuerzos cortantes.

#### 40.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES SOBRE LA TENSIÓN RASANTE

Dado el estado actual de la investigación sobre el tema, los siguientes puntos deben ser considerados con atención.

- a) El dimensionamiento basado en investigaciones realizadas directamente para un tipo de pieza particular es actualmente el método que permite un cálculo más ajustado.

La investigación debe basarse, dada la dispersión habitual de resultados, en un número de ensayos suficiente. En nuestra opinión, el número de ensayos debería ser siempre superior a 12.

Debe prestarse atención en los ensayos a movilizar tensiones rasantes grandes, pero sin recurrir a emplear para ello cargas puntuales importantes cerca de los apoyos, ya que ejercen un efecto de "pinzamiento" entre ambos hormigones que conduce a resultados muy superiores a los reales.

- b) Si el forjado tiene poca o ninguna armadura transversal, se deben aumentar los coeficientes de seguridad sobre los valores habituales. Las fórmulas [40.22] a [40.25] ya tienen en cuenta este incremento de seguridad.
- c) Es esencial un control estricto de la rugosidad realmente alcanzada en el hormigón prefabricado. La referencia (40.6) contiene métodos de medida y de ensayo.
- d) Todo lo tratado aquí supone que no existen tracciones perpendiculares a la superficie de contacto. (Por ejemplo, debidas a cargas colgadas de la pieza prefabricada). Si existen, todo el rasante debe ser absorbido con armadura ( $\beta = 0$ ) y debe disponerse la armadura de tracción correspondiente.

- e) Análogamente, se supone que las cargas no producen efectos dinámicos ni de fatiga. Si existen estos efectos, debe suponerse  $f_{ct,d}$  reducido al 50% de su valor.

- f) En zonas sísmicas de intensidad media o alta, las piezas deben cumplir requisitos especiales de acuerdo con el Capítulo 67 y llevar siempre armadura transversal en los voladizos y en los tercios extremos de la luz. Se sugiere

$$\rho \geq \frac{0,38}{f_{ya,d} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)} \text{ como valor mínimo (40.17).}$$

<sup>1</sup> Para valores superiores, las deformaciones necesarias no permiten considerar una colaboración de  $\tau_{uc}$  con  $\tau_{us}$  y sólo el segundo debe ser considerado, estando, por tanto, en el estado de corte-fricción.

- g) Cuando  $f_{ck} > 50$  MPa, deben utilizarse los valores expuestos en el Anejo n° 5.

- h) Debe tenerse cuidado al fijar el valor de  $p$ . No debe considerarse el perímetro más allá de zonas donde el ancho de paso para el hormigón es de 20 mm (figura 40-22) o el tamaño máximo del árido o el espesor de hormigón "in situ" sea inferior a 30 mm.

Por otra parte, si existe una superficie, tal como  $B'BCC'$ , de fractura mixta por hormigón "in situ" y superficie de contacto, pero de menor perímetro que  $ABCD$ , debe tomarse como valor de  $p$  el de  $B'BCC'$  (40.13), (40.14).

- i) Por último, investigaciones recientes han demostrado una muy acusada relación entre la adherencia entre el hormigón "in situ" y el prefabricado y la calidad de la puesta en obra del primero, especialmente por lo que se refiere a energía de la compactación.
- j) La retracción diferencial entre los dos hormigones, sobre todo en los extremos libres de las piezas, tiende a producir el despegue del hormigón "in situ", agravando así la acción del esfuerzo rasante. (Véase el Capítulo 49).

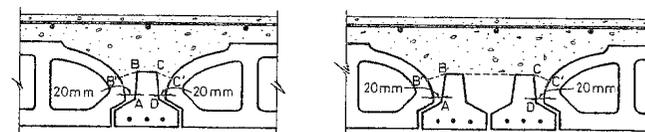


Figura 40-22

#### EJEMPLO 40.1

La sección de la figura 40-23 corresponde a una vigueta de losa nervada de dos vanos continuos de 5 m de luz, cuya carga total característica es de 8 kN/m de vigueta. La losa se dimensiona para resistir momentos de vano y apoyo de  $\frac{1}{11,6} p l^2$ , de acuerdo con lo que se vio en el Capítulo 18. Se pide:

Calcular la tensión rasante entre la pieza prefabricada y el hormigón "in situ", suponiendo que no hay armadura transversal:

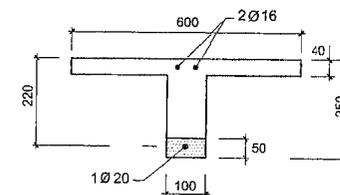


Figura 40-23

- a) En los apoyos extremos.  
b) En el apoyo central.

Tómese  $\gamma_f = 1,5$ ;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $\gamma_c = 1,5$ . Acero B-400S. Hormigón "in situ" H-25. Hormigón prefabricado H-35.

*Solución*

Para  $p_d = 1,5 \cdot 8 = 12 \text{ mkN}$

$$M_{vd} = M_{ad} = \frac{1}{11,6} 12 \cdot 5^2 = 25,86 \text{ mkN}$$

Para los vanos, con  $M_{vd} = 25,86$ , suponiendo que el bloque está en la tabla y utilizando el Ábaco GT-84 para sección rectangular con

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{25860.000}{16,7 \cdot 600 \cdot 220^2} = 0,053$$

y se obtiene

$$\omega = 0,05 \quad U_s = 0,05 \cdot 16,7 \cdot 600 \cdot 220 = 110.220 \text{ N} \rightarrow 1 \phi 20$$

$\frac{y}{d} \approx 0,08$ ;  $y \approx 18 \text{ mm} < 40 \text{ mm}$ , luego el bloque comprimido está realmente en la tabla.

Para el apoyo, con  $M_{ad} = 25,86$ , tanteamos con  $f_{cd} = \frac{35}{1,5} = 23,3 \text{ MPa}$

Suponemos  $d \approx 220 \text{ mm}$

$$\mu = \frac{25860.000}{23,3 \cdot 100 \cdot 220^2} = 0,229$$

$\frac{y}{d} = 0,32$ ;  $y = 0,32 \cdot 220 = 70,4 \text{ mm}$ , que excede a la suela prefabricada. Llamando  $y$  a la profundidad del bloque comprimido, se ha de verificar:

Igualando el volumen de compresión a la fuerza en la armadura:

$$0,85 [100 \cdot 50 \cdot 23,3 + (y - 50) \cdot 100 \cdot 16,7] = U_s$$

Igualando momentos

$$0,85 (220 - 25) 100 \cdot 50 \cdot 23,3 + 0,85 \left( 220 - 50 - \frac{y - 50}{2} \right) (y - 50) \cdot 100 \cdot 16,7 = 25.860.000$$

De la segunda condición,  $y = 80 \text{ mm}$ .

Y sustituyendo en la primera

$$U_s = 141185 \text{ N} = 2 \phi 16 \quad (\text{Fig. 40-23}).$$

En los apoyos extremos, de acuerdo con el cuadro del apartado 40.3.

$$V_d = \frac{3}{8} \cdot 1,5 \cdot 8 \cdot 5 = 22,5 \text{ kN}$$

y con  $p = 100 \text{ mm}$

$$z \approx 0,9 d \approx 0,9 \cdot 220 = 198 \text{ mm}$$

Sustituyendo, se obtiene

$$\tau_{md} = \frac{22.500}{100 \cdot 198} = 1,14 \text{ N / mm}^2$$

Excesiva si no se disponen estribos.

En el apoyo central, al tratarse de momento importante y el bloque comprimido afectar a ambos hormigones, no es posible calcular  $\tau_{md}$ . Como

$$V_d = \frac{5}{8} 1,5 \cdot 8 \cdot 5 = 37,50 \text{ kN}$$

la fórmula

$$\tau_{md} = \frac{37.500}{100 \cdot 198} = 1,89 \text{ N / mm}^2$$

da un valor por exceso.

## BIBLIOGRAFÍA

- (40.1) CALAVERA, J. "Some anomalies in the shear at the interface design of composite members". Betonwerk + Fertigteil-Technik. 1989.
- (40.2) THE INSTITUTION OF STRUCTURAL ENGINEERS. Manual on structural joints in precast concrete. I.S.E. London 1978.
- (40.3) I.A.B.S.E. Design Philosophy and its application to precast concrete structures. Proceedings of a Symposium held in London. May, 1967. Cement and concrete Association. London, 1968.
- (40.4) CALAVERA, J., GONZÁLEZ VALLE, E., DELIBES, A. e IZQUIERDO, J.M. "Ensayos de corte en la superficie de contacto entre hormigones de piezas prefabricadas y hormigones vertidos "in situ"". Hormigón y Acero, números 119 y 120, 1976.
- (40.5) VESA, M. "Paikallavaletun betonin ja betonjelementin valisen vaakasauman leikkauslujuudesta". Helsinki Technical University. 1979.

- (40.6) F.I.P. Technical Report: "Shear at the interface of precast and "in situ" concrete". 1978.
- (40.7) GUSTAVSSON, K. "Shear at the interface-tests on T-slabs with thin top layers". Paper presented to the F.I.P. Commission on Prefabrication. Lulea, Sweden. June, 1980.
- (40.8) BERNANDER, K.G. Manuscrito F.I.P. Commission on Prefabrication, Structural connections of prefabricated concrete units. Some matters of current concern. April, 1975.
- (40.9) GONZÁLEZ VALLE, E. "Estudio experimental del comportamiento de juntas entre hormigones in situ y prefabricados con distintos tratamientos en la unión". Tesis Doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos. Madrid, 1988.
- (40.10) ACI-318-95 "Building code requirements for structural concrete". American Concrete Institute. Detroit, 1995.
- (40.11) BS 8110 "Structural use of concrete". Part 1. Code of practice for design and construction". British Standards Institution. London, 1985.
- (40.12) BAEL-83. Regles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites. (1983).
- (40.13) CALAVERA, J. y GONZÁLEZ VALLE, E. "Consideraciones sobre tensiones de corte en la superficie de contacto de piezas compuestas". Hormigón y Acero, números 130-131-132 (1979).
- (40.14) CALAVERA, J. "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". INTEMAC. Madrid, 1988.
- (40.15) DEL RÍO, C. "Análisis de la resistencia de las tensiones rasantes que se desarrollan en la superficie de unión entre los diferentes hormigones de piezas compuestas". Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de L.F. RODRÍGUEZ MARTÍN. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Madrid, 1985.
- (40.16) SOLAS, A. "Armaduras de cosido entre hormigones prefabricados y ejecutados "in situ". Tesis Doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos. Madrid, 1985.
- (40.17) "Composite floor structures". Fib (CEB-FIP). May 1998.
- (40.18) GALVEZ, J. "Influencia de la rugosidad y la cuantía de armadura transversal en el comportamiento de las piezas compuestas solicitadas a flexión". Tesis Doctoral bajo la dirección de E. GONZÁLEZ VALLE. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos. Madrid, 1992.

## CAPÍTULO 41

### ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE PUNZONAMIENTO

#### 41.1 INTRODUCCIÓN

El estado límite último de punzonamiento es un estado que se alcanza por agotamiento de la pieza bajo tracciones debidas a tensiones tangenciales (fig. 41-1) motivada por una carga o reacción localizadas en una superficie pequeña de un elemento bidireccional de hormigón armado o pretensado. Se caracteriza por la formación de una superficie de fractura de forma tronco-piramidal (truncocónica en el caso de áreas circulares), cuya directriz es el área cargada.

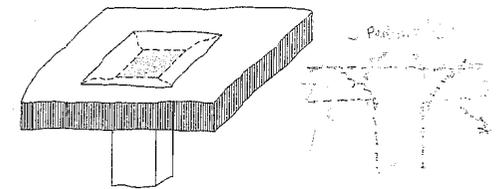


Figura 41-1

La Instrucción EHE menciona el punzonamiento en el caso de forjados sin vigas (placas sobre apoyos aislados), aunque es también un estado límite último frecuente en zapatas.

En el tema de punzonamiento la Instrucción EHE da información reducida, procedente del MODEL CODE CEB-FIP-90. Exponemos a continuación el tema de forma completa, en general procedente de la Norma ACI 318-95 (41.2), señalando las

diferencias con EHE cuando existen. Más adelante se expone el método del EUROCÓDIGO EC-2 (41.3) que coincide en líneas generales con el MODEL CODE 90 (41.1).

## 41.2 MÉTODO DEL ACI 318-95

### 41.2.1 SUPERFICIE CRÍTICA DE PUNZONAMIENTO

Es la superficie cilíndrica perpendicular al plano medio de la placa o zapata, cuyo contorno es el perímetro crítico. El perímetro crítico es, en general, el situado a una distancia  $\frac{d}{2}$  del contorno del área cargada, siendo  $d$  el canto útil de la placa o

zapata. Esta definición, para el caso de áreas poligonales convexas (fig. 41-2) se entiende según a) y no según b) que sería la interpretación estricta de la definición anterior.

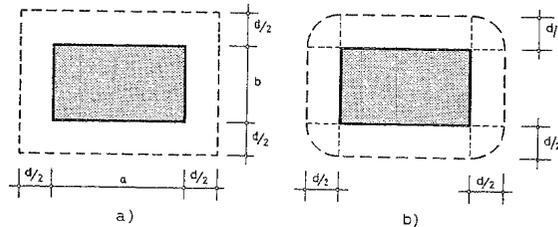


Figura 41-2

Para áreas de forma más complicada, la figura 41-3 indica la forma de definir el perímetro crítico.

Debe prestarse atención a los casos en que el área cargada esté próxima a bordes de la placa o zapata (fig. 41-4), ya que en tales casos la definición del perímetro crítico requiere modificaciones.

En el caso a) debe tomarse como perímetro crítico  $A'ACBB'$  si  $\overline{AA'} + \overline{BB'}$  es más corto que  $ADB$ .

En el caso b), el perímetro crítico será  $A'ABB'$  si  $\overline{AA'} + \overline{BB'}$  es más corto que  $ADB$ .

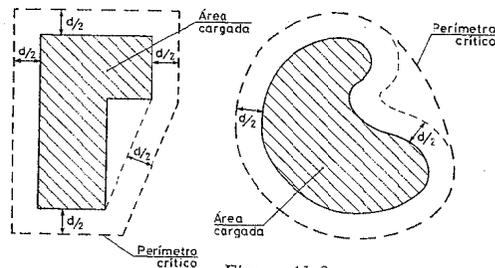


Figura 41-3

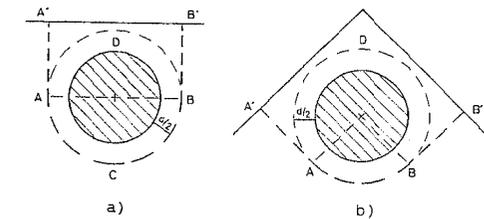


Figura 41-4

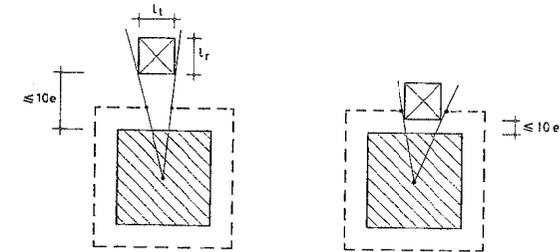


Figura 41-5

Si en la placa existen aberturas a una distancia menor de diez veces el espesor de la placa medida desde el borde del área cargada, el perímetro crítico se reducirá en la longitud intersectada en dicho perímetro por las rectas que proyectan desde el c.d.g. del área cargada los límites de la abertura (fig. 41-5).

### 41.2.2 PUNZONAMIENTO CENTRADO

Entendemos por tal aquél en que se ejerce sobre el área cargada un esfuerzo de compresión sin momentos.

Llamaremos  $F_{pd}$  al valor de cálculo del esfuerzo de punzonamiento, y  $\tau_{pd}$  a la tensión de punzonamiento.

Se ha de cumplir simultáneamente

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{A_{cp}} \leq 0,16 \left( 1 + \frac{2}{\gamma} \right) \sqrt{f_{cd}} \geq 0,32 \sqrt{f_{cd}}$$

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{A_{cp}} \leq 0,08 \left( \frac{\alpha_{sd}}{u_1} + 2 \right) \sqrt{f_{cd}} \geq 0,32 \sqrt{f_{cd}} \quad [41.1]$$

donde:

$\tau_{pd}$  = Tensión de cálculo de punzonamiento en N/mm<sup>2</sup>

$F_{pd}$  = Esfuerzo de cálculo de punzonamiento en N<sup>1</sup>

1 Para el cálculo de  $\tau_{pd}$ , debe descontarse las acciones de signo contrario a  $\tau_{pd}$  que se ejerzan dentro del perímetro crítico, en particular la componente vertical del posible pretensado.

$A_{cp}$  = Área de la superficie crítica de punzonamiento igual al producto del perímetro crítico de punzonamiento por el canto útil  $d$  en  $\text{mm}^2$ .

$\gamma$  = Relación del lado mayor al menor del área de carga.

$f_{cd}$  = Resistencia de cálculo del hormigón a compresión en MPa.

$\alpha_{pd}$  = Es un coeficiente que vale 40 para pilares interiores, 30 para pilares de borde y 20 para pilares de esquina.

$u_i$  = Es el perímetro crítico a punzonamiento en mm.

A los efectos de definición de  $\gamma$ , si el contorno del área de carga no es rectangular (fig. 41-6) se toma  $\gamma$  como la relación de su máxima dimensión  $a$ , a la mayor dimensión  $b$ , medida en sentido perpendicular a la anterior.

Las fórmulas [41.1], adoptadas por A.C.I. 318-95 (41.2) varían de  $\tau_{pd} = 0,32 \sqrt{f_{cd}}$

para un área de carga cuadrada, hasta  $\tau_{pd} = 0,16 \sqrt{f_{cd}}$  para un área con relación  $\gamma = \infty$ .

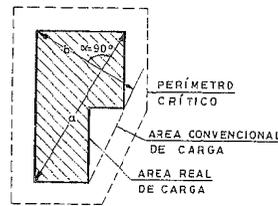


Figura 41-6

RICE y HOFFMAN (41.4) señalan dos anomalías del método de ACI-318: Una es que si el valor  $\gamma$  es muy alto, pero el lado mayor del pilar no es superior al canto de la placa, se está de todas formas, en un caso de punzonamiento, y parece más lógico tomar  $0,32 \sqrt{f_{cd}}$ . La otra corresponde al caso en que ambas dimensiones del pilar sean muy grandes respecto al canto de la placa, en cuyo caso se está más en un caso de corte poligonal que de punzonamiento y el valor  $0,16 \sqrt{f_{cd}}$  parece más adecuado.

#### 41.2.3 TRANSFERENCIA DE MOMENTOS ENTRE LOSA Y PILAR

En el caso de unión de losa a pilar, ya vimos en 19.4.4 que el sistema no es tan apto como el entramado para realizar la citada transmisión por flexión y que una parte del momento flector

$$M'_d = \lambda M_d \quad [41.2]$$

(los valores de  $\lambda$  se indicaron ya en 19.4.4)

1 En los casos de placas con armaduras en dos direcciones,  $d$  es la media aritmética de los cantos útiles en cada dirección.

se transmite efectivamente por flexión, mientras que el resto

$$M''_d = (1 - \lambda) M_d \quad [41.3]$$

ha de ser transmitida por excentricidad de tensiones tangenciales en el perímetro de punzonamiento.

La parte  $M''_d$  se ha de transmitir concentrando la armadura de flexión correspondiente de la placa en un ancho igual al del pilar de la planta inferior más vez y media el canto total  $h$  de la placa a cada lado.

#### 41.2.4 PUNZONAMIENTO EN EL CASO GENERAL

Para el caso más general de esfuerzo axial y dos momentos, la tensión de cálculo de punzonamiento viene dada por la expresión

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{A_{cp}} + \frac{M''_{d1}}{J_1} y + \frac{M''_{d2}}{J_2} x \quad [41.4]$$

con los significados siguientes (fig. 41-7):

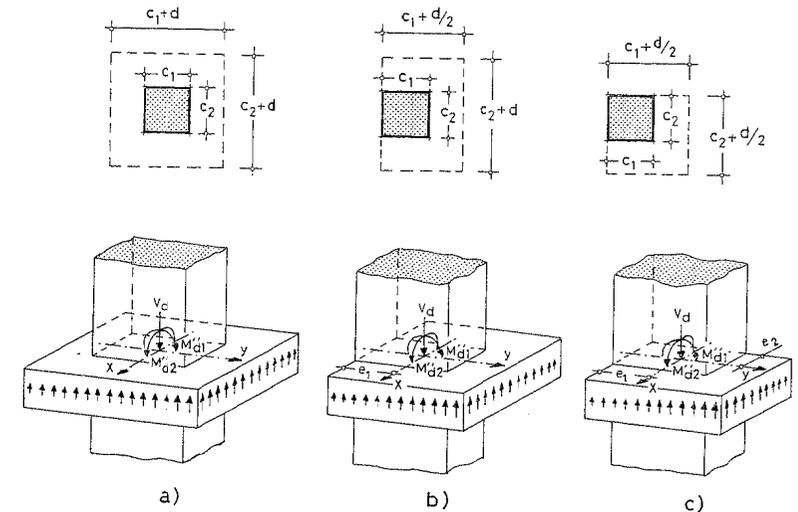


Figura 41-7

$F_{pd}$  = Esfuerzo de cálculo de punzonamiento, de acuerdo con 41.2.2.

$A_{cp}$  = Área crítica de punzonamiento, de acuerdo con 41.2.2.

$M''_{d1}$  = Momento flector transmitido por excentricidad de corte en la dirección de  $c_1$  ( $oy$ ).

$M''_{az}$  = Momento flector transmitido por excentricidad de corte en la dirección de  $c_2$  ( $ox$ ).

$J_1$  = Momento de inercia combinado en la dirección de  $c_1$  ( $oy$ ).

$J_2$  = Momento de inercia combinado en la dirección de  $c_2$  ( $ox$ ).

$x, y$  = Coordenadas del punto considerado respecto al sistema de ejes paralelos a  $x, y$ , que pasan por el c.d.g. del perímetro crítico.

La Norma ACI-318-95, adopta la teoría de DI STASIO y VAN BUREN (41.5) que parten de que la torsión, debido a la rigidización producida por la presencia del pilar en la superficie de punzonamiento de la placa, no corresponde a la torsión de Saint Venant, ya que está impedido el alabeo, y adoptan el momento combinado  $J$ .

ACI-318 da solamente la fórmula para pilar rectangular interior y flexión en una sola dirección. La fórmula [41.3] es una generalización nuestra para el caso, habitual, de flexión en dos direcciones. En un libro de forjados<sup>2</sup>, publicamos ya en 1981 las fórmulas para pilares rectangulares interiores, de borde y de esquina<sup>3</sup>.

A continuación, incluimos además los casos, muy frecuentes, de pilares rectangulares de borde y esquina con vigas de borde y de pilares circulares interiores, de borde y de esquina, estos últimos tomados de RICE y HOFFMAN (41.4).

En todos los casos que siguen, cuando el c.d.g. de la superficie de punzonamiento no coincide con el del pilar (pilares de borde y esquina) en [41.4] deben mantenerse los valores  $F_{cp}$ ,  $M_{cp}$ ,  $M_{az}$  trasladados al c.d.g. de la superficie al punzonamiento.

a) *Pilar rectangular interior* (fig. 41-7 a)

$$J_1 = 2 \left[ \frac{(c_1 + d) d^3}{12} + \frac{d (c_1 + d)^3}{12} \right] + 2d (c_2 + d) \left( \frac{c_1 + d}{2} \right)^2$$

y operando

$$J_1 = \frac{d (c_1 + d)}{2} \left[ \frac{d^2 + (c_1 + d)^2}{3} + (c_1 + d) (c_2 + d) \right] \quad [41.5]$$

Análogamente

$$J_2 = 2 \left[ \frac{(c_2 + d) d^3}{12} + \frac{d (c_2 + d)^3}{12} \right] + 2d (c_1 + d) \left( \frac{c_2 + d}{2} \right)^2$$

y operando

- 1 DI STASIO y VAN BUREN suponen el perímetro crítico a distancia  $d$  en lugar de  $d/2$ . Sólo estudian pilar interior y de borde para momentos perpendiculares a fachada.
- 2 J. CALAVERA, "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación" (41.6).
- 3 F. MORÁN (41.7) y P. JIMÉNEZ MONTOYA (41.8) publicaron, en 1982, tablas y expresiones aproximadas de las fórmulas de pilares rectangulares, que facilitan su aplicación.

$$J_2 = \frac{d (c_2 + d)}{2} \left[ \frac{d^2 + (c_2 + d)^2}{3} + (c_1 + d) (c_2 + d) \right] \quad [41.6]$$

El valor de  $A_{cp}$  resulta

$$A_{cp} = d [2 (c_1 + d) + 2 (c_2 + d)]$$

y operando

$$A_{cp} = 2 d [ (c_1 + c_2 + 2d) ] \quad [41.7]$$

En la fórmula [41.4], el valor máximo de  $\tau_{ax}$  se obtiene para la peor combinación de

$$x = \pm \frac{c_2 + d}{2}$$

$$y = \pm \frac{c_1 + d}{2}$$

b) *Pilar rectangular de borde* (fig. 41-7 b)

Si el pilar es de borde, el centro de gravedad de la superficie de punzonamiento ya no es el c.d.g. del área cargada, sino que está situado en el eje  $oy$  a una distancia  $e_1$  del borde de la placa igual a

$$e_1 = \frac{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^2 + d (c_2 + d) \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)}{2d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + d (c_2 + d)}$$

o bien

$$e_1 = \frac{\left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( c_1 + c_2 + \frac{3}{2} d \right)}{2c_1 + c_2 + 2d} \quad [41.8]$$

Con ello se tiene

$$J_1 = 2 \left[ \frac{\left( c_1 + \frac{d}{2} \right) d^3}{12} + \frac{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^3}{12} + d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - e_1 \right)^2 \right] + d (c_2 + d) \left[ c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \right]^2$$

y operando

$$J_1 = d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left[ \frac{d^2}{6} + \frac{\left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^2}{6} + 2 \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - e_1 \right)^2 \right] + d (c_2 + d) \left( c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \right)^2 \quad [41.9]$$

$$J_2 = \frac{(c_2 + d) d^3}{12} + \frac{d (c_2 + d)^3}{12} + 2 d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( \frac{c_2 + d}{2} \right)^2$$

y operando

$$J_2 = \frac{d (c_2 + d)}{2} \left[ \frac{d^2 + (c_2 + d)^2}{6} + \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) (c_2 + d) \right] \quad [41.10]$$

El valor de  $A_{cp}$  resulta

$$A_{cp} = d \left[ 2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + c_2 + d \right]$$

o bien

$$A_{cp} = d [2 c_1 + c_2 + 2d] \quad [41.11]$$

El valor máximo de  $\tau_{ax}$  se obtiene para la peor combinación de

$$y = \begin{cases} -e_1 \\ c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \end{cases} \quad \text{con } x = \pm \frac{c_2 + d}{2}$$

c) *Pilar rectangular de esquina* (fig. 41-7 c) <sup>1</sup>

Si el pilar es de esquina, el centro de gravedad de la superficie de punzonamiento está situado a distancias  $e_1$ ,  $e_2$  de los bordes de la placa tales que

$$e_1 = \frac{\frac{d}{2} \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^2 + d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)}{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)}$$

<sup>1</sup> A. PÉREZ CALDENTEY, en la referencia (41.9) presentó una interesante discusión sobre el hecho de que en el caso de pilar de esquina, los ejes principales de inercia no son paralelos a los bordes. Mantenemos la comprobación en la forma que sigue, porque DI STASIO y VAN BUREN parten, como se dijo, de que la rigidez de la unión de placa al pilar hace que no sea aplicable la teoría de torsión de SAINT VENANT. RICE y HOFFMAN en la guía de aplicación del Código ACI (41.4) mantienen este tratamiento, en el que se basa la correlación experimental. La misma solución adoptan AJDUKIEWICZ y STAROSOLSKI (41.10).

y operando

$$e_1 = \frac{\left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( \frac{c_1}{2} + c_2 + \frac{3}{4} d \right)}{c_1 + c_2 + d} \quad [41.12]$$

$$e_2 = \frac{\frac{d}{2} \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)^2 + d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)}{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)}$$

y operando

$$e_2 = \frac{\left( c_2 + \frac{d}{2} \right) \left( c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{3}{4} d \right)}{c_1 + c_2 + d} \quad [41.13]$$

$$J_1 = \frac{d^3 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)}{12} + \frac{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^3}{12} + d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - e_1 \right)^2 + d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right) \left( c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \right)^2$$

$$J_1 = d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left[ \frac{d^2 + \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^2}{12} + \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - e_1 \right)^2 \right] + d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right) \left( c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \right)^2 \quad [41.14]$$

Análogamente

$$J_2 = \frac{\left( c_2 + \frac{d}{2} \right) d^3}{12} + \frac{d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)^3}{12} + d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right) \left( \frac{c_2 + \frac{d}{2}}{2} - e_2 \right)^2 + d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( c_2 + \frac{d}{2} - e_2 \right)^2$$

y operando

$$J_2 = d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right) \left[ \frac{d^2 + \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)^2}{12} + \left( \frac{c_2 + \frac{d}{2}}{2} - e_2 \right)^2 \right] + d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( c_2 + \frac{d}{2} - e_2 \right)^2 \quad [41.15]$$

El valor de  $A_{cp}$  resulta

$$A_{cp} = d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right)$$

o bien

$$A_{cp} = d (c_1 + c_2 + d) \quad [41.16]$$

El valor máximo de  $\tau_{pd}$  se obtiene para la peor combinación de

$$y = \begin{cases} -e_1 \\ c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \end{cases} \quad \text{con } x = \begin{cases} -e_2 \\ c_2 + \frac{d}{2} - e_2 \end{cases} \quad [41.17]$$

d) *Pilar de borde con viga de borde*

Es un caso frecuente, cuyo esquema se indica en la figura 40-8. La viga de borde aumenta los valcres, tanto de  $A_c$  como de los momentos  $J$ .

Tomando momentos respecto al plano de la cara inferior de la placa, la altura  $z$  del c.d.g. de la superficie de punzonamiento resulta:<sup>1,2</sup>

$$z = \frac{d^2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) - 2b(h-d) \left( \frac{h-d}{2} \right)}{2d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + 2b(h-d)}$$

y operando

$$z = \frac{d^2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) - b(h-d)^2}{2 \left[ d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + b(h-d) \right]} \quad [41.18]$$

1 Obsérvese que no se toman momentos de las áreas no sujetas a torsión.

2 DI STASIO y VAN BUREN tratan sólo el pilar de fachada y suponen el perímetro de corte a una distancia del pilar igual al canto de la viga. En lo que sigue y dada la ausencia de experimentación, lo suponemos a  $d/2$ .

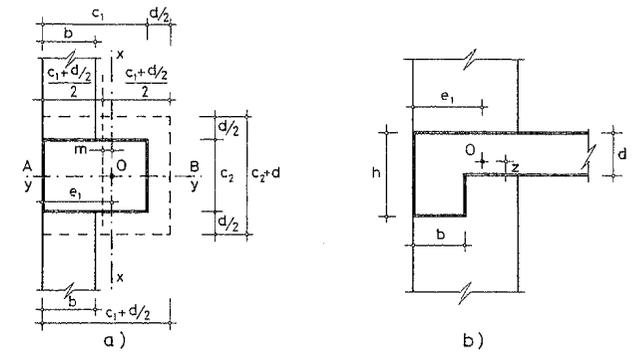


Figura 41-8

Tomando momentos respecto al eje que pasa por el punto medio de  $AB$  y es paralelo a  $XX$  y llamando  $e_1$  a la distancia al c.d.g. de la superficie de punzonamiento (fig. 41-10), se tiene:

$$m = e_1 - \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} = \frac{d(c_2 + d) \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - 2b(h-d) \left[ \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - \frac{b}{2} \right]}{\left[ 2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + c_2 + d \right] d + 2b(h-d)}$$

y operando

$$m = \frac{\frac{d}{4} (2c_1 + d) (c_2 + d) - \frac{b}{2} (h-d) (2c_1 + d - 2b)}{d(2c_1 + c_2 + 2d) + 2b(h-d)} \quad [41.19]$$

$$J_1 = \frac{2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) d^3}{12} + \frac{2d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^3}{12} + \frac{2b(h-d)^3}{12} + \frac{2(h-d)b^3}{12} + 2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) d m^2 + 2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) d \left( \frac{d}{2} - z \right)^2 + (c_2 + d) d \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - m \right)^2 + 2b(h-d) \left[ \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - \frac{b}{2} + m \right]^2 + 2b(h-d) \left[ \frac{h-d}{2} - \frac{d}{2} + z \right]^2$$

Simplificando

$$J_1 = \frac{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)}{6} \left[ d^2 + \left( c_1 + \frac{d}{2} \right)^2 \right] + \frac{b(h-d)}{6} \left[ (h-d)^2 + b^2 \right] + 2d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left[ m^2 + \left( \frac{d}{2} - z \right)^2 \right] + d(c_2 + d) \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - m \right)^2 + 2b(h-d) \left[ \left( \frac{c_1 + \frac{d}{2} - b}{2} + m \right)^2 + \left( \frac{h-d+2z}{2} \right)^2 \right] \quad [41.20]$$

$$J_2 = 2d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) \left( \frac{c_2 + d}{2} \right)^2 + 2b(h-d) \left( \frac{c_2 + d}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} (c_2 + d) d^3 + \frac{1}{12} (c_2 + d)^3 d$$

y operando

$$J_2 = 2 \left( \frac{c_2 + d}{2} \right)^2 \left[ d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + b(h-d) \right] + \frac{d(c_2 + d)}{12} \left[ d^2 (c_2 + d)^2 \right] \quad [41.21]$$

$$A_z = d(2c_1 + c_2 + 2d) + 2b(h-d) \quad [41.22]$$

El valor pésimo de  $\tau_{\max}$  se obtiene para la peor combinación de

$$y = \begin{cases} -e_1 \\ c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \end{cases} \quad \text{con } x = \begin{cases} \frac{c_2 + d}{2} \\ -\frac{c_2 + d}{2} \end{cases}$$

1 Si las vigas tienen una rigidez importante, el problema en la dirección del borde puede ser, esencialmente, un problema de cortante en la viga, ya que el forjado funcionaría como apoyado en ella. No conocemos investigaciones sobre el tema. El método que adoptamos es, por supuesto, conservador.

e) *Pilar de esquina con vigas de borde*

Análogamente se desarrollan las fórmulas correspondientes. Se suponen ambas vigas iguales, como suele ser habitual. El procedimiento es fácilmente generalizable a otros casos (fig. 41-9).

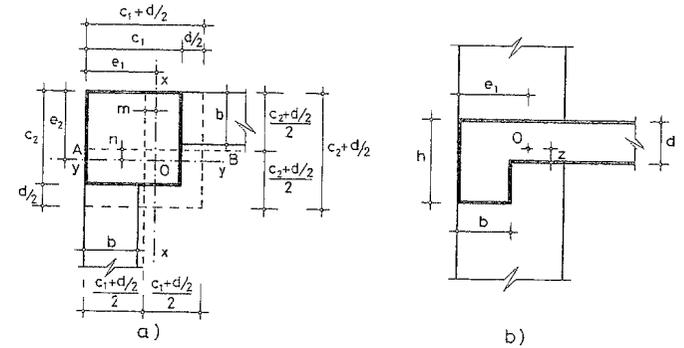


Figura 41-9

Aparecen ahora dos valores distintos de  $z$ , según la dirección en que se producen las torsiones<sup>1</sup>.

$$z_1 = \frac{d \frac{d}{2} \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) - b(h-d) \frac{h-d}{2}}{d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + b(h-d)}$$

y simplificando

$$z_1 = \frac{d^2 \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) - b(h-d)^2}{2 \left[ d \left( c_1 + \frac{d}{2} \right) + b(h-d) \right]} \quad [41.23]$$

Análogamente

$$z_2 = \frac{d^2 \left( c_2 + \frac{d}{2} \right) - b(h-d)^2}{2 \left[ d \left( c_2 + \frac{d}{2} \right) + b(h-d) \right]} \quad [41.24]$$

1 Ver nota al apartado anterior.

Tomando momentos respecto al eje paralelo a X-X por el punto medio de AB y llamando  $e$ , la distancia al c.d.g. de la superficie de punzonamiento (fig. 41-9) se tiene:

$$m = e_1 - \frac{\left(c_1 + \frac{d}{2}\right)}{2} = \frac{\left(c_2 + \frac{d}{2}\right) d \frac{\left(c_1 + \frac{d}{2}\right)}{2} - b(h-d) \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - \frac{b}{2}\right] + b(h-d) \frac{\left(c_1 + \frac{d}{2}\right)}{2}}{\left[\left(c_1 + \frac{d}{2}\right) + \left(c_2 + \frac{d}{2}\right)\right] d + 2b(h-d)}$$

operando

$$m = \frac{\frac{d}{2} \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) \left(c_2 + \frac{d}{2}\right) + \frac{b^2}{2} (h-d)}{d(c_1 + c_2 + d) + 2b(h-d)} \quad [41.25]$$

$$J_1 = \frac{\left(c_1 + \frac{d}{2}\right) d^3}{12} + \frac{d \left(c_1 + \frac{d}{2}\right)^3}{12} + \frac{b(h-d)^3}{12} + \frac{(h-d)b^3}{12} + \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) d m^2 + \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) d \left(\frac{d}{2} - z_1\right)^2 + \left(c_2 + \frac{d}{2}\right) d \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - m\right]^2 + b(h-d) \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - \frac{b}{2} + m\right]^2 + b(h-d) \left[\frac{h-d}{2} - \frac{d}{2} + z_1\right]^2 + b(h-d) \left[\frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - m\right]^2$$

que simplificando conduce a

$$J_1 = \frac{d \left(c_1 + \frac{d}{2}\right)}{12} \left[ d^2 + \left(c_1 + \frac{d}{2}\right)^2 \right] + \frac{b(h-d)}{12} \left[ (h-d)^2 + b^2 \right] + d \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) \left[ m^2 + \left(\frac{d}{2} - z_1\right)^2 \right] + d \left(c_2 + \frac{d}{2}\right) \left[ \frac{c_1 + \frac{d}{2}}{2} - m \right]^2 + \frac{1}{4} b(h-d) \left[ \left(c_1 + \frac{d}{2} - b + 2m\right)^2 + (h-d + 2z_1)^2 + \left(c_1 + \frac{d}{2} - 2m\right)^2 \right] \quad [41.26]$$

Análogamente

$$n = \frac{\frac{d}{2} \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) \left(c_2 + \frac{d}{2}\right) + \frac{b}{2} (h-d) \left(c_2 + \frac{d}{2} - b\right) + b(h-d) \left[\frac{c_2 + \frac{d}{2}}{2}\right]}{d(c_1 + c_2 + d) + 2b(h-d)} \quad [41.27]$$

$$J_2 = \frac{d \left(c_2 + \frac{d}{2}\right)}{12} \left[ d^2 + \left(c_2 + \frac{d}{2}\right)^2 \right] + \frac{b(h-d)}{12} \left[ (h-d)^2 + b^2 \right] + d \left(c_2 + \frac{d}{2}\right) \left[ n^2 + \left(\frac{d}{2} - z_2\right)^2 \right] + d \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) \left[ \frac{c_2 + \frac{d}{2}}{2} - n \right]^2 + \frac{1}{4} b(h-d) \left[ \left(c_2 + \frac{d}{2} - b + 2n\right)^2 + (h-d + 2z_2)^2 + \left(c_2 + \frac{d}{2} - 2n\right)^2 \right] \quad [41.28]$$

$$A_c = d \left[ \left(c_1 + \frac{d}{2}\right) + \left(c_2 + \frac{d}{2}\right) \right] + 2b(h-d)$$

$$A_c = d(c_1 + c_2 + d) + 2b(h-d)$$

[41.29]

El valor pésimo de  $\tau_u$  se obtiene para la peor combinación de

$$y = \begin{cases} -e_1 \\ c_1 + \frac{d}{2} - e_1 \end{cases} \quad \text{con } x = \begin{cases} -e_2 \\ c_2 + \frac{d}{2} - e_2 \end{cases}$$

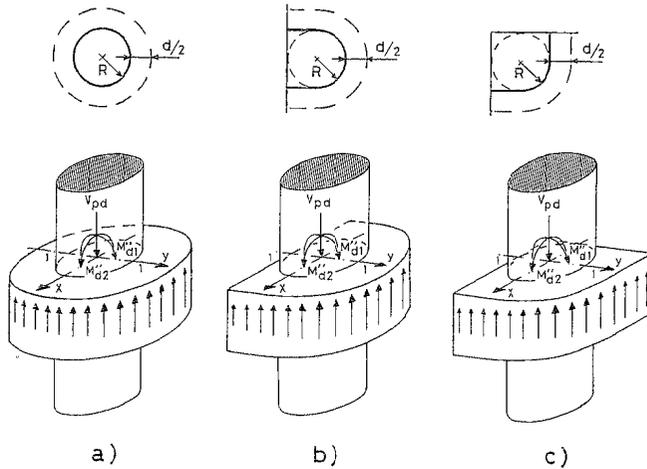


Figura 41-10

f) *Pilar circular interior* (Fig. 41-10a)

$$J_1 = J_2 = \pi \left( R + \frac{d}{2} \right)^3 d + \frac{1}{3} \left( R + \frac{d}{2} \right) d^3 \quad [41.30]$$

$$A_{cp} = 2\pi \left( R + \frac{d}{2} \right) d \quad [41.31]$$

g) *Pilar circular de borde* (Fig. 41-10b)

La distancia del c.d.g. de la superficie de punzonamiento al borde viene dada por

$$e_{gv} = \frac{\frac{2R+d}{2} \left[ \frac{2R+d}{\pi} + R \right] + R^2}{2R + \pi \frac{2R+d}{2}}$$

$$J_1 = 2,20 \left( R + \frac{d}{2} \right)^3 d + \frac{1}{3} \left( R + \frac{d}{2} \right) d^3 \quad [41.32]$$

$$J_2 = 3,57 \left( R + \frac{d}{2} \right)^3 d + \frac{1}{6} \left( R + \frac{d}{2} \right) d^3 \quad [41.33]$$

$$A_{cp} = (2 + \pi) \left( R + \frac{d}{2} \right) d \quad [41.34]$$

h) *Pilar circular de esquina* (Fig. 34-10c)

$$J_1 = J_2 = 1,47 d \left( R + \frac{d}{2} \right)^3 + \frac{1}{6} \left( R + \frac{d}{2} \right) d^3 \quad [41.35]$$

$$A_{cp} = \left( 2 + \frac{\pi}{2} \right) \left( R + \frac{d}{2} \right) d \quad [41.36]$$

El valor de  $\tau_{vu}$  obtenido mediante la fórmula [41.4] no debe superar los valores [41.1] en todos los casos anteriores.

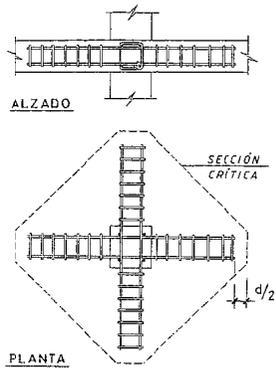
Las distancias del c.d.g. de la superficie de punzonamiento a los bordes vienen dadas por

$$e_{gv} = e_{gv} = \frac{R \left[ 2,5 R + \frac{d}{2} \right] + \pi \left( \frac{2R+d}{4} \right) \left[ \frac{2R+d}{\pi} + R \right]}{2R + \pi \left( \frac{2R+d}{2} \right)}$$

ACI 318-95 contempla únicamente el caso de flexión en una dirección. La fórmula [41.4] es una generalización nuestra al caso general de flexión en dos direcciones. Parece razonable, cuando se consideran los momentos en ambas direcciones, aceptar un incremento en la fórmula [41.1]. Se sugiere un incremento del 30% siempre que la tensión media no supere el valor [41.1].

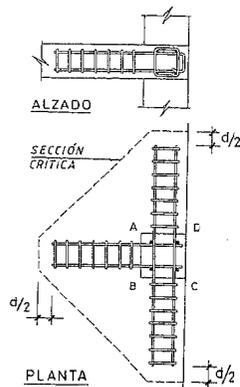
Si  $\tau_{vu}$  es rebasada, debe disponerse armadura transversal de acuerdo con la teoría general de corte. Las normas no suelen indicar cómo comprobar, cuando hay momentos, la tensión  $\tau_{vu}$  al acabarse la zona de armadura transversal. Un criterio razonable es utilizar la fórmula [41.4] pero despreciando los momentos, que ya en estos perímetros producen efectos despreciables, pero manejando como perímetros críticos los definidos por el final de la armadura transversal.

Recientemente, la norma ACI 318-95 (41.2) ha adoptado prácticamente este criterio (sin citar expresamente el no tener en cuenta los momentos) de acuerdo con lo que se indica en las figuras 41-11 y 41-12.



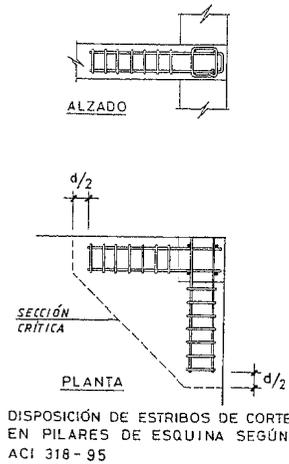
DISPOSICIÓN DE ESTRIBOS DE CORTE EN PILARES INTERIORES SEGÚN ACI 318-95

Figura 41-11



DISPOSICIÓN DE ESTRIBOS DE CORTE EN PILARES DE FACHADA SEGÚN ACI 318-95

Figura 41-12



DISPOSICIÓN DE ESTRIBOS DE CORTE EN PILARES DE ESQUINA SEGÚN ACI 318-95

Figura 41-13

No se dispone de momento de ensayos ni análisis que permitan tratar el pilar de esquina, pero parece razonable adoptar el perímetro indicado en la figura 41-13.

#### 41.2.5. CASO DE PUNZONAMIENTO EN PLACAS PRETENSADAS

La Norma ACI 318-95 prevé específicamente el caso de punzonamiento en estructuras pretensadas, mediante la fórmula

$$F_{pd} = (0,007 \beta_p \sqrt{f_{ck}} + 0,0026 \sigma_{po}) b_o d + F'_{pd} \quad [41.37]$$

donde:

$\beta_p$  toma el valor menor de los dos siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,5 \\ \frac{\alpha_s d}{b_o} + 1,5 \end{array} \right.$$

( $\alpha_s = 40$  para pilares interiores, 30 para pilares de borde y 20 para pilares de esquina)

$b_o$  es el perímetro de la sección crítica.

$d$  es el canto útil.

$f_{ck}$  es la resistencia característica del hormigón.

$\sigma_{po}$  es la media de las tensiones de pretensado en el c.d.g. de la sección, en las dos direcciones perpendiculares del pretensado.

$F_{pd}$  es el esfuerzo de cálculo de punzonamiento.

$F'_{pd}$  es la componente vertical de todos los tendones de pretensado que atraviesan la superficie crítica.

La fórmula [41.37] sólo puede aplicarse si se cumplen todas las condiciones siguientes:

- Ningún punto de la sección transversal puede estar a una distancia del borde de la placa inferior a cuatro veces el canto total  $h$  de la placa.
- $f_{ck}$  en [41.36] no puede considerarse en el cálculo con un valor superior a 35 MPa.
- $\sigma_{po}$  en cada dirección no debe ser inferior a 0,88 N/mm<sup>2</sup> ni debe considerarse un valor superior a 3,5 N/mm<sup>2</sup>.

Si estas condiciones no se cumplen, la comprobación a punzonamiento debe hacerse sin considerar el pretensado.

#### 41.2.6 EMPLEO DE CAPITILES METÁLICOS PARA RESISTIR EL PUNZONAMIENTO

El empleo de esta solución no es contemplado por EHE, pero sí lo es por ACI 318-95. El método, que exponemos a continuación, se basa fundamentalmente en los

ensayos de CORLEY y HAWKINS descritos en las referencias (41.11) y (41.12) y realizados en 1968 y 1974. Hasta la edición de 1977, el ACI aplicaba el método solamente a pilares interiores. En la edición de 1983 lo extendió a pilares de fachada, pero sigue sin tratar el caso del pilar de esquina, para el cual, por tanto, sigue faltando un método de cálculo normalizado.

La solución de capiteles metálicos es realmente muy antigua. CORLEY y HAWKINS en la referencia (41.11) citan aplicaciones del sistema por WHEELER en 1930.

Un capitel metálico debe estar formado por perfiles I ó  $\square$  soldados y con continuidad a través del soporte (fig. 41-14). Los extremos de los perfiles deben cortarse con ángulos no menores de 30° con el plano horizontal. Tampoco conviene que ese ángulo sea mucho mayor de 30° (por ejemplo corte ortogonal), ya que conduce a variaciones muy bruscas de la sección metálica, que concentran las tensiones de retracción y de contracción térmica del hormigón, pudiendo producir fisuras al terminar el capitel metálico.

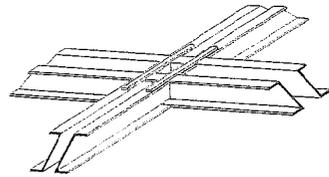


Figura 41-14

El ala comprimida (inferior) de cada perfil debe estar situada dentro de una altura  $0,3 d$  a partir de la cara comprimida (inferior) de la losa, siendo  $d$  el canto útil del forjado en la zona del capitel.

Para que un capitel metálico presente un resultado satisfactorio, en su diseño, deben considerarse simultáneamente los tres aspectos siguientes:

- Debe tener resistencia a flexión suficiente para garantizar que se alcance la resistencia a punzonamiento de la placa antes que la capacidad resistente a flexión del capitel.
- A la terminación del capitel metálico, las tensiones de corte en la placa no deben rebasar los límites anteriormente fijados.
- Si las condiciones anteriores se cumplen, puede contarse con la colaboración del capitel a flexión.

Definimos como  $\alpha$ , la relación de rigideces (EI) de la sección de uno de los brazos del capitel (formado por uno o dos perfiles) a la de la sección homogeneizada fisurada<sup>1</sup> de ancho  $c_2 + d$  y canto  $d$ , siendo  $c_2$  el ancho del soporte en dirección perpendicular

<sup>1</sup> La sección compuesta está formada por el área de hormigón comprimido (en estado lineal), el área del perfil y la de la armadura de tracción de la losa. Para la determinación de fibra neutra y valor de  $\frac{E_s}{E_c}$ , véase el capítulo 36.

al brazo del capitel considerado ( $\alpha$ , no debe ser menor de 0,1). CORLEY y HAWKINS demuestran que puede suponerse (fig. 41-15) una distribución uniforme de fuerza de punzonamiento a lo largo del brazo, de valor  $\frac{\alpha_v V_{cu}}{n}$ , siendo  $V_{cu}$  el cortante absorbido por el hormigón, de la sección antes definido y  $n$  el número de brazos, con una concentración en una zona de ancho  $h_v$  (canto del perfil), de valor igual al cortante total por cara de soporte,  $\frac{F_{pd}}{n}$  menos la parte directamente transmitida al pilar por el hormigón, que será

$$\frac{V_{cu}}{n} - \frac{\alpha_v V_{cu}}{n} = \frac{V_{cu}}{n} (1 - \alpha_v)$$

CORLEY y HAWKINS deducen también de sus ensayos que  $V_{cu} \approx \frac{F_{pd}}{2}$  con lo

que, tomando momentos en la cara del soporte, el momento correspondiente a los perfiles metálicos de un brazo resulta

$$M_u = \left[ \frac{F_{pd}}{n} - \frac{F_{pd}}{2n} \right] h_v + \frac{\alpha_v F_{pd}}{2n} \left[ \ell_c - \frac{c_1}{2} \right]$$

$$M_u = \frac{F_{pd}}{2n} \left[ h_v + \alpha_v \left( \ell_c - \frac{c_1}{2} \right) \right] \quad [41.38]$$

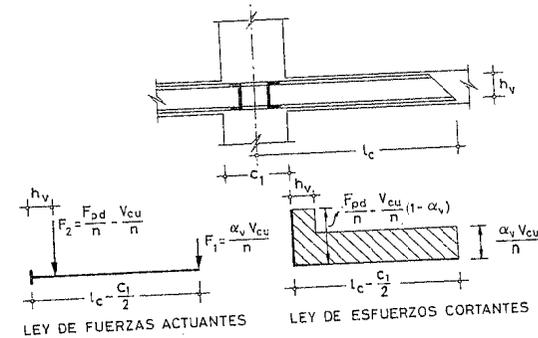


Figura 41-15

Debe considerarse como sección crítica a punzonamiento aquella que corta a los brazos (fig. 41-16) a  $3/4$  de la distancia de la cara del soporte al extremo del brazo del capitel metálico y, en el resto, es de perímetro mínimo, pero a una distancia  $d/2$  como mínimo del perímetro del soporte.

<sup>1</sup>  $M_u$  es el momento de cálculo.

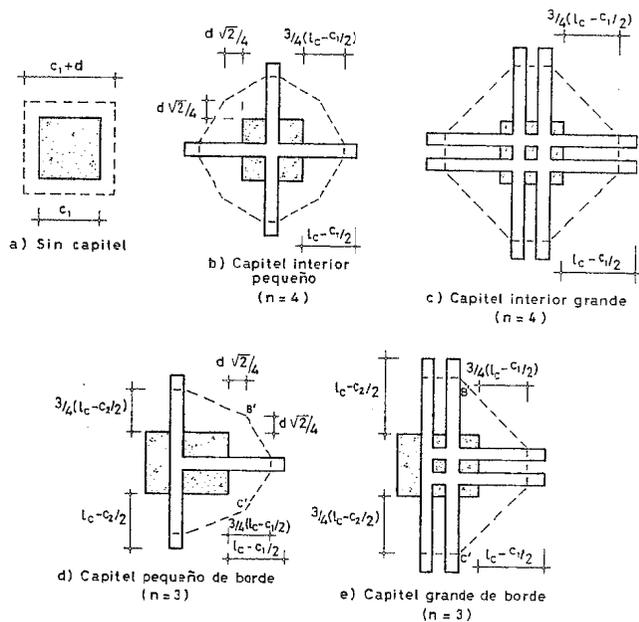


Figura 41-16

Sobre esta sección crítica, llamando  $u_c$  a su perímetro, debe cumplirse [41.1], pero además, en la sección crítica a punzonamiento, definida para el caso en que no hay capitel metálico (fig. 41-16a), debe cumplirse

$$F_{pd} \leq 0,56 u_c d \sqrt{f_{cd}} \quad [41.39]$$

En lo que respecta a la contribución del capitel metálico a la resistencia a flexión, de acuerdo con la figura 41-14, puede aceptarse que cada brazo y su opuesto del capitel contribuyen a absorber un momento en la banda de pilares

$$M_d = \frac{\alpha_v F_{pd}}{2n} \left( l_c - \frac{c_1}{2} \right) \quad [41.40]$$

pero  $M_d$  no debe tomarse mayor que el menor de los tres límites siguientes:

- El 30% del momento total correspondiente a la banda de soportes.
- La diferencia de momentos producida en la longitud  $l_c$ .
- El valor de  $M_d$  dado por [41.38].

Finalmente, si existe transferencia de momentos entre placa y pilar, el capitel metálico debe ser adecuadamente anclado al pilar para poder transmitir los momentos correspondientes.

### 41.3 MÉTODO DE EHE

Sigue en parte al MODEL CODE 90 y en parte al EC-2, en cuanto a definir como perímetro crítico el distante  $2d$  (en lugar de  $d/2$  como define el ACI). Para pilares interiores ello conduce a los perímetros indicados en la figura 41-17.

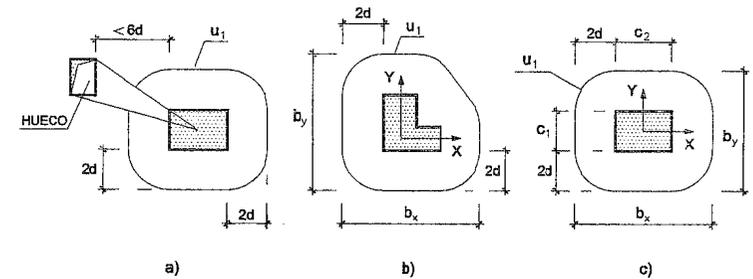


Figura 41-17

Para pilares de borde y esquina, los perímetros críticos se definen en la figura 41-18.

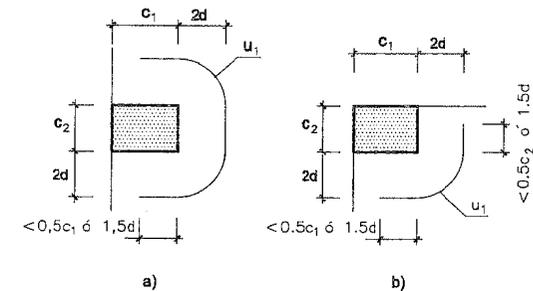


Figura 41-18

En todos los casos se considera, para definir el perímetro crítico, el perímetro del pilar de la planta inferior o del capitel si existiese.

#### 41.3.1. PLACAS SIN ARMADURA DE PUNZONAMIENTO<sup>1</sup>

No se necesita armadura de punzonamiento si se cumple la condición

$$\tau_{pd} \leq \tau_{cd} \quad [41.41]$$

donde

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd,ef}}{u_c d} \quad [41.42]$$

<sup>1</sup> Para zapatas véase el Capítulo 63.

$F_{p,ef}$  es el esfuerzo efectivo de punzonamiento, que se define como

$$F_{p,ef} = \beta F_{pd} \quad [41.43]$$

donde:

$\beta = 1,00$  si no existe transferencia de momentos de la placa al pilar

$\beta = 1,15$  para pilares interiores en los que existe transferencia

$\beta = 1,40$  para pilares de borde

$\beta = 1,50$  para pilares de esquina

$F_{pd}$  es el esfuerzo de punzonamiento. En su evaluación se pueden descontar las cargas exteriores y la componente vertical de la fuerza de los tendones de pretensado que pasan por un ancho igual al del pilar de la planta inferior más  $h/2$  a cada lado.

El valor de  $\tau_{cd}$  viene dado por:

$$\tau_{cd} = 0,12 \xi (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3} \quad [41.44]$$

En [41.44], se tiene:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad \text{con } d \text{ en mm}$$

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad \text{donde } \rho_x, \rho_y \text{ son las cuantías geométricas de las armaduras en las dos direcciones horizontales}^1 \text{ en un ancho igual al del pilar más } 3d \text{ a cada lado.}$$

### 41.3.2. PLACAS CON ARMADURAS DE PUNZONAMIENTO

Si no se cumple la condición [41.37] es necesario actuar sobre uno o varios de los aspectos siguientes:

- Aumentar el canto
- Disponer Capiteles
- Aumentar el tamaño del pilar inferior
- Aumentar las cuantías  $\rho_x, \rho_y$  de las armaduras de flexión.
- Disponer armadura transversal<sup>2</sup>.

El cálculo de la armadura transversal se realiza considerando una sección de formato concéntrico y paralelo al definido en 41.3, que denominaremos  $u'$ . La armadura puede adoptar soluciones basadas en estribos con barras dobladas<sup>3</sup> de acuerdo con lo que se indica en la figura 41-19.

1 De nuevo al estar basada la fórmula [41.44] en ensayos realizados fundamentalmente con acero B400, si se emplea acero B500 los valores de  $\rho$  deben, en nuestra opinión, multiplicarse por 1,25.  
 2 Obsérvese que con la formulación de EHE no sirve de nada mejorar la resistencia del hormigón.  
 3 Algunas soluciones especiales de armadura serán consideradas más adelante

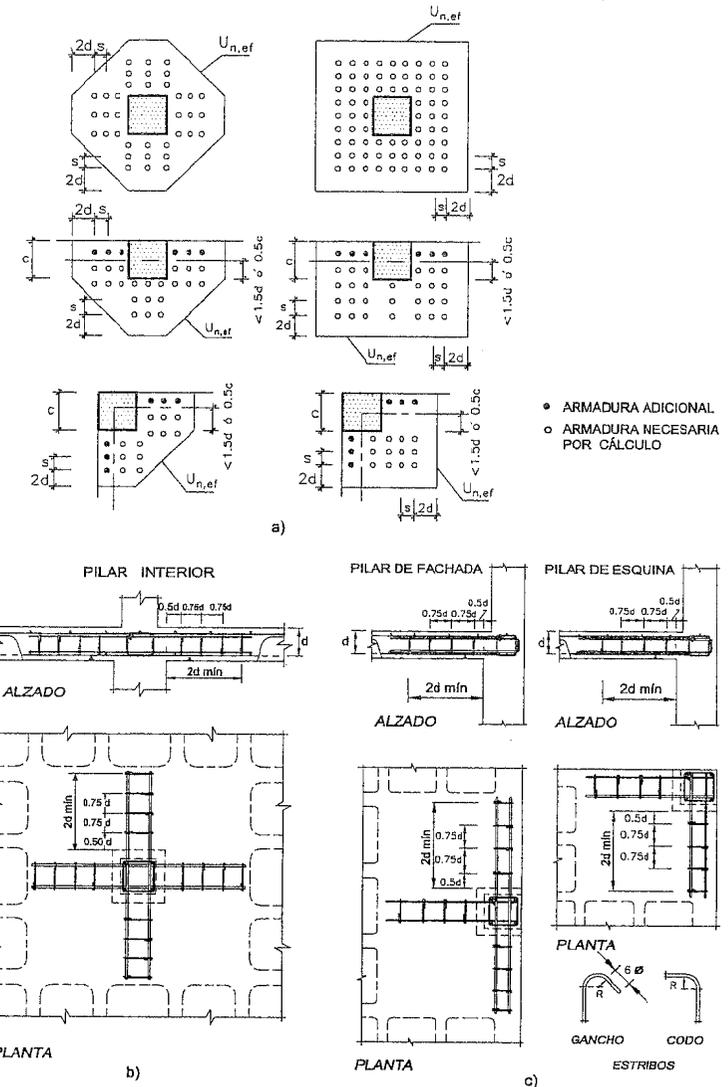


Figura 41-19

En todos los casos, llamando  $s$  a la separación en sentido radial de los perímetros concéntricos de armaduras y  $A_{sv}$  el área total de armadura de punzonamiento del perímetro concéntrico  $u'$ , la fórmula de cálculo es la [39.67], es decir

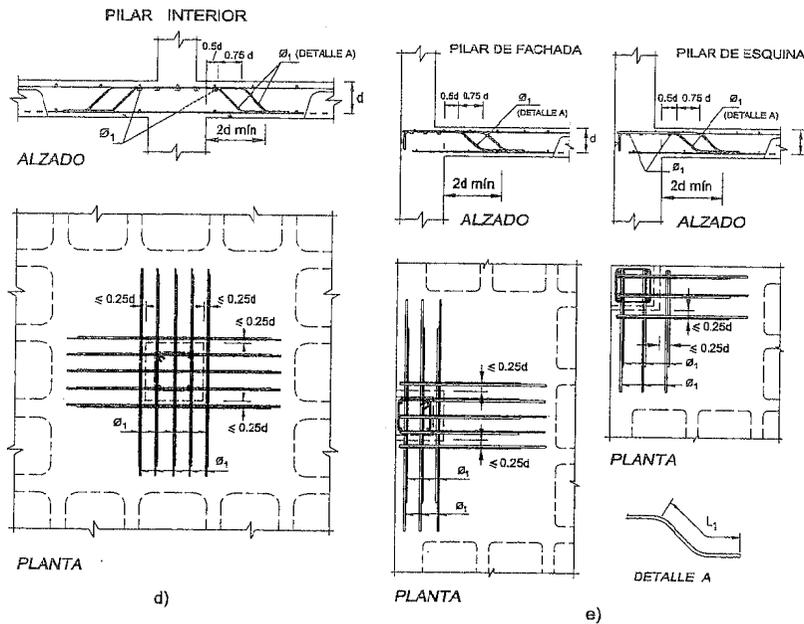


Figura 41-19 (Cont.)

$$\tau_{sd} = \frac{0,9 A_{sw} f_{y\alpha d} \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \theta)}{s u_1} \quad [41.45]$$

donde  $s$  es la separación, en dirección radial, entre dos perímetros concéntricos de armaduras de punzonamiento.

Debe cumplirse

$$\tau_{pd} \leq \tau_{cd} + \tau_{sd}$$

#### 41.3.3. ZONAS EXTERIORES A LA ARMADURA DE PUNZONAMIENTO

En estas zonas puede ya aceptarse que es despreciable el efecto de transferencia de momentos de la placa al pilar y por lo tanto la comprobación se realiza con el valor de  $F_{pd}$  y no de  $F_{pd,ef}$ , sea cualquiera la posición del pilar.

Deberá cumplirse

$$F_{pd} \leq 0,12 \xi (100 \rho_i f_{ck})^{1/3} u_{n,ef} d \quad [41.46]$$

con los mismos significados que en [41.44] y además:

$u_{n,ef}$  = parámetro crítico definido en la figura 41-19

$\rho_i$  = cuantía geométrica de la armadura longitudinal que atraviesa el perímetro  $u_{n,ef}$ <sup>1</sup>

#### 41.3.4. MÁXIMA COMPRESIÓN EN BIELAS

También en el caso de punzonamiento debe controlarse la excesiva compresión de las bielas. EHE lo hace mediante el control del valor

$$\frac{F_{pd}}{u_o d} \leq f_{icd} \quad [41.47]$$

donde:

$f_{cd}$  resistencia a compresión del hormigón que, para este caso se adopta el valor

$$f_{icd} = 0,30 f_{cd} \quad [41.48]$$

$u_o$  perímetro de comprobación del hormigón, que se define en línea gruesa en la figura 41-19.

#### 41.4 MÉTODO DEL MODEL CODE 90

La tensión tangencial máxima en el perímetro crítico viene dada por la expresión

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{u_1 d} + \frac{\lambda_1 M_{pd}}{W_1 d} \quad [41.49]$$

donde:

$W_1$  es una función del perímetro crítico  $u_1$ , definida por la fórmula

$$W_1 = \int_0^n e \, dl$$

siendo  $dl$  un elemento diferencial de longitud del perímetro y  $e$  la distancia de  $dl$  al eje del momento  $M_{sd}$ .

$\lambda$  se definió ya en 19.4.4

La deducción de  $W_1$  se realiza a continuación para los diferentes casos:

a) *Pilar rectangular interior.* (Fig. 41-20 a) y b)

$$W_1 = \int_0^m = 2 \left[ 2 \frac{c_1}{2} \frac{c_1}{4} + c_2 \left( \frac{c_1}{2} + 2d \right) + 2\pi \frac{2d}{2} \left( \frac{c_1}{2} + \frac{4d}{\pi} \right) \right] \quad [41.50]$$

1 De nuevo en nuestra opinión, la fórmula es válida para acero B 400, y debe multiplicarse  $\rho$  por 1,25 si el acero es B 500.

2 Como en el caso de EHE, en el cálculo del valor de  $F_{sd}$  deben descontarse las cargas exteriores y la componente vertical de la fuerza de los tendones de pretensado que pasen por un ancho igual al del pilar de la planta inferior más  $h/2$  a cada lado.

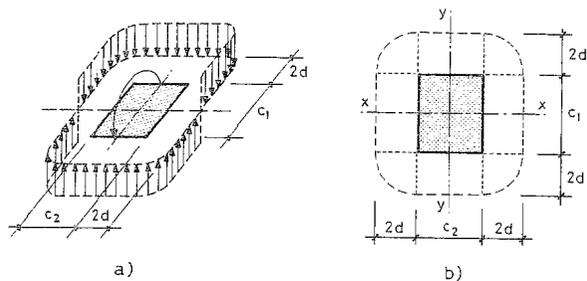


Figura 41-20

y operando

$$W_1 = \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 + 4 c_2 d + 16 d^2 + 2 \pi d c_1 \quad [41.51]$$

Los valores de  $\lambda$  se obtienen en la tabla T-41.1 en función de  $c_1$  y  $c_2$ .

TABLA T-41.1

$c_1/c_2$	0,5	1,0	2,0	3,0
$K$	0,45	0,60	0,70	0,80134

Si existen momentos  $M_{1pd}$  y  $M_{2pd}$  [41.45] se transforma en

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u_1 d} + \frac{\lambda_1 M_{1pd}}{W_1 d} + \frac{\lambda_2 M_{2pd}}{W_2 d} \quad [41.52]$$

Los valores de  $\lambda_2$  se obtienen cambiando  $c_1$  por  $c_2$  en la fórmula [41.51] y en la tabla T-41.1.

b) *Pilar rectangular de borde*

Es aplicable el mismo tratamiento anterior, resultando

<sup>1</sup> En los casos en que el c.d.g. de la superficie crítica no coincide con el del pilar (pilares de borde y de esquina) en [41.52] deben manejarse los valores  $F_{pd}$ ,  $M_{1pd}$  y  $M_{2pd}$  referidos al nuevo c.d.g.

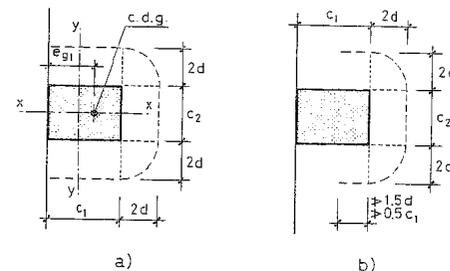


Figura 41-21

Si sobre el pilar actúan momentos  $M_{1pd}$  y  $M_{2pd}$ , es inmediato deducir la excentricidad del c.d.g. de la superficie de corte (Fig. 41-21 a).

$$e_{g_1} = \frac{c_1^2 + c_2 (c_1 + d) + 2 \pi d c_1 + 8 d^2}{2 c_1 + c_2 + 2 \pi d} \quad [41.53]$$

$$W_1 = e_{g_1}^2 + (c_1 - e_{g_1})^2 + 2 \pi d (c_1 - e_{g_1}) + 8 d^2 + c_2 (c_1 + 2d - e_{g_1}) \quad [41.54]$$

$$W_2 = 2 c_1 \left( \frac{c_2}{2} + 2d \right) + \frac{c_2^2}{4} + \pi d c_2 + 8 d^2 \quad [41.55]$$

El propio MODEL CODE 90, para el caso más habitual de que la excentricidad de la carga se produzca hacia el interior de la placa y  $M_{2pd} = 0$ , adopta una fórmula simplificada

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{u_1^* d} \quad [41.56]$$

donde  $u_1^*$  es el perímetro reducido indicado en la figura 41-21b).

De acuerdo con ello la fórmula [41.49] puede en estas condiciones, sustituirse por la aproximada

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{u_1^* d} + \frac{k_2 M_{2d}}{W_2 d} \quad [41.57]$$

donde  $W_2$  se refiere al perímetro total  $u_1$  y viene dada por [41.55]. En este caso  $\lambda_2$  se obtiene en la tabla T-41.1, pero sustituyendo  $\frac{c_1}{c_2}$  por  $\frac{c_1}{2c_2}$ . (Recuérdese que en este caso para entrar en la tabla debe cambiarse  $c_1$  y  $c_2$ ).

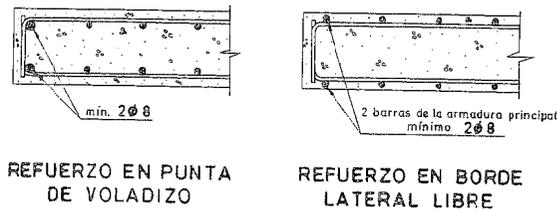


Figura 52-17

## 52.4 FORJADOS NERVADOS

Su tratamiento es idéntico al expuesto en 52.3, excepto en los puntos concretos que se citan a continuación.

### 52.4.1 SECCIÓN TRANSVERSAL

El perfil de la sección transversal deberá cumplir lo indicado en la figura 52-18<sup>1</sup>. Además, es recomendable que el ancho  $b$  de los nervios no sea inferior a 70 mm ni a la cuarta parte del canto total del forjado. En estos forjados deben estudiarse con especial cuidado los recubrimientos y colocación de armaduras.

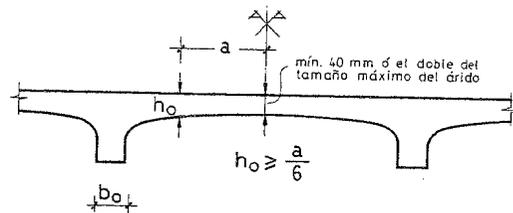


Figura 52-18

Se entiende que el espesor de la losa superior, tenida en cuenta la armadura transversal que más adelante se indica, es suficiente para resistir la flexión transversal debida a las cargas actuantes. Esto deberá probarse, bien por un cálculo teórico o bien mediante ensayos.

### 52.4.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Dado que en este caso la capacidad resistente a flexión es mucho mayor a momentos positivos que a momentos negativos, resultan especialmente recomendables los métodos expuestos en 18.4. (Si se emplea el procedimiento de cimbrado de plantas consecutivas, véase 52.7.).

<sup>1</sup> Sería preferible un mínimo de 50 mm, dados los tamaños máximos usuales del árido y las inevitables desviaciones de construcción de la losa superior del forjado.

### 52.4.3 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN

Son aplicables los métodos del Capítulo 36, especialmente los referentes a la sección en T, incluso lo relativo al ancho eficaz de la cabeza de compresión.

Frecuentemente, el bloque comprimido en el estado límite último tiene una profundidad inferior al espesor mínimo de la losa superior y la sección puede ser calculada a momentos positivos y negativos como una sección rectangular de anchos  $b$  y  $b_0$ , respectivamente (fig. 52-19).

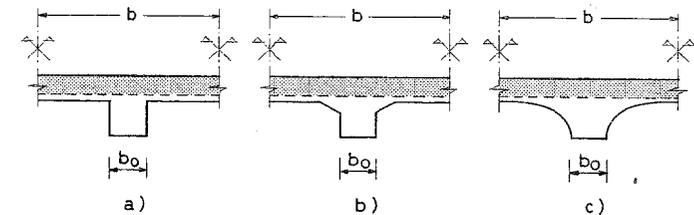


Figura 52-19

Sin embargo, en otros casos, la sección está más intensamente aprovechada a momentos positivos y el bloque comprimido afecta a una zona de definición geométrica más complicada (fig. 52-20).

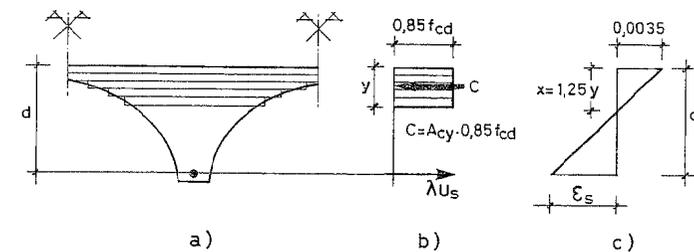


Figura 52-20

En ese caso, el procedimiento más práctico es el siguiente:

Se van eligiendo (fig. 52-20 a)), diferentes valores de  $y$ , variando por incrementos de centímetro en centímetro. De acuerdo con el método del diagrama rectangular, expuesto en 36.3, para cada valor de  $y$  se calcula el área comprimida  $A_{cy}$  y la profundidad  $x = 1,25y$  de la fibra neutra de deformaciones. Con la ecuación de compatibilidad se calcula  $\epsilon_s$  y  $\lambda$  de la Tabla T-36.1 y, con ello, la tensión  $\sigma_s$ , bien con  $\sigma_s = f_{yd}$ , si se trata de un acero con escalón de relajamiento, o por la expresión  $\sigma_s = \lambda f_{yd}$ , si el acero no tiene escalón de relajamiento. El c.d.g. del área  $A_{cy}$  se determina mediante la expresión

$$y_g = \frac{\sum_{i=1}^n b_{yi} y_i}{\sum_{i=1}^n b_{yi}} \quad [52.9]$$

c) Pilar rectangular de esquina

De acuerdo con lo que indica la figura 41-22, se tiene

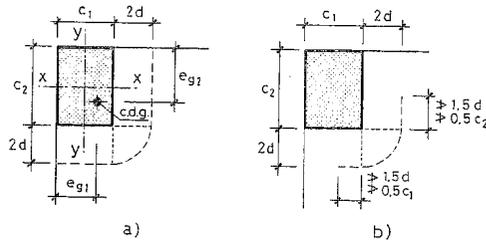


Figura 41-22

análogamente a los casos anteriores

$$e_{s_1} = \frac{c_2 (c_1 + 2d) + \frac{c_1^2}{2} + c_1 \pi d + 4 d^2}{c_1 + c_2 + \pi d} \quad [41.58]$$

$$W_1 = \frac{e_{s_1}^2}{2} + \frac{(c_1 - e_{s_1})^2}{2} + \pi d \left( c_1 - e_{s_1} + \frac{4d}{\pi} \right) \quad [41.59]$$

$$e_{s_2} = \frac{c_1 (c_2 + d) + \frac{c_2^2}{2} + c_2 \pi d + 4 d^2}{c_1 + c_2 + \pi d} \quad [41.60]$$

$$W_2 = \frac{e_{s_2}^2}{2} + \frac{(c_2 - e_{s_2})^2}{2} + \pi d \left( c_2 - e_{s_2} + \frac{4d}{\pi} \right) \quad [41.61]$$

También para este caso si la excentricidad de la carga se produce hacia el interior de la placa, el Código autoriza a emplear la fórmula simplificada

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{u_1 d} \quad [41.62]$$

donde el perímetro  $u_1$  es el definido en la figura 41-22 b) y si hay momentos basta generalizar el caso b) anterior.

La comprobación de  $\tau_{pd}$ , disposición de armadura de corte, etc., son idénticas a lo expuesto en 41.3 para el método de EHE.

**41.5 PUNZONAMIENTO EN PLACAS PRETENSADAS SEGÚN EL EUROCÓDIGO EC-2**

A diferencia de EHE y del MODEL CODE que no consideran para el cálculo a punzonamiento la existencia del pretensado, más que en lo que se refiere a la reducción del valor de  $F_{sd}$  que allí se dijo debido a la componente vertical de la fuerza de pretensado, el EUROCÓDIGO EC-2 tiene en cuenta la mejora de la resistencia a corte de la placa que el pretensado produce. Lo hace mediante la fórmula

$$\tau_{pd} \leq \tau_{rd}$$

$$\tau_{pd} = \frac{F_{pd,ef}}{u_1 d}$$

$$\tau_{rd} = \tau_{Rd} k \left[ 1,2 + 40 \left( \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} + \frac{\sigma_{cp0}}{f_{yd}} \right) \right] \geq 0,015$$

$F_{pd,ef}$  viene dada por [41.43] y  $\tau_{Rd}$  viene dada por la tabla T-41.2.

TABLA T-41.2

$f_{ck}$ (MPa)	25	30	35	40	45	50
$\tau_{Rd}$	0,30	0,34	0,37	0,41	0,44	0,48

$$k = 1,6 - d \leq 1 \quad (d \text{ en m})$$

$\rho_x, \rho_y$ : cuantías geométricas de la armadura de tracción en las direcciones x e y, respectivamente

$$d = \frac{d_x + d_y}{2}$$

$$\sigma_{cp0} = \frac{N_{pd}}{A_c}$$

$N_{pd}$ : valor de la fuerza de pretensado, sin pérdidas, es decir de la fuerza inicial. Si es distinta en cada dirección, se utilizará el valor medio. (Recuérdese que en este caso  $N_{pd}$  debe calcularse con  $\gamma_s = 0,9$ ).

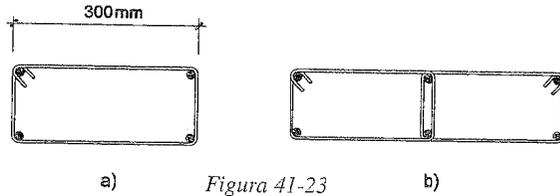
Es conveniente no considerar, en cada dirección, más que los tendones de pretensado comprendidos en una banda igual al ancho del pilar de la planta inferior más un canto  $h$  de la placa a cada lado.

## 41.6 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS

La eficacia de la armadura de punzonamiento está en gran medida condicionada por los detalles constructivos adoptados en el Proyecto.

Además de lo indicado en la figura 41-19 deben seguirse las recomendaciones siguientes:

- El ancho cubierto por la armadura debe ser el máximo indicado en la figura 41-19.
- Si se emplean barras dobladas, en la serie de barras que doblan en la misma sección, la separación no debe pasar de 300 mm.
- Si se emplean estribos (fig. 41-23) la solución a) sólo es válida si el ancho del



estribo no supera los 300 mm. En otro caso deben utilizarse estribos múltiples con el fin de que las ramas verticales estén repartidas a lo largo del perímetro de punzonamiento.

- Las condiciones de anclaje deben estudiarse con especial cuidado, ya que los cantos suelen ser pequeños.

## 41.7 SISTEMAS INDUSTRIALIZADOS DE ARMADURAS DE PUNZONAMIENTO

Aparte de los ábacos metálicos ya estudiados en 41.2.5 (de acuerdo con ACI 318-95, ya que EHE no los considera) existen muchas otras soluciones industrializadas.

Una serie de ellas está constituida por celosías espaciales de diversos tipos realizadas con alambres electrosoldados (fig. 41-24).

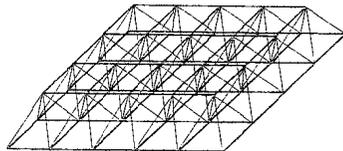
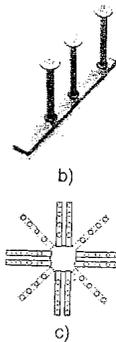


Figura 41-24



a)



b)

c)

(Cortesía de "DEHA")  
Figura 41-25

Otra variante se consigue mediante pletinas con conectadores metálicos tal como la que se representa en la figura 41-25. Esta solución que por supuesto necesita ser verificada experimentalmente por el fabricante en cuanto a sus condiciones de funcionamiento y en particular de anclaje, tiene considerables ventajas respecto a las otras al evitar la congestión de armaduras en una zona donde se necesita un hormigonado fácil y una compactación energética.

## BIBLIOGRAFÍA

- MODEL CODE CE-FIP FOR CONCRETE STRUCTURES. 1990.
- ACI 318-89 "Building Code Requirements for Reinforced Concrete". American Concrete Institute. Detroit 1989.
- EUROCÓDIGO N° 2 "Design of Concrete Structures". Part 1. General Rules and Rules for Buildings. Commission of the European Communities. 1989.
- RICE, P.F.; HOFFMAN, E.S. "Structural Design Guide to the ACI Building Code". Van Nostrand. New York 1979.
- DI STASIO, J.; VAN BUREN, M.P. "Transfer of Bending Moment Between Flat Plate Floor and Column". Journal ACI September 1960.
- CALAVERA, J. "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación". INTEMAC, 4ª edición. Madrid 1988.
- MORÁN CABRÉ, F. "Tablas para la comprobación a punzonamiento por el método de la EH-80". Informes de la Construcción n° 340. Mayo 1982.
- JIMÉNEZ MONTOYA, P. "Comprobación a punzonamiento según la Instrucción Española EH-80". Informes de la Construcción n° 342. 1982.
- PÉREZ CALDENTÉY
- AJDUKIEWICZ, A.; STAROSOLLSKI, W. "Reinforced-Concrete Slab Column Structures". ELSEVIER. Amsterdam 1990.
- CORLEY, W.G.; HAWKINS, N.M. "Shearhead Reinforcement for Slabs". Journal A.C.I. October 1968.
- HAWKINS, N.M.; CORLEY, W.G. "Moment Transfer to Columns in Slabs with shearhead Reinforcement". "Shear in Reinforced Concrete". SP-42. American Concrete Institute. Detroit 1974.

## CAPÍTULO 42

### ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE TORSIÓN

#### 42.1 INTRODUCCIÓN

El hecho de que la torsión en el hormigón armado haya recibido, relativamente hablando, poca atención hasta época reciente, se debe probablemente a que las sollicitaciones de torsión surgen en la mayoría de los casos sólo en estructuras hiperestáticas, de uso relativamente moderno.

De manera análoga al caso del esfuerzo cortante, pero más intensa en el que nos ocupa, nuestros conocimientos sobre el tema son todavía insuficientes pero se han registrado avances importantes en los últimos años.

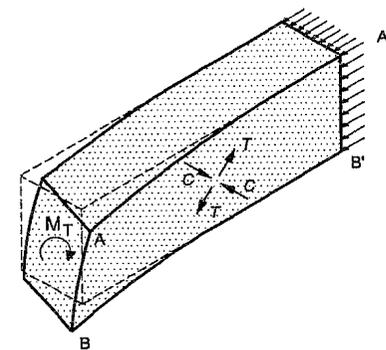


Figura 42-1

En la figura 42-1 se indica el caso de un voladizo empotrado al que, en su extremidad libre, se le ha aplicado un momento torsor  $M_T$ . Como se ve por la deformación de la pieza, en la cara  $ABB'A'$  se producen tracciones en una dirección y compresiones en la ortogonal. Si el giro es suficiente, las tracciones  $T$  fisurarán la pieza y las fisuras se orientarán helicoidalmente en las cuatro caras.

Como veremos, el momento torsor lo resistiremos con armaduras transversales y longitudinales y los estados límites que podremos alcanzar serán:

- Agotamiento de la armadura transversal.
- Fallo de anclaje de la armadura transversal.
- Agotamiento de la armadura longitudinal.
- Ancho excesivo de la fisuración de torsión.
- Compresión excesiva del hormigón por torsión.

Todos ellos serán analizados en los apartados siguientes.

Es de excepcional importancia distinguir entre:

- *Torsión de compatibilidad.* Es la debida a la necesidad de compatibilizar las deformaciones mediante rotaciones angulares de la pieza considerada con las contiguas, pero sin que los pares torsores sean necesarios para el equilibrio.
- *Torsión de equilibrio.* Los pares torsores son necesarios para el equilibrio de la pieza.

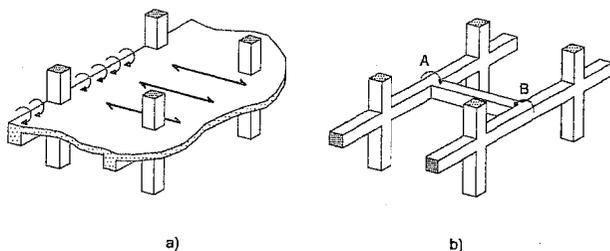


Figura 42-2

En la figura 42-2 se indican dos casos de torsión de compatibilidad, muy frecuentes en estructuras de edificación. La figura a) corresponde al empotramiento de un forjado unidireccional en una viga de borde en fachada. La figura b) representa una viga  $AB$  embrochada en dos vigas paralelas.

La figura 42-3 representa un caso de torsión de equilibrio, correspondiente a una losa saliendo en voladizo de una viga. El giro de la viga por torsión no reduce su momento torsor.

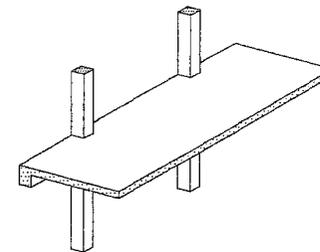


Figura 42-3

Debe destacarse que la torsión de compatibilidad, al no ser necesaria para el equilibrio, puede ser ignorada en el cálculo como estado límite último.

La razón es que, como veremos más adelante, la rigidez a torsión de las piezas disminuye drásticamente al aparecer la fisuración por torsión. Ello hace que los momentos torsores inicialmente existentes y no previstos, se reduzcan a valores aceptables. Como esos momentos torsores no son tenidos en cuenta para el equilibrio, éste se alcanza de todas formas. Véase, a título de ejemplo, el caso expuesto en el apartado 42.8.

No debe olvidarse, sin embargo, que para que el comportamiento de la pieza resulte correcto en los estados límite de servicio, deben respetarse ciertas disposiciones constructivas que más adelante se detallan.

La torsión rara vez se presenta como sollicitación aislada en las estructuras de edificios, sino que, frecuentemente, aparece combinada con flexión y esfuerzo cortante.

## 42.2 TORSIÓN EN RÉGIMEN LINEAL

Tiene muy escaso interés en la práctica, pero recordamos los aspectos esenciales como introducción al tema.

En secciones rectangulares, la solución clásica de SAINT VENANT proporciona la máxima tensión de torsión (42.1).

$$\tau_t = \alpha \frac{M_T}{b^2 h} \quad [42.1]$$

válida para  $h \geq b$ , donde

$M_T$  = Momento torsor aplicado.

$b, h$  = Dimensiones de la sección ( $h \geq b$ ).

$\alpha$  = Coeficiente dado por el gráfico de la figura 42-4.

$\tau_t$  = Tensión máxima de torsión, que se produce en el punto medio de los lados mayores.

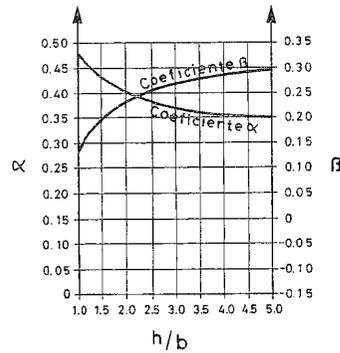


Figura 42-4

La relación de la deformación angular por torsión al momento aplicado  $M_T$  viene dada por

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M_T}{GC} \quad [42.2]$$

donde:

$\theta$  = Ángulo de giro entre las dos caras de la rebanada.

$ds$  = Espesor de la rebanada.

$G$  = Módulo de deformación por cortante. (Deformación transversal).

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \mu)}$$

donde  $E_c$ , módulo de deformación longitudinal del hormigón, y  $\mu$  módulo de Poisson ( $\mu \approx 0,20$ , de acuerdo con EHE).

$C$  = Momento de inercia a torsión de la sección.

Para secciones rectangulares,

$$C = \beta b^3 h \quad [42.3]$$

donde  $b$  viene dado en la figura 42-4 (42.1).

Obsérvese que la ecuación [42.2] es la gemela de la [3.1].

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{M}{EI}$$

que nos daba la relación entre momento flector y curvatura, mientras que [42.2] la establece entre momento torsor y giro  $\theta$ . Para una pieza en flexión, vimos que la rigidez (momento aplicado en un extremo libre para girar, con el opuesto empotrado, para producir un giro unidad) era  $k = \frac{4EI}{L}$ . Análogamente el valor

$$k_t = \frac{GC}{L} \quad [42.4]$$

que representa el momento necesario para producir en una longitud  $L$  un giro unidad, suele denominarse *rigidez a torsión*.

Para secciones que puedan descomponerse en rectángulos, como las vigas  $T$  y  $L$  usuales en estructuras, puede aplicarse la simplificación conservadora de suponer que cada rectángulo resiste el momento torsor en proporción a su rigidez individual a torsión (fig. 42-5). El ancho de ala a considerar no debe exceder tres veces su canto (42.2) <sup>1</sup>.

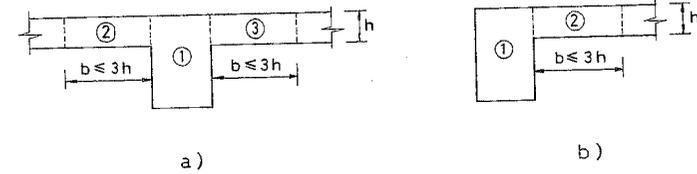


Figura 42-5

De acuerdo con lo anterior, cada rectángulo  $i$  componente de las secciones de la figura 42-5, presenta una tensión máxima de torsión

$$\tau_i = \alpha_i \frac{M_{T,i}}{b_i^2 h_i} \quad [42.5]$$

donde

$M_{T,i}$  = Fracción del momento torsor total resistido por el rectángulo  $i$ , de dimensiones  $b_i, h_i$ , que de acuerdo con lo expuesto valdrá:

$$M_{T,i} = \frac{\beta_i b_i^3 h_i}{\sum_{i=1}^n \beta_i b_i^3 h_i} \quad [42.6]$$

(Recuérdese que debe tomarse  $h_i \geq b_i$ )

<sup>1</sup> Si las alas están sujetas a flexión transversal, su probable fisuración hace muy dudosa su colaboración a torsión.

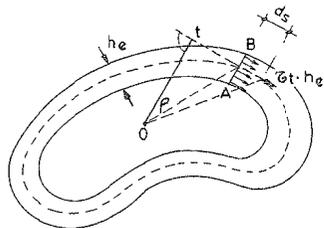


Figura 42-6

Para secciones de tipo tubular (fig. 42-6) en las que el espesor  $h_e$ , variable, es siempre pequeño respecto a las dimensiones de la sección transversal, en cualquier sección  $AB$  normal a la línea media se establece un flujo de tensiones de torsión de valor constante  $\tau, h_e$ . Tomando momentos respecto a  $O$ .

$$M_T = \oint \tau, h_e \rho ds$$

donde la integral se extiende a toda la curva formada por la línea media.

De lo anterior

$$\tau, h_e = \frac{M_T}{\oint \rho ds}$$

y como  $\oint \rho ds$  es el doble del área encerrada por la línea media, llamando  $A_{ce}$  a dicha área, se obtiene la fórmula de BREDT.

$$\tau_t = \frac{M_T}{2 h_e A_{ce}} \quad [42.7]$$

### 42.3 RIGIDEZ A TORSIÓN

Las fórmulas [42.1] a [42.6], aunque interesantes desde el punto de vista teórico, son de casi nulo interés práctico para el cálculo a torsión de piezas de hormigón armado. Los ensayos han puesto ampliamente en evidencia que si una viga de hormigón armado se somete a torsión, la relación  $M_T, \theta$  deja de ser lineal (fig. 42-7) a partir de un valor muy reducido de  $M_T$ , correspondiente a la fisuración helicoidal que comentamos en 42.1 (Punto A de la figura 42-7).

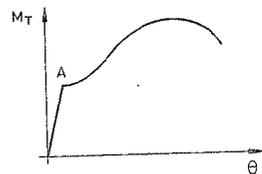


Figura 42-7

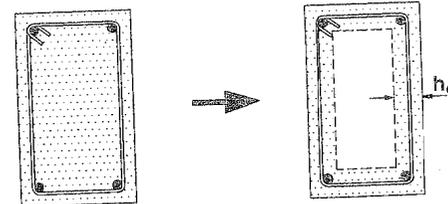


Figura 42-8

A partir de ese punto, el equilibrio se consigue mediante la entrada en funcionamiento de la armadura transversal y longitudinal de torsión, como veremos en el apartado 42.5. En el caso de secciones macizas, el hormigón del núcleo interior de la pieza contribuye muy poco a la resistencia y rigidez a torsión, de forma que, una vez fisurada la pieza, a todos los efectos, se puede sustituir por una sección hueca de espesor  $h_e$ , denominada *sección hueca eficaz* (fig. 42-8).

### 42.4 DEFINICIÓN DE LA SECCIÓN HUECA EFICAZ

De acuerdo con EHE, para cualquier pieza maciza de contorno poligonal convexo (fig. 42-9), se define una sección hueca eficaz, de espesor uniforme  $h_e$ , de la pared de la sección de cálculo, cuyo valor viene dado por

$$h_e \leq \frac{A}{u} \begin{cases} \geq h_o \\ \leq 2 \cdot c \end{cases} \quad [42.8]$$

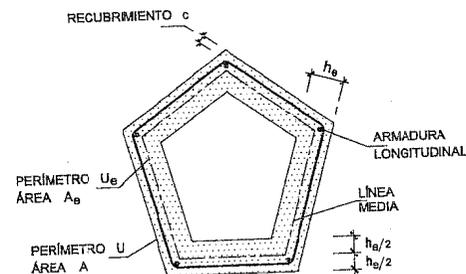


Figura 42-9

donde:

- $A$  = Área de la sección transversal inscrita en el perímetro exterior incluyendo las áreas huecas interiores.
- $u$  = Perímetro exterior de la sección transversal.

$h_o$  = Espesor real de la pared en caso de secciones huecas.

$c$  = Recubrimiento de las armaduras longitudinales.

Puede utilizarse un valor de  $h_e$  inferior a  $A/u$ , siempre que cumpla con las condiciones mínimas expresadas y que permita satisfacer las exigencias de compresión del hormigón de las bielas.

## 42.5 COMPROBACIÓN Y DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES

### 42.5.1 SECCIONES ARMADAS

Supongamos la sección rectangular representada en la figura 42-10 a), donde  $A_{st}$  es el área de una rama de estribo y  $A_{sl}$  el área total de armadura longitudinal de torsión.

Despreciando la colaboración del hormigón a torsión, de acuerdo con EHE<sup>1</sup>, la resistencia a torsión la proporciona una celosía espacial (Fig. 42-10 b) constituida por las armaduras transversal y longitudinal de torsión y por bielas comprimidas de hormigón de inclinación  $\theta$  (Modelo de RAUSCH). Consideremos la pared ABCD, de espesor ficticio  $h_o$  y supongamos en ella una fisura con ángulo de inclinación  $\theta$  (fig. 42-10 c).

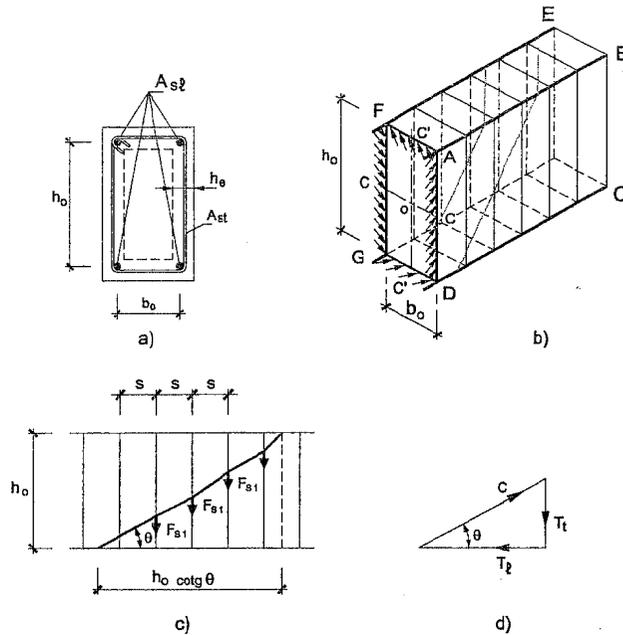


Figura 42-10

1 Tanto el MODEL CODE CEB/FIP (42.3) como la Norma ACI 318-95 (42.4) desarrollan métodos sustancialmente idénticos al que aquí se expone.

El número de ramas de estribo, a separación  $s$ , contenidas en la pared ABCD y cortadas por la fisura será<sup>1</sup>:

$$n_h = \frac{h_o \cotg \theta}{s} \quad [42.9]$$

La fuerza total desarrollada por los estribos en el agotamiento, siendo  $A_{st}$  el área de una rama viene dada por

$$T_t = A_{st} f_{td} \frac{h_o \cotg \theta}{s} \quad [42.10]$$

Análogamente, en la cara ABEF se tendría

$$T_t' = A_{st} f_{td} \frac{b_o \cotg \theta}{s} \quad [42.11]$$

La fuerza  $T_t'$  corresponde a una longitud  $b_o \cotg \theta$ .

En la figura 42-10 d) se indica el polígono vectorial correspondiente al equilibrio de las compresiones  $C$  de inclinación  $\theta$ , la fuerza  $T_t$  en la armadura transversal y la  $T_t'$  en la longitudinal, todo ello correspondiente a la cara ABCD. Valores análogos ocurren en la cara opuesta, en sus direcciones correspondientes.

En la cara ABEF y en su opuesta, se forma un polígono, análogo entre las compresiones  $C'$ , la tracción  $T_t'$  de la armadura transversal y la  $T_t$  de la longitudinal.

En la figura 42-10 b) se indican, para una sección recta de la pieza, la distribución de fuerzas  $C$  y  $C'$ , de inclinación  $\theta$  respecto a la directriz, a lo largo de los cuatro lados de la línea media de la celosía espacial.

El momento de las fuerzas  $C$  y  $C'$  respecto al centro  $O$  de la sección será el momento torsor, ya que  $C$  y  $C'$  están en equilibrio con las fuerzas en las armaduras<sup>2</sup>.

$$M_T = 2 C \frac{b_o}{2} \sen \theta + 2 C' \frac{h_o}{2} \sen \theta \quad [42.12]$$

donde  $C \sen \theta$  y  $C' \sen \theta$  son las proyecciones de  $C$  y  $C'$  sobre el plano de la sección, que son las que producen torsión.

De [42.12], teniendo en cuenta que

$$C = \frac{T_t}{\sen \theta} \quad C' = \frac{T_t'}{\sen \theta}$$

y sustituyendo [42.10] y [42.11], se obtiene:

$$M_{Tul} = 2 \frac{A_{st} f_{td}}{s \tg \theta} b_o h_o$$

1 El método que seguimos es debido a LAMPERT (42.5). Un excelente resumen del trabajo de LAMPERT puede seguirse en PARK y PAULAY (42.6). Información de gran interés figura en "Torsion of Reinforced Concrete", de HSU (42.8), y COWAN y LYALIN (42.9).

2 Obsérvese que  $C$  y  $C'$  son las fuerzas resultantes correspondientes a las longitudes  $h$  y  $b$  respectivamente.

y llamando  $A_{ce}$  al producto  $b_o h_o$ , es decir, al área encerrada por la línea media de la sección hueca eficaz, se tiene

$$M_{Tul} = \frac{2 A_{ce} A_{st}}{s \operatorname{tg} \theta} f_{yt,d} \quad [42.13]$$

Para  $\theta = 45^\circ$ , que es la hipótesis usual <sup>1</sup>, se obtiene:

$$M_{Tul} = \frac{2 A_{ce} A_{st}}{s} f_{yt,d} \quad [42.14]$$

en donde:

$M_{Tul}$  = Momento torsor último por agotamiento de la armadura transversal.

$s$  = Separación de estribos.

$A_{ce}$  = Área encerrada por una línea media de la sección hueca eficaz.

$A_{st}$  = Área de una rama de estribo.

$f_{yt,d}$  = Límite elástico de cálculo de la armadura transversal. EHE impone, por análogas razones a las que vimos en el caso de esfuerzo cortante, la limitación  $f_{td} \leq 400 \text{ N/mm}^2$ .

La resultante de fuerzas en la armadura longitudinal será

$$A_{st} f_{yd} = 2 C \cos \theta + 2 C' \cos \theta$$

y sustituyendo

$$A_{st} f_{yd} = 2 A_{st} f_{yt,d} \frac{b_o + h_o}{s} \cotg^2 \theta$$

de donde

$$A_{st} = 2 A_{st} \frac{f_{yt,d}}{f_{yd}} \cdot \frac{b_o + h_o}{s} \cotg^2 \theta \quad [42.15]$$

que, para  $f_{yt,d} = f_{yd}$  y  $\theta = 45^\circ$ , resulta:

$$A_{st} = 2 A_{st} \frac{b_o + h_o}{s}$$

y llamando  $u = 2 (b_o + h_o)$  al perímetro

$$A_{st} = A_{st} \frac{u}{s} \quad [42.16]$$

<sup>1</sup> En realidad  $\theta$  depende de la relación entre las áreas de armadura longitudinal y transversal de torsión.

<sup>2</sup> LAMPERT (42.5) ha demostrado que si  $f_{yt} = f_{yt,d}$ , la cantidad mínima de acero, si  $\theta = 45^\circ$ , se obtiene cuando los volúmenes de armadura longitudinal y transversal son iguales.

Despejado  $A_{st}$  de [42.13], sustituyendo en [42.15] y haciendo  $u = 2 (b_o + h_o)$ , se obtiene:

$$A_{st} = M_{Tu} \frac{u}{2 A_{ce} f_{yd}} \cotg \theta \quad [42.17]$$

de donde

$$M_{Tu2} = \frac{2 A_{ce} A_{st} f_{yd}}{u} \operatorname{tg} \theta \quad [42.18]$$

donde :

$M_{Tu2}$  = Momento torsor último por agotamiento de la armadura longitudinal de torsión.

$A_{st}$  = Área total de la armadura longitudinal de torsión.

$f_{yd}$  = Límite elástico de la armadura longitudinal de torsión. (En este caso, no rige el límite de  $400 \text{ N/mm}^2$ ).

Para  $\theta = 45^\circ$

$$M_{Tu2} = \frac{2 A_{ce} A_{st}}{u} f_{yd} \quad [42.19]$$

Volviendo a la figura 42-10, calculemos ahora la tensión de compresión  $\sigma_c$  en las bielas comprimidas, motivada por la fuerza  $C$  actuando sobre un ancho  $h_o \cos \theta$  y espesor  $h_e$

$$\sigma_c = \frac{C}{h_e h_o \cos \theta}$$

y sustituyendo  $C = \frac{T_t}{\operatorname{sen} \theta}$  y teniendo en cuenta [42.10] se obtiene:

$$\sigma_c = \frac{A_{st} f_{yt,d}}{h_e s \operatorname{sen}^2 \theta} \quad [42.20]$$

y para  $\theta = 45^\circ$

$$\sigma_c = 2 \frac{A_{st} f_{yt,d}}{h_e s} \quad [42.21]$$

y de [42.13] despejando  $A_{st}$  y sustituyendo

$$\sigma_c = M_{Tu3} \frac{\operatorname{tg} \theta}{2 A_{ce} h_e} (1 + \cotg^2 \theta) \quad [42.22]$$

de donde

$$M_{Tu3} = 2 \sigma_c A_{ce} h_e \cdot \frac{\cotg \theta}{1 + \cotg^2 \theta} \quad [42.23]$$

y de acuerdo con lo visto en el Capítulo 39,  $\sigma_e \leq k f_{cd}$ , con lo que

$$M_{Tu3} = 2 k f_{cd} A_{ce} h_e \cdot \frac{\cot g \theta}{1 + \cot g^2 \theta} \quad [42.24]$$

con  $k = 0,6$  si hay estribos únicamente a lo largo del perímetro exterior

$k = 0,75$  si hay estribos en ambas caras de la sección hueca o real de la pieza

Si  $\theta = 45^\circ$

$$M_{Tu3} = k f_{cd} A_{ce} h_e \quad [42.25]$$

El ángulo  $\theta$  que se adopte, debe cumplir la condición

$$0,4 \leq \cot g \theta \leq 2,5$$

En definitiva y resumiendo todo lo anterior:

**Dimensionamiento.** Dado el valor de  $M_{Td}$ , haciéndolo igual a  $M_{Tu1}$ , las fórmulas [42.13] ó [42.14] nos dan la armadura transversal. La [42.19], haciendo  $M_{Tu2} = M_{Td}$ , nos da  $A_{st}$ . Debe verificarse que  $M_d \leq M_{Tu3}$  donde  $M_{Tu3}$  viene dado por [42.24] ó [42.25].

**Comprobación.** El valor de  $M_d$  debe ser no mayor que  $M_{Tu1}$ , según [42.13] ó [42.14], no mayor que  $M_{Tu2}$ , según [42.19], y no mayor que  $M_{Tu3}$ , según [42.24] ó [42.25].

*Nota: Como puede observarse, no se considera colaboración del hormigón a torsión. Ello es debido a que se entiende que en la mayoría de los casos prácticos la capacidad de resistencia a tensiones tangenciales habrá sido utilizada en resistir el cortante.*

La torsión, a través de la fisuración, produce, como el esfuerzo cortante, un incremento de tracción en la armadura longitudinal de flexión.

El momento torsor en el caso de piezas armadas, debe calcularse en las secciones hasta una distancia  $d$  del apoyo, para el valor del momento torsor correspondiente a esa sección.

Lo anterior no es válido para momentos torsores concentrados actuando en esa longitud  $d$ .

En caso de secciones pretensadas el valor  $d$  debe ser sustituido por  $d/2$ .

#### 42.5.2 SECCIONES PRETENSADAS O SECCIONES CON ARMADURA ACTIVA Y PASIVA SIMULTÁNEAMENTE

Valen las fórmulas expuestas en 42.5.1, sin más que establecer la distinción de que en las armaduras pasivas la tensión en el agotamiento no debe ser superior a

$$f_{y,d} \begin{cases} \geq \sigma_{sd,0,01} \\ \geq 400 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

y la tensión de las armaduras activas no debe ser superior a

$$f_{sd} \geq \sigma_{sd,0,01}^*$$

(Al igual que vimos en los Capítulos 36, 37 y 38 en el diagrama de cálculo del acero de las armaduras activas, las deformaciones  $\epsilon_s$  debidas a las torsiones deben calcularse a partir del alargamiento remanente de dichas armaduras).

#### 42.6 COMBINACIÓN DE TORSIÓN Y ESFUERZO CORTANTE

Esta es una situación frecuente sobre la que se ha desarrollado un volumen importante de investigación. LIAO y FERGUSON, de acuerdo con sus ensayos, proponen un diagrama de interacción ( $V_d, M_{Td}$ ) de forma circunferencial que representa bien el fenómeno. (Curva 1 de la figura 42-11).

a) La Instrucción EHE, adopta la fórmula variante

$$\left( \frac{M_{Td}}{M_{Tu3}} \right)^\beta + \left( \frac{V_d}{V_{ul}} \right)^\beta \leq 1 \quad [42.26]$$

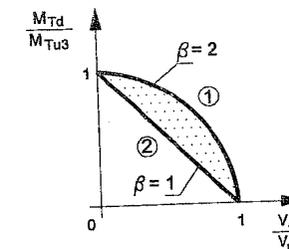


Figura 42-11

donde

$$\beta = 2 \left( 1 - \frac{h_e}{b} \right) \quad [42.27]$$

$b$  es el ancho total del elemento si es de sección maciza y la suma de los anchos de las almas en secciones en cajón.

En [42.26] el valor  $V_{ul}$  es el de agotamiento por compresión excesiva del alma, dado por la fórmula [32.66] ó [32.67]. El valor  $M_{Tu3}$  viene dado por [42.24] ó [42.25].

b) El EUROCÓDIGO EC-2 adopta  $\beta = 2$  en todos los casos.

El área de estribos necesarios por torsión se suma a la necesaria por cortante.

## 42.7 COMBINACIÓN DE TORSIÓN, FLEXIÓN Y ESFUERZO AXIL

Todos los ensayos demuestran que, dentro de la precisión alcanzable con los conocimientos actuales, la solución de superponer la armadura de flexión con la longitudinal de torsión conduce a una seguridad suficiente y, en bastantes casos, superior a la estrictamente necesaria.

Para evitar una seguridad superflua, puede tenerse en cuenta lo siguiente:

### En secciones sólo con armadura pasiva

- En la zona traccionada debida a la flexión simple o compuesta, el área de armadura longitudinal derivada del cálculo a torsión, debe sumarse a la derivada del cálculo a flexión simple o compuesta.
- En la zona comprimida debida a la acción de la flexión simple o compuesta, el área de la armadura longitudinal de torsión puede reducirse en un valor igual a

$$\frac{M_d}{0,9 d f_{yd}} \quad [42.28]$$

donde  $M_d$  es el momento de cálculo actuante en la sección, pero deberán respetarse las disposiciones constructivas expuestas en 42.10.

### En secciones con armadura activa

En ellas, la armadura activa más la posible armadura pasiva, deben resistir el momento  $M_d$  actuante en la sección y además debe añadirse la capacidad mecánica de armadura longitudinal concéntrica con la pieza, resultante del cálculo a torsión.

En cualquier caso, la máxima compresión en las bielas vendrá limitada por la condición

$$\sigma_c \leq k f_{cd} \quad [42.29]$$

donde los valores de  $k$  se indicaron en la fórmula [42.24].

El cálculo de  $\sigma_c$  debe hacerse en función de las tensiones:

- Tangencial de tensión  $\tau_{td}$ , calculada aplicando la fórmula de BREDT [42.7].

$$\tau_{td} = \frac{M_{Td}}{2 A_{ce} h_e} \quad [42.30]$$

- Normal de flexión simple o compuesta,  $\sigma_{md}$  que debe obtenerse para la sollicitación de flexión simple y compuesta, de acuerdo con el método de teoría clásica expuesto en el Capítulo 36.

El valor de  $\sigma_{cd}$ , es el de la tensión principal, dada por

$$\sigma_{cd} = \frac{\sigma_{md}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{md}}{2}\right)^2 + \tau_{td}^2} \quad [42.31]$$

## 42.8 EL EMPOTRAMIENTO DE LOSAS Y FORJADOS EN VIGAS DE BORDE

Este caso es el representado en la figura 42-2 a) y es muy frecuente en la práctica. Múltiples ensayos han demostrado que, hasta estados moderados de carga, los giros de la viga dependen escasamente de la armadura de torsión que en ella se disponga, con lo que, a mayor armadura, mayor momento torsor producido. Véanse, por ejemplo, los ensayos de LAMPERT y COLLINS (42.7).

Por este motivo, partiendo de que, al no calcular dichas vigas a torsión, serán despreciables los momentos torsores producidos, la Instrucción *EF* de forjados adopta para el cálculo de esfuerzos en forjados el método de calcular el momento en vano del forjado como si la rigidez a torsión de la viga fuese nula y calcular el empotramiento del forjado en la viga para un momento flector igual al 25% del adoptado para el vano.

## 42.9 RECOMENDACIONES COMPLEMENTARIAS DEL ACI 318-95

Las incluimos porque presentan un gran interés práctico.

### 42.9.1 VALOR MÍNIMO DE $M_{Td}$ , POR DEBAJO DEL CUAL NO ES NECESARIO EL CÁLCULO A TORSIÓN EN PIEZAS SOMETIDAS A TORSIÓN SECUNDARIA

Se establece

$$M_{Td,min} = 0,065 \sqrt{f_{ck}} \left[ \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right] \cdot 10^{-6} \quad [42.32]$$

donde

$A_{cp}$  = Área encerrada por el perímetro exterior de la pieza.

$P_{cp}$  = Perímetro exterior de la pieza.

### 42.9.2 VALOR MÁXIMO DE $M_{Td}$ , A CONSIDERAR EN EL CÁLCULO EN PIEZAS SOMETIDAS A TORSIÓN SECUNDARIA

Debido a que la fisuración por torsión estabiliza el momento torsor en este tipo de piezas, se adopta

$$M_{Td,max} = 0,019 \sqrt[4]{f_{ck}} \left[ \frac{A_{cp}^2}{P_{cp}} \right] \cdot 10^{-6} \quad [42.33]$$

con los mismos significados que en el apartado anterior.

Es decir se establece un valor tal que si el cálculo a torsión conduce, en una pieza sometida a **torsión secundaria**, a un valor superior a [42.33], basta con tomar este valor.

## 42.10 VALORES DE LA RIGIDEZ A TORSIÓN A TOMAR PARA EL CÁLCULO

En aquellos casos, en general de torsión principal, en los que interese tener en cuenta en el cálculo la rigidez a torsión, pueden adoptarse de acuerdo con el MODEL CODE 90, a falta de datos más exactos, los valores siguientes:

- Estado I (Sección no fisurada)

$$K_I = 0,30 E'_{ci} C (1 + 1,0 \phi) \quad [42.34]$$

- Estado II (Sección fisurada)

$$K_{II} = 0,10 E'_{ci} C (1 + 0,3 \phi) \quad [42.35]$$

- Estado III (Sección con fisuras de torsión y cortante)

$$K_{III} = 0,05 E'_{ci} C (1 + 0,3 \phi)^1 \quad [42.36]$$

$E'_{ci}$  es el valor definido en [28.12],  $C$  el momento de inercia a torsión de la sección no fisurada definida en [19.7],  $\phi$  el coeficiente de fluencia definido en [29.22].

## 42.11 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS

La armadura longitudinal ha de estar constituida por barras o alambres paralelos a la directriz de la pieza, distribuidos a separación uniforme y no superior a 300 mm, ni a  $u/8$ , debiendo situarse al menos una barra en cada esquina.

La armadura transversal ha de estar constituida por estribos cerrados, realizando el cierre en zonas alejadas de los centros de los lados mayores. El cierre puede realizarse, bien por solapamiento, bien por soldadura de solapamiento. Se entiende que esta soldadura es la de cierre del estribo.

Se deben cumplir además las condiciones siguientes:

$$s \leq 0,80 a \neq 300 \text{ mm} \quad \text{si } M_{Td} \leq \frac{1}{5} M_{Tu3}$$

$$s \leq 0,60 a \neq 300 \text{ mm} \quad \text{si } \frac{1}{5} M_{Tu3} < M_{Td} \leq \frac{2}{3} M_{Tu3}$$

$$s \leq 0,30 a \neq 200 \text{ mm} \quad \text{si } M_{Td} > \frac{2}{3} M_{Tu3}$$

siendo  $a$  la menor dimensión de los lados que conforman el perímetro  $u$ .

<sup>1</sup> Este valor es proporcionado solamente por el MODEL-CODE 90.

En el caso de armadura transversal de piezas sometidas a torsión principal, y en general en piezas importantes sometidas a torsión secundaria, con independencia de lo dicho respecto a estribos en los Capítulos 39 y 51, debe cuidarse el caso de cierres de estribo como el indicado en la fig. 42-12.

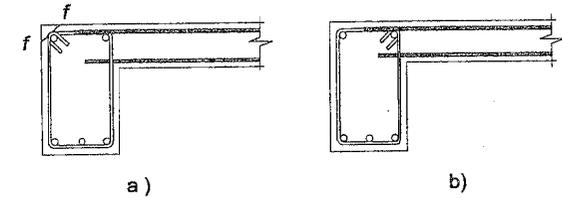


Figura 42-12

El cierre de estribos en la esquina indicada en la figura 42-12 a) es propicio a producir fisuras de exfoliación, como la F-F. El cierre del estribo debe disponerse en la forma indicada en la figura 42-12 b).

### EJEMPLO 42.1

Dado el trampolín de la figura 42-13, realizado con hormigón  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$  y en el cual las dimensiones de la viga soporte son  $400 \cdot 1000 \text{ mm}$ , se pide:

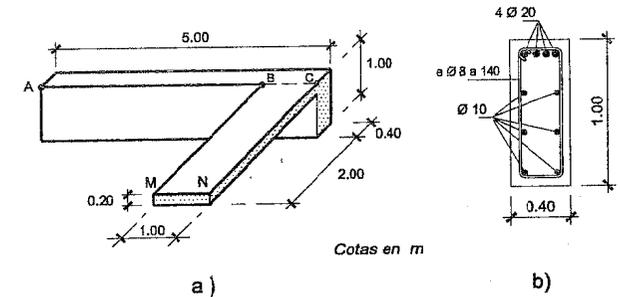


Figura 42-13

1°. Comprobar si la sección transversal de la viga es válida, sabiendo que:

- El peso específico del hormigón es de  $25 \text{ kN/m}^3$ .
- La sobrecarga de uso es de  $4 \text{ kN/m}^2$  en la zona BCMN y despreciable sobre la viga.
- $f_{yk} = 400 \text{ N/mm}^2$ . (Acero B 400S)
- $\gamma_g = 1,35$ ,  $\gamma_q = 1,50$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ,  $\gamma_c = 1,50$ .

2°. Dimensionar la armadura transversal de torsión con estribos  $\phi 8$  y calcular el área de barras longitudinales, siendo el recubrimiento a estribo 20 mm. (Adoptar  $\theta = 45^\circ$ ).

Solución

1º. El peso de cálculo de la losa en voladizo es:

$$p_{1d} = 1,35 \cdot 2 \cdot 0,20 \cdot 25 = 13,5 \text{ kN}$$

y la sobrecarga:

$$p_{2d} = 1,5 \cdot 2 \cdot 4 = 12 \text{ kN}$$

El momento torsor en la viga es:

$$M_{Td} = 25,5 \cdot 1,20 = 30,6 \text{ mkN}$$

El esfuerzo cortante máximo en la viga en el punto A será:

$$V_d = 25,5 + 5,0 \cdot 0,4 \cdot 1,0 \cdot 25 = 75,5 \text{ kN}$$

Calculamos el momento torsor de agotamiento, para recubrimientos a eje de barra longitudinal.

$$c_o \approx 20 + 8 \approx 28 \text{ mm}$$

$$h_e \leq \frac{400 \cdot 1.000}{2(400 + 1.000)} = 143 \text{ mm}$$

$$h_e = 2c = 56 \text{ mm}$$

$$A_{ce} = 400 \cdot 1000 - (400 - 2 \cdot 56)(1000 - 2 \cdot 56) = 144.256 \text{ mm}^2$$

$$M_{Tu3} = 2 \cdot 0,6 \frac{35}{1,5} 144.256 \cdot 56 \frac{1}{2} = 113,1 \cdot 10^6 \text{ mmN} = 113,1 \text{ mkN}$$

$$V_u = 0,3 \frac{35}{1,5} 400 \cdot 960 = 2,68 \cdot 10^6 \text{ N} = 2.680 \text{ kN}$$

$$\beta = 2 \left( 1 - \frac{56}{400} \right) = 1,72$$

$$\left( \frac{M_{Td}}{M_{Tu3}} \right)^{1,72} + \left( \frac{V_d}{V_{ul}} \right)^{1,72} = \left( \frac{30,6}{113,1} \right)^{1,72} + \left( \frac{75,5}{2.680} \right)^{1,72} = 0,11 < 1$$

Luego la sección es válida.

2º.a) Calculamos la armadura longitudinal de torsión:

$$M_{Td} = 30,6 \cdot 10^6 = \frac{2 A_{ce}}{u} A_{st} f_{yd}$$

$$u = 2.800 \text{ mm}$$

$$A_{ce} = 144.256 \text{ mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{400}{1,15} = 348 \text{ N/mm}^2$$

$$A_{st} = \frac{30,6 \cdot 10^6 \cdot 2.800}{2 \cdot 144.256 \cdot 348} = 854 \text{ mm}^2$$

b) Calculamos la armadura longitudinal de flexión en la sección A

$$M_d = 25,5 \cdot 4,5 + 0,4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 2,5 \cdot 1,35 = 283,5 \text{ mkN}$$

Con el gráfico GT-84 para

$$\mu = \frac{283,5 \cdot 10^6}{\frac{35}{1,5} \cdot 400 \cdot 1.000^2} = 0,03 \quad \omega = 0,03 \quad U_s = 0,03 \frac{35}{1,5} 400 \cdot 1.000 = 280.000 \text{ N}$$

$$A_s = 805 \text{ mm}^2$$

c) Calculamos la armadura transversal de torsión

$$\frac{A_{st}}{s} = \frac{30,6 \cdot 10^6}{\frac{400}{1,15} 2 \cdot 144.256} = 305 \text{ mm}^2 / \text{m}$$

$$\text{Para } A_s' = 1 \phi 8 = 50,27 \text{ mm}^2$$

e  $\phi 8$  de 2 ramas, a 120 mm

d) Dimensionamiento de la sección

Armadura longitudinal

- Zona de tracción por flexión (cara superior de la viga)

$$A_s = \frac{854}{2} + 805 \rightarrow 4 \phi 20$$

- Zona de compresión (cara inferior de la viga). Aplicando [42.28]

$$A_s = 854 - \frac{283,5 \cdot 10^6}{0,9 \cdot 960 \frac{400}{1,15}} < 0$$

luego basta con la de montaje

Armadura transversal

Como la de corte sale nula, la de torsión calculada  $e \phi 8$  a 120 mm es suficiente.

La disposición se indica en la figura 42-13 b)

## BIBLIOGRAFÍA

- (42.1) BELLUZZI, O. "Ciencia de la construcción". Aguilar. Madrid. 1970.
- (42.2) VÍCTOR, D.J. "Effective flange within torsion". Journal A.C.I. January 1971.
- (42.3) MODEL CODE CEB/FIP FOR CONCRETE STRUCTURES (1978).
- (42.4) ACI 318-95. "Building code requirements for structural concrete". American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (42.5) LAMPERT, P. "Bruchwiderstand von stahlbetonbalken unter torsion und biegun". Zürich. 1970.
- (42.6) PARK, R.; PAULAY, T. "Reinforced concrete structures". John Wiley & Sons. New York. 1975.
- (42.7) COLLINS, M.P.; LAMPERT, P. "Redistribution of moments at cracking. The key to simpler torsion design": Department of Civil Engineering University of Toronto. Febrero 1971.
- (42.8) HSU, T.T.C. "Torsion of reinforced concrete". Van Nostrand. New York. 1984.
- (42.9) COWAN, H.J.; LYALIN, I.M. "Reinforced and prestressed concrete in torsion". E. Arnold. London. 1965.

## CAPÍTULO 43

### EL FENÓMENO DE LA ADHERENCIA EN EL HORMIGÓN ESTRUCTURAL <sup>1</sup>

#### 43.1 INTRODUCCIÓN

El fenómeno de la adherencia debe considerarse como una de las bases fundamentales para la existencia del hormigón estructural. Frecuentemente se dice que la base fundamental es la igualdad de coeficientes de dilatación térmica entre el hormigón y el acero. Sin embargo, dichos coeficientes no son tan iguales como con frecuencia se considera y en especial la velocidad con que siguen los cambios de temperatura ambos materiales suele diferir considerablemente. Es realmente la adherencia, al compatibilizar las distintas variaciones de longitud producidas por el cambio térmico, la que hace posible la existencia del material compuesto.

El nombre "adherencia" es ambiguo y, ciertamente, convencional, pues no refleja la complejidad del fenómeno que ocurre en la interfase hormigón-acero. Lo que habitualmente denominamos como adherencia es una compleja mezcla de:

- La *adhesión* entre hormigón y acero, debida a acciones moleculares en la superficie de contacto.
- El *rozamiento*.

<sup>1</sup> En este Capítulo nos referimos exclusivamente al hormigón armado. Lo correspondiente al hormigón pretensado se expuso ya en el Capítulo 32.

- La *resistencia a corte* movilizada por el “anclaje” en el hormigón de las irregularidades superficiales del acero.
- La *compresión* ejercida por el hormigón sobre los resaltos, en el caso de las barras corrugadas.

La mayoría de estos componentes está mejorada, en su función, por el efecto beneficioso que la compresión debida a la retracción del hormigón ejerce radialmente sobre las barras.

El fallo de la adherencia se suele manifestar por una fisuración paralela a la armadura, producida por las tracciones radiales que ésta induce en el hormigón que la rodea.

En la figura 43-1 se indica una fisura superpuesta a la armadura de un voladizo, producida por tensiones de adherencia excesivas. (Se supone, en cambio, que el anclaje en punta, ha sido eficaz).

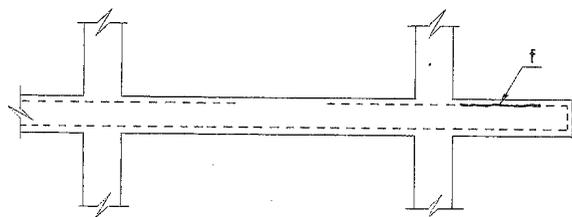


Figura 43-1

La mayoría de las Normas fueron reduciendo, a lo largo de sus sucesivas ediciones, la comprobación de adherencia de las armaduras al caso de barras gruesas y de estructuras sometidas a punzonamiento. Muchos países han eliminado la comprobación, fundiéndola con las reglas de anclaje. Así lo han hecho el Model Code 90, el Eurocódigo EC-2 y la EHE, que han eliminado este antiguo estado límite último.

En todo caso, la compresión clara del fenómeno de la adherencia es importante en sí misma y también por ser la base de las reglas de anclaje.

## 43.2 EL MECANISMO DE LA ADHERENCIA

### 43.2.1 DISTINTAS FORMAS DE LA ADHERENCIA

Debe establecerse con claridad el doble uso que habitualmente hacemos de la adherencia en las estructuras de hormigón:

- El primero es para introducir e incrementar las fuerzas en las armaduras. En este sentido debemos vigilar que la “velocidad” a que estas fuerzas aumentan no sea excesiva. En la figura 43-2 se indica una rebanada de pieza, en cuyo espesor la armadura ha incrementado su fuerza desarrollada del valor  $T$  al  $T + \Delta T$ . Este incremento de fuerza no ha podido transmitirse de las cargas

exteriores a la armadura más que a través de las tensiones de adherencia. Una medida de la “velocidad” de transmisión viene dada por la *tensión media de adherencia* en el espesor  $\Delta s$ . Llamando  $u$  al perímetro de la armadura, el valor de  $\tau_m$  viene dado por

$$\tau_m = \frac{\Delta T}{u \cdot \Delta s} \quad [43.1]$$

Si  $\tau_m$  es excesivo, puede producirse una fisuración paralela a la barra y destruirse en una cierta longitud de la misma su adherencia al hormigón.

- La segunda forma en que usamos la adherencia es para conseguir el anclaje de las barras por adherencia.

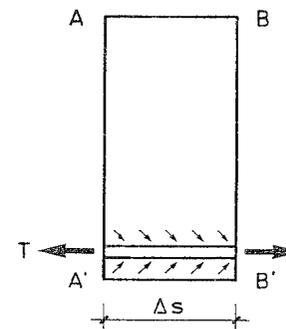


Figura 43-2

La figura 43-3 indica el anclaje por adherencia de un tirante de pórtico. En este caso, en la longitud  $AB = l$ , la barra debe ser capaz de transmitir su fuerza  $T$  al hormigón de la pieza en que se ancla. Llamando de nuevo  $u$  al perímetro de la barra, la tensión media de adherencia será

$$\tau_m = \frac{T}{lu} \quad [43.2]$$

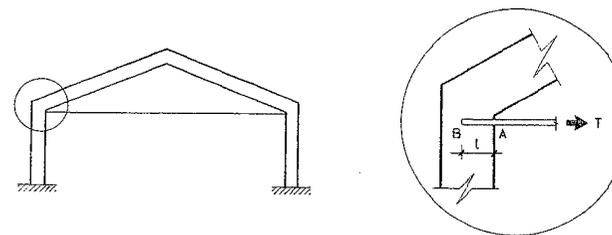


Figura 43-3

### 43.2.2 VARIABLES QUE AFECTAN A LA ADHERENCIA

La capacidad de una barra para aceptar grandes valores de  $\tau_m$  depende de muchas variables entre las cuales destacan:

- *El diámetro.* La fuerza que es capaz de desarrollar una barra es proporcional a su área y, por lo tanto, al cuadrado de su diámetro. Su superficie adherente es proporcional a su diámetro. La adherencia será, por tanto, más crítica cuanto mayor sea el diámetro de la barra.
- *El límite elástico.* A mayor límite elástico, mayores fuerzas en la barra en su estado límite último.
- *La geometría superficial.* De todas las armaduras utilizadas, las más "lisas" son los alambres trefilados lisos, cuyo uso está prohibido en hormigón armado, salvo que no se anclen por adherencia. Es el caso, por ejemplo, de las mallas electrosoldadas lisas y de las armaduras básicas de celosías de viguetas para forjados, cuyo anclaje se realiza mecánicamente en los nudos soldados.

Le siguen en adherencia los redondos lisos, que se laminan en caliente, cuya sección es más imperfectamente circular y cuya superficie presenta múltiples asperezas. (Véanse los trabajos de G. REHM, en la ref. (43.1).

Finalmente, las barras y alambres corrugados, bien sean laminados en caliente, retorcidos y estirados en frío o laminados en frío, respectivamente, consiguen fundamentalmente su adherencia por el anclaje mecánico de sus resaltos en el hormigón.

- *La resistencia del hormigón.* La adherencia aumenta con la resistencia del hormigón según leyes que expondremos más adelante.
- *El recubrimiento de hormigón* que rodea a la barra. Cuanto mayor sea éste, menos probable es el agrietamiento por tracciones radiales.
- *La armadura transversal.* La presencia de armadura transversal próxima a la barra reduce también el riesgo de fisuración por tracciones radiales y si ésta se produce, controla su ancho reduciendo la pérdida de adherencia.

Finalmente, otras variables que afectan a la adherencia de manera muy importante son la posición de la barra durante el hormigonado, tal como exponemos en el apartado siguiente y las posibles compresiones transversales.

### 43.2.3 ASPECTOS PARTICULARES DE LA ADHERENCIA EN LAS BARRAS Y ALAMBRES CORRUGADOS

De los distintos componentes de la adherencia que enumeramos en 43.1, en el caso de las barras corrugadas cobra especial importancia el propio anclaje mecánico ofrecido por los resaltos. La figura 43-4 indica el estado tensional en la zona inmediata a un resalto de una obra corrugada, según LEONHARDT y MÖNNIG (43.2).

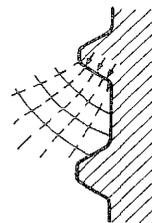


Figura 43-4

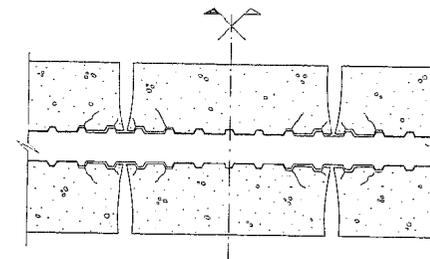


Figura 43-5

En la figura 43-5 se indica un esquema de la deformación y fisuración del hormigón que rodea a una barra corrugada, tomado de los trabajos de LUTZ y GERGELY (43.3).

Este comportamiento es considerablemente diferente del que corresponde a las antiguas barras lisas.

### 43.2.4 POSICIÓN DE LAS BARRAS DURANTE EL HORMIGONADO. POSICIÓN DE ADHERENCIA

La posición de las barras durante el hormigonado tiene una influencia importante sobre su comportamiento adherente. En la figura 43-6 se consideran dos casos: En el caso a), correspondiente a una barra horizontal, una capa formada por una mezcla débil de cemento, aire

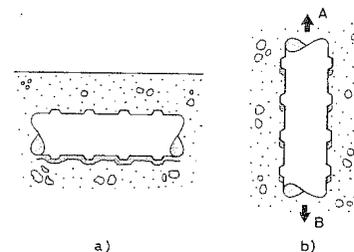


Figura 43-6

y agua tiende a depositarse bajo la barra, en especial si ésta está en la parte alta de la pieza hormigonada, siempre más rica en agua. El efecto es menos importante en barras que al ser hormigonadas estaban a mucha profundidad bajo la superficie del hormigón fresco. También investigaciones recientes parecen indicar que este efecto es menos importante cuando debajo de la barra considerada hay otras barras horizontales, así como barras verticales. El efecto reductor sobre la adherencia es mayor en las barras lisas. La situación es considerablemente distinta para las barras verticales. En la figura 43-7 se resumen resultados obtenidos por VOS (43.4) y MARTÍN y NOAKOWSKI con diferentes barras corrugadas. (43.5).

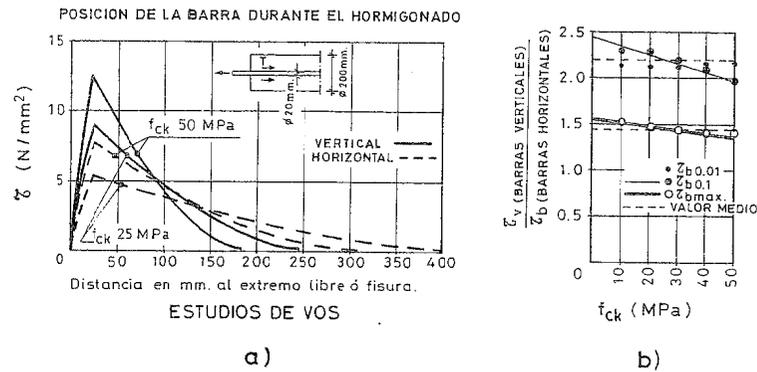


Figura 43-7

Volviendo a la figura 43-6 b), si imaginamos una barra corrugada en posición vertical, bajo los resaltos se producirá una segregación de agua y aire análoga a la que vimos en el caso de la figura 43-6 a). La resistencia de adherencia y sobre todo los corrimientos experimentados por la barra respecto al hormigón, serán muy diferentes según la tracción se ejerza en el sentido A o en el B. (Ver figura 43-8 tomada de (43.1)).

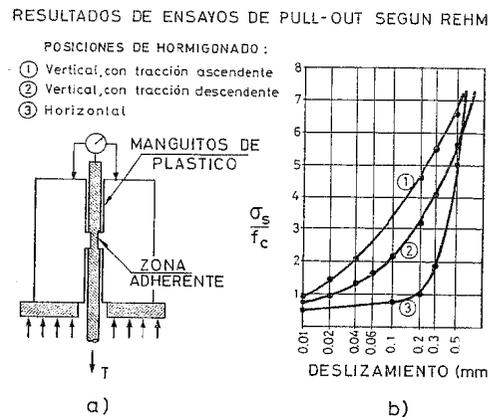


Figura 43-8

Una parte de estos fenómenos está recogida por EHE mediante la introducción del concepto de *posición de adherencia*.

- Se denomina *Posición I, de adherencia buena*, a la de cualquier zona de una armadura cuyo eje forma durante el hormigonado un ángulo con la horizontal igual o mayor que 45° ó que si el ángulo es inferior a 45°, la zona de la barra considerada está en la mitad inferior de la sección o a una distancia igual o mayor a 300 mm de la cara libre de una capa de hormigonado.

- Se denomina *Posición II, de adherencia deficiente*, la de cualquier zona de armadura que no esté en Posición I.

EHE no establece diferencias entre las Posiciones I y II en cuanto a la comprobación de adherencia, pero sí lo hace para el cálculo de las longitudes de anclaje por adherencia que veremos en el capítulo siguiente.

### 43.3 MÉTODOS PARA LA MEDIDA DE LA ADHERENCIA

No existe ningún método para la medida de la adherencia que haya sido universalmente aceptado. Existen diversos métodos de ensayo que permiten investigar las propiedades adherentes de una barra. En la figura 43-9 se resumen tres de los más comunes.

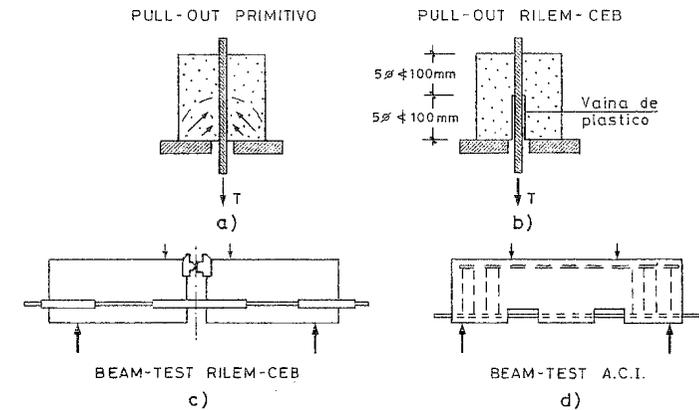
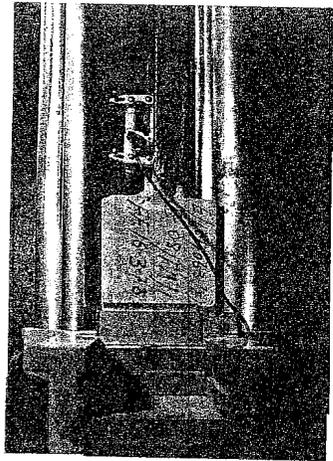
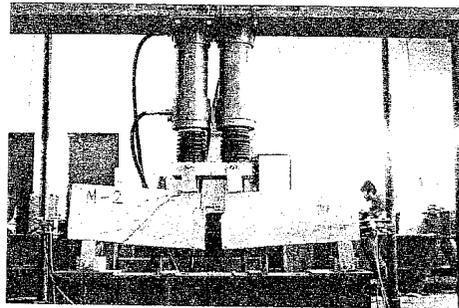


Figura 43-9

Los ensayos del tipo a) y b) son los más comunes y suelen denominarse como "Pull Out Test" (P.O.T.) y a ellos debemos una gran parte de nuestros conocimientos sobre la adherencia. La variante a), que fue la empleada en las primeras investigaciones, presenta un inconveniente importante y es que al ejercerse la tracción  $T$  de la barra, el prisma de hormigón se comprime contra la plancha metálica de base. El rozamiento entre la plancha y el hormigón restringe la expansión transversal de éste. Todo ello motiva el que se produzca una "cúpula" de tensiones oblicuas que comprimen la barra y conducen a resultados optimistas en cuanto a la capacidad adherente de la misma. Este inconveniente ha sido paliado, en parte, en las variantes modernas del P.O.T. disponiendo una vaina de plástico en dicha zona. El método ha sido recientemente reestudiado por el C.E.B., que ha adoptado la disposición b). (43.6) (Fig. 43-10 a)).



(Cortesía de INTEMAC)  
Figura 43-10 a)



Ensayos de Beam-Test con barras de gran diámetro  
realizadas en INTEMAC en un programa  
internacional inter-laboratorios, realizado para el  
C.E.B. (43.7)

Figura 43-10 b)

Una variante interesante, desarrollada por BAUS y sus colaboradores en la Universidad de Lieja, es la del "Beam Test" (BT) indicado en la figura 43-9 c), que es la adoptada por la Instrucción EHE. El método presenta la ventaja de que realiza un doble ensayo pero requiere, en general, un instrumental más complicado. Ha sido también normalizado recientemente por el C.E.B. (43.7) (Fig. 43-10 b)).

Finalmente, la figura 43-9 d) indica un método de uso común en Norteamérica desarrollado por el ACI (43.8).

Debe, sin embargo, establecerse con claridad que cualquier método de ensayo de adherencia presenta un carácter convencional. Son de gran utilidad, con base en la experiencia acumulada mediante su aplicación a las diferentes barras, para establecer requisitos comparativos de nuevos tipos de barras o nuevos estados superficiales. En cambio, son de escasa utilidad si se pretende, a partir de ellos, establecer tensiones de cálculo de adherencia, ya que las condiciones reales de recubrimiento, posición de barra, transmisión de carga, armadura transversal, etc., de las barras de las piezas reales son diferentes y muy variables. Las tensiones límites de adherencia se han establecido no solamente con base en los ensayos citados de adherencia, sino en múltiples investigaciones de laboratorio sobre piezas reales y en la experiencia práctica de uso.

Muchas investigaciones importantes están siendo llevadas a cabo y deben citarse entre ellas la de FERGUSON (43.9), GOTO (43.10), TEPFERS (43.11), TASSIOS (43.12), POPOV, BERTERO Y ELIGEHAUSEN (43.13) y DELIBES (43.14). Un modelo teórico para la relación tensión-corrimento de la barra ha sido elaborado por el C.E.B., en el MODEL CODE 90 (43.15).

#### 43.4 LOS REQUISITOS DE ADHERENCIA

La tensión de adherencia se comprueba mediante la fórmula

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9 d n u} \quad [43.3]$$

donde:

$V_d$  = Esfuerzo cortante de cálculo en la sección considerada

$d$  = Canto útil

$n$  = Número de barras

$u$  = Perímetro de cada barra

La deducción de esta fórmula la realizaremos en 43.5.2.1 y como veremos es sólo válida para piezas de canto constante armadas con barras que sean todas ellas del mismo diámetro.

Si el valor de  $\tau_b$  excede, para barras corrugadas, el valor

$$\tau_{bd} = 0,078 \tau_{bu} \sqrt{f_{ck}} \quad [43.4]$$

donde  $\tau_{bu}$  depende del diámetro y su valor fue ya indicado, es recomendable que las condiciones de anclaje sean estudiadas cuidadosamente. En [43.4] las unidades son N/mm<sup>2</sup>.

El gráfico GT-131 proporciona directamente los valores de  $\tau_{bd}$  para barras lisas y corrugadas, habiéndose adoptado para estas últimas los valores mínimos exigidos para  $\tau_{bu}$  como condición para que las barras sean homologadas como de alta adherencia, según EHE.

Obsérvese que la comprobación de adherencia no obliga a incrementar la cantidad de acero necesario por flexión, sino que únicamente obliga a repartir el área necesaria en un número suficiente de barras adecuadamente finas.

Del examen de la fórmula [43.3] se deduce que los puntos que con más frecuencia pueden ser críticos en cuanto a adherencia serán los casos de secciones con pequeños momentos flectores y cortantes apreciables, ya que en ellos el perímetro  $u$  puede ser pequeño. Estaremos frecuentemente en este caso en los extremos de vigas simplemente apoyadas, algunos elementos de cimentación y en las zonas de los puntos de inflexión de vigas continuas.

## 43.5 CÁLCULO DE LAS TENSIONES DE ADHERENCIA

### 43.5.1 ADHERENCIA POR TRACCIÓN

El caso de barras en tracción ancladas por adherencia (fig. 43-11), sigue leyes como las que se indican en la figura. Adoptando el concepto de tensión media de adherencia, tendremos:

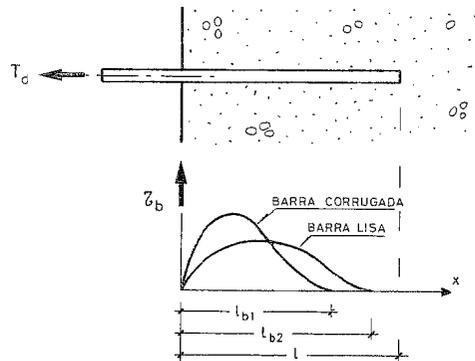


Figura 43-11

$$\tau_d = A_s \cdot f_{yd} = l_b \cdot \tau_{bd} \cdot \pi \phi$$

y con  $A_s = \frac{\pi \phi^2}{4}$

$$l_b = \frac{\phi f_{yd}}{4 \tau_{bd}} \quad [43.5]$$

Con el valor [43.4] de  $\tau_{bd}$ , la fórmula [43.5] nos proporciona los valores de la longitud de anclaje. De hecho, EHE *excluye este método como sistema de cálculo de la longitud de anclaje*, y resuelve el problema de acuerdo con lo que veremos en el Capítulo 44, lo que conduce a valores de la longitud de anclaje algo diferentes de los del Model Code 90 y del Eurocódigo EC-2<sup>1</sup>.

### 43.5.2 ADHERENCIA POR CORTANTE

#### 43.5.2.1 Piezas de canto constante

Sea una sección de pieza sometida a flexión simple (fig. 43-12), y consideremos una rebanada elemental de espesor  $ds$  sometida a un momento  $M$ .

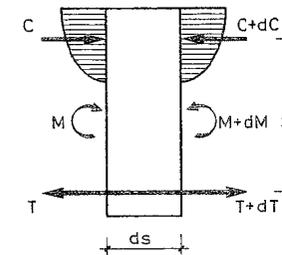


Figura 43-12

a) Caso en que todas las barras son del mismo diámetro

El incremento del momento flector, llamando  $z$  al brazo mecánico y  $T$  al esfuerzo de tracción de las armaduras, será:

$$dM = z dT$$

o bien:

$$dM = z \tau_b n u ds$$

siendo  $n$  el número de barras,  $u$  su perímetro y  $\tau_b$  la tensión de adherencia.

$$\tau_b = \frac{dM}{z n u ds}$$

<sup>1</sup> Los valores de  $\tau_{bd}$  adoptados por EHE para la comprobación de adherencia son elevados y más altos que los adoptados por el MODEL CODE, y su adopción conduciría a longitudes de anclaje excesivamente cortas.

teniendo en cuenta que  $\frac{dM}{ds} = V$ , suponiendo  $z \approx 0,9d$  y considerando

que en estado límite último  $V = V_d$ , se obtiene:

$$\tau_b = \frac{V_d}{0,9d n d} \leq \tau_{bd} \quad [43.6]$$

donde  $\tau_{bd}$  es la resistencia de cálculo para adherencia que hemos visto en [43.4].

Este tipo de tensiones de adherencia se presenta en flexión siempre que haya esfuerzo cortante, y precisamente el esfuerzo cortante,  $V = \frac{dM}{ds}$ , es la medida de la "velocidad" de variación del momento flector a lo largo de la pieza.

b) Caso en que las barras son de diferentes diámetros

Para el caso en que la armadura esté compuesta por barras de diferentes diámetros, por ejemplo grupos de  $n_1, n_2, \dots, n_k$  barras de diámetros  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ , igualando los esfuerzos de adherencia en cada grupo, correspondientes al incremento de tracción de la armadura, se tiene

$$(n_1 \pi \phi_1 \tau_{b1} + n_2 \pi \phi_2 \tau_{b2} + \dots + n_k \pi \phi_k \tau_{bk}) ds = dT$$

Por otro lado, el incremento de la tensión en cada barra debe ser el mismo, con independencia de su diámetro, puesto que los alargamientos son iguales, luego

$$\frac{n_1 \pi \phi_1 \tau_{b1} ds}{n_1 \frac{\pi \phi_1^2}{4}} = \frac{n_2 \pi \phi_2 \tau_{b2} ds}{n_2 \frac{\pi \phi_2^2}{4}} = \dots = \frac{n_k \pi \phi_k \tau_{bk} ds}{n_k \frac{\pi \phi_k^2}{4}}$$

y simplificando se obtiene el sistema

$$n_1 \phi_1 \tau_{b1} + n_2 \phi_2 \tau_{b2} + \dots + n_k \phi_k \tau_{bk} = \frac{dT}{\pi ds} = \frac{dM}{\pi ds} = \frac{V_d}{\pi z} = \frac{V_d}{0,9d \pi} \quad [43.7]$$

$$\frac{\tau_{b1}}{\phi_1} = \frac{\tau_{b2}}{\phi_2} = \dots = \frac{\tau_{bk}}{\phi_k} \quad [43.8]$$

que resuelto conduce a la solución:

$$\tau_{bi} = \frac{V_d}{0,9d \pi \frac{n_1 \phi_1^2 + n_2 \phi_2^2 + \dots + n_k \phi_k^2}{\phi_i}} = \frac{V_d}{3,6d \frac{A_s}{\phi_i}} \leq \tau_{bd} \quad [43.9]$$

donde  $A_s$  es el área total de la armadura de tracción.

Como la tensión más alta, de acuerdo con [43.8], se produce para el diámetro mayor, basta comprobar éste únicamente, mediante [43.9] que sustituye a [43.6].

43.5.2.2 Piezas de canto variable

Supongamos ahora una pieza de canto variable (fig. 43-13).

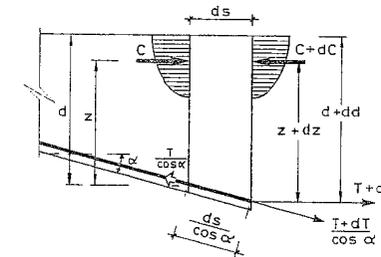


Figura 43-13

De nuevo podemos escribir:

$$C = T = \frac{M}{z}$$

y diferenciando, al no ser  $z$  constante

$$\frac{dT}{ds} = \frac{z \frac{dM}{ds} - M \frac{dz}{ds}}{z^2} \quad [43.10]$$

o bien

$$dT = \frac{z dM - M dz}{z^2} \quad [43.11]$$

La componente  $\frac{dT}{\cos \alpha}$  (fig. 43-13) debe ser equilibrada por las tensiones de adherencia, con lo que podemos escribir

$$n \cdot u \cdot \tau_b \cdot \frac{ds}{\cos \alpha} = \frac{dT}{\cos \alpha} \quad [43.12]$$

Teniendo en cuenta que  $z \approx 0,9 d$ ,  $dz \approx 0,9 dd$ , y por tanto  $\frac{dz}{ds} = 0,9 \frac{dd}{ds} = 0,9 \operatorname{tg} \alpha$  y sustituyendo [43.10] en [43.12]

$$\tau_b = \frac{z \cdot \frac{dM}{ds} - 0,9 M \cdot \operatorname{tg} \alpha}{n \cdot u \cdot z^2}$$

(Obsérvese que en [43.12] no interviene realmente  $\alpha$ )

y con  $\frac{dM}{ds} = V$

$$\tau_b = \frac{1}{nu} \left[ \frac{V}{z} - 0,9 \frac{M}{z^2} \operatorname{tg} \alpha \right]$$

y en estado límite último, con

$$V = V_d, \quad M = M_d$$

$$\tau_b = \frac{1}{0,9d \cdot nu} \left[ V_d - \frac{M_d}{d} \operatorname{tg} \alpha \right] \leq \tau_{bd} \quad [43.13]$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de los dos bordes de la pieza.

Si las barras no son todas del mismo diámetro, la fórmula [43.9] se generaliza de forma inmediata y la expresión [43.13] se transforma en

$$\tau_{bi} = \frac{V_d - \frac{M_d}{d} \operatorname{tg} \alpha}{3,6d \frac{A_s}{\phi_i}} \leq \tau_{bd} \quad [43.14]$$

bastando comprobar la barra de mayor diámetro.

Obsérvese que tanto [43.13] como [43.14], en forma paralela a como se vio en el caso de esfuerzo cortante en piezas de canto variable, conduce a tensiones menores que en el caso de canto constante, si el canto crece con el momento y a tensiones mayores si ocurre lo contrario.

### 43.6 ADHERENCIA DE GRUPOS DE BARRAS

La Instrucción EHE permite el uso de barras en contacto, hasta un máximo de cuatro barras. A los efectos de separación de grupos entre sí, distancias entre grupos, etc., autoriza a reemplazar el grupo por una barra ficticia con la misma área que el grupo e idéntico centro de gravedad. También da reglas para el anclaje de las barras del grupo, que veremos en el capítulo siguiente. En cambio EHE nada dice respecto a la comprobación de adherencia en tales grupos, que evidentemente puede ser crítica.

Es erróneo el criterio de emplear el concepto de barra ficticia equivalente o el de diámetro equivalente, para comprobar la adherencia. Los ensayos de TEPFERS (43.16) han puesto en evidencia que los fallos de adherencia se producen según lo que indica la figura 43-14 tomada de la referencia (43.17) y por lo tanto los perímetros a considerar pueden ser los indicados en la figura 43-15, empleándose las fórmulas habituales de comprobación de adherencia.

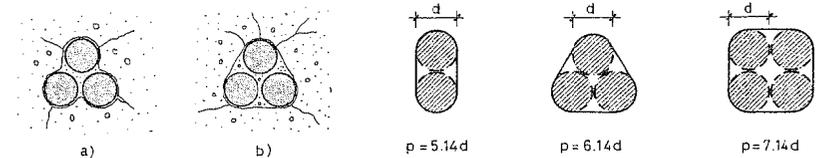


Figura 43-14

Figura 43-15

Obsérvese que en el caso de que se pretendiera emplear el diámetro equivalente, para  $n$  barras de diámetro  $d$ , resulta  $d_e = \sqrt{n} d$ , lo que para  $n = 2, 3$  y  $4$  conduce a valores de  $d_e$  de  $1,41d, 1,73 d$  y  $2d$  y a unos perímetros de  $4,42d, 5,43d$  y  $6,28d$ , inferiores a los que hemos adoptado, de acuerdo con la figura 43-15.

#### EJEMPLO 43.1

Dada la pieza de la figura 43-16, de ancho  $b = 300$  mm y sometida a un momento  $M_d = 450$  m kN, esfuerzo cortante en el arranque  $V_d = 300$  kN, comprobar la adherencia sabiendo que el hormigón es H-25, el acero B 500 S y  $\gamma_s = 1,15$ .

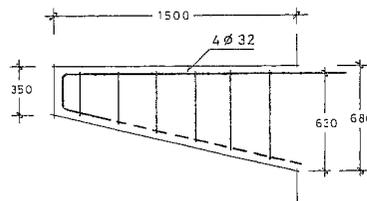


Figura 43-16

*Solución*

De acuerdo con la fórmula [43.13], como  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{330}{1500} = 0,22$

$$\tau_b = \frac{1}{0,9 \cdot 630 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 32} \left[ 300.000 - \frac{450 \cdot 10^6}{630} \cdot 0,22 \right] = 0,63 \text{ N/mm}^2$$

y de acuerdo con GT-131,  $\tau_{bd} = 4,43 \text{ N/mm}^2$ , luego está en situación holgada de adherencia.

**BIBLIOGRAFÍA**

(43.1) REHM, G.: "The Basic Principles of the Bond between Steel and Concrete". Translation nº 134. Cement and Concrete Association. London. 1968.

(43.2) LEONHARDT, F.; MONNIG, E.: "Vorlesungen über Massivbau. Grundlagen zur Bemessung im Stahlbeton. Teif Springer Verlag". Berlin. 1973.

(43.3) LUTZ, L.; GERGELY, P.: "Mechanics of Bond and Slip of Deformed Bars in Concrete". Journal A.C.I.. November 1967.

(43.4) VOS, E.: "Influence of Loading Rate and Radial Pressure on bond in Reinforced Concrete". Delft University Press. 1983.

(43.5) MARTIN, H.; NOAKOWSKI, P.: "Verbundverhalten von Beton-Stähler, Untersuchungen an der Grundlage von Ausziehversuchen. Schriftenreihe of the Deutschen Ausschuss für Stahlbeton". Heft . 319. Berlin. 1981.

(43.6) CEB "Revised Pull Out Test". CEB NEWS. Nº 73. Mayo 1983.

(43.7) CEB "Beam Test". CEB NEWS. Nº 61. Abril 1982.

(43.8) ACI Committee 408. ACI Journal. Febrero 1964.

(43.9) FERGUSON, P.M.; THOMPSON, J.N.: "Development Length for Large High Strength Reinforcing Bars". Journal ACI. January 1965.

(43.10) GOTO, Y.: "Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars". Journal ACI. April 1971.

(43.11) TEPFERS, R.: "Cracking of Concrete Cover Along Anchored Deformed Reinforcing Bars". Magazine of Concrete Research. March 1979.

(43.12) TASSIOS, T.P.; YANOPOULOS, P.J.: "Analytical Studies on Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading Based on Bond-Slip Relationships". Journal ACI. June 1981.

(43.13) ELIGEHAUSEN, R.; BERTERO, V.V.; POPOV, E.P.: "Local Bond Stress-Slip Relationships for Deformed Bars under Generalized Excitations-Test and Analytical Model". Report of the University of Berkeley.

(43.14) DELIBES, A.: "Common investigation on Pull-Out and Beam-Test". Trabajo realizado para el C.E.B. (No publicado).

(43.15) CEB-FIP MODEL CODE 1990.

(43.16) TEPFERS, R.: "Two Pull-Out tests made on single and bundled bars casted in concrete cubes". Division of Buildings Technology nº 414. Chalmers University. Goteborg. 1962.

(43.17) COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON (CEB). Bulletin d'Information nº 151. "Bond Action and Bond Behaviour of Reinforcement". Avril 1982.

## CAPÍTULO 44

### ANCLAJE Y EMPALME DE ARMADURAS

#### 44.1 ANCLAJE. CONCEPTOS BÁSICOS

En las extremidades de las armaduras, éstas deben transferir su tensión a otro elemento, que generalmente es el hormigón que las rodea. Desde una extremidad a otra de la barra, ésta va incrementando su tensión hasta alcanzar en cada punto el valor requerido por el cálculo para, al final, descargarse nuevamente de tensiones hasta anularse éstas de nuevo en el otro extremo de la barra.

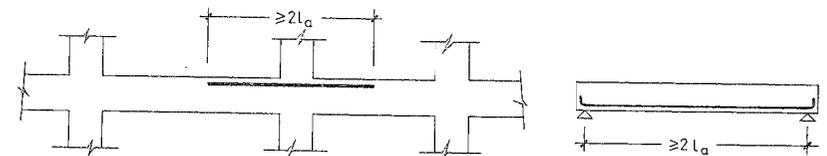
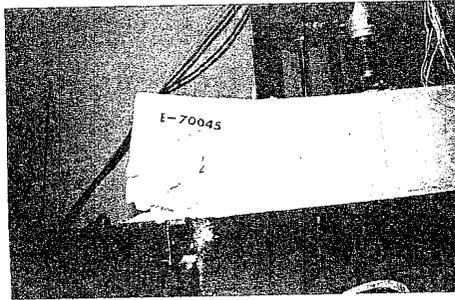


Figura 44-1

De acuerdo con lo anterior, si una armadura ha de desarrollar su capacidad mecánica completa, su longitud en ningún caso podrá ser inferior al doble de su longitud de anclaje. Esta longitud de anclaje es la que se define más adelante como longitud neta (fig. 44-1).

En sentido estricto, la longitud de anclaje debería ser la expuesta en 43.5.1 dada por la fórmula [43.5]. De hecho, muchos países lo hacen así en sus Normas y en particular éste es el sistema adoptado por el MODEL-CODE (44.1) y el EUROCÓDIGO EC-2 (44.2). La Instrucción EHE no lo hace así, debido a que, al aceptar tensiones muy elevadas para la comprobación de adherencia en el ensayo de homologación de Beam-Test, éstas no resultarían prudentes para desarrollar las longitudes de anclaje.

El fallo de anclaje se produce, en general, a causa de la rotura por tracción del hormigón, que envuelve a la barra, de forma que el hormigón que la rodea experimenta una especie de hendimiento<sup>1</sup>. Los efectos favorables para el anclaje son los mismos que mejoran la adherencia y que fueron expuestos en 43.2.2. Aunque la presencia de armadura transversal ductiliza en alguna medida el fallo de anclaje, éste suele ser esencialmente frágil (fig. 44-2), lo cual hace que sus condiciones deban ser siempre estudiadas con especial prudencia.



Fallo repentino de un anclaje de viga sin fisuración de aviso.  
(Cortesía de INTEMAC)

Figura 44-2

Dos fallos típicos de anclaje se indican en las figuras 44-3 a) y b), aunque más frecuentemente el fallo del anclaje se mezcla con un fallo a esfuerzo cortante (fig. 44-3 c) y d).

Para las barras lisas, la forma ordinaria de anclaje era el gancho. En el caso de las barras corrugadas, la forma habitual de anclaje es la prolongación recta, si es posible, y más excepcionalmente el gancho o la patilla. Debe observarse que, en especial en las condiciones de fuerte tensión de las barras corrugadas, cualquier anclaje con pequeño radio de curvatura, encierra algunos problemas. La figura 44-4, tomada de MULLER (44.3), indica los resultados de una investigación experimental sobre la distribución de tensiones de anclaje en los ganchos. La fuerte concentración de tensiones en la superficie interior de la zona inicial del gancho puede producir una deformación del hormigón que suponga un corrimiento apreciable de la barra, bajo la fuerza de tracción que la solicita, antes de que el final del gancho esté colaborando apreciablemente. La figura 44-5 esquematiza el mismo problema, en el caso de un anclaje en nudo de fachada con radio de doblado escaso. En este sentido, debe recordarse que la fuerza última no es la única característica importante de un anclaje y que su "rigidez", entendida como relación entre fuerza aplicada y corrimiento experimentado, es también muy importante.

<sup>1</sup> El término inglés "splitting" ha pasado, realmente, a designar el fenómeno de forma internacional.

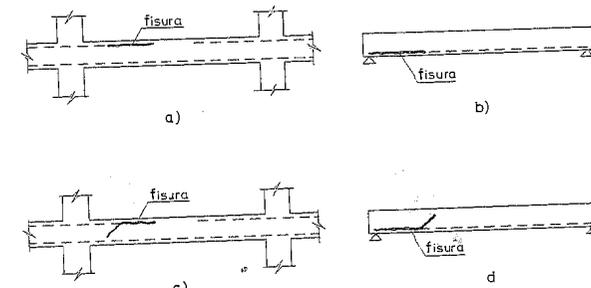


Figura 44-3

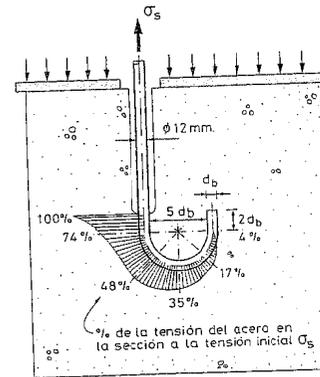


Figura 44-4

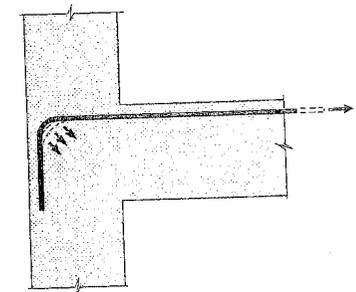
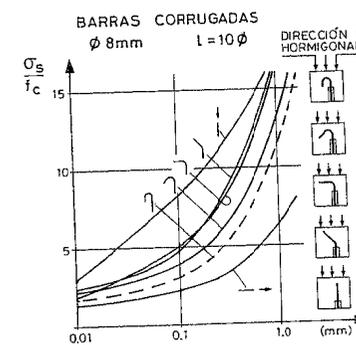
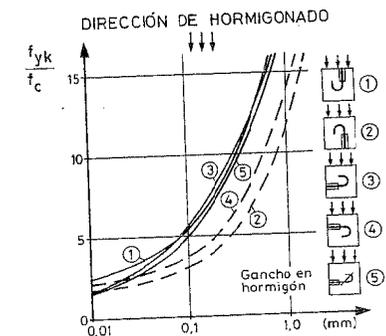


Figura 44-5

Por tanto, y como norma general, si es posible, resulta preferible para barras corrugadas el anclaje por prolongación recta. La figura 44-6 resume ensayos de RHEM (44.4) que ponen bien en evidencia que un anclaje curvo no es siempre mejor.



DESPLAZAMIENTO  
Figura 44-6



DESPLAZAMIENTO  
Figura 44-7

El anclaje es también sensible a la posición de las barras durante el hormigonado, de acuerdo con lo que vimos en 44.2.4 y le son, por tanto, de aplicación las posiciones de adherencia I y II que vimos allí.

La figura 44-7, tomada también de la referencia (44.4), ilustra claramente el comportamiento según la formación de la capa de mortero de débil resistencia bajo la barra y la influencia de la dirección de tracción respecto a la de hormigonado.

La posición de la barra en la sección y la separación entre barras son importantes en la resistencia del anclaje. La figura 44-8, tomada de los trabajos del C.E.B. (44.5), indica formas típicas de "splitting" en anclajes y solapes.

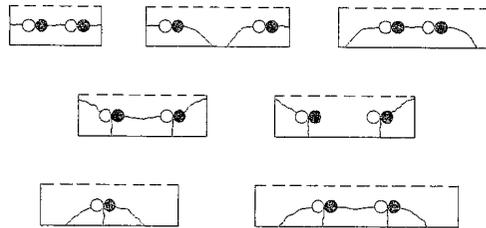


Figura 44-8

La compresión transversal, al mejorar la adherencia, mejora también las condiciones de anclaje, como veremos más adelante. De acuerdo con esto, si un anclaje curvo está en una zona sometida a compresión transversal, si es posible, debe disponerse con su plano medio ortogonal a la dirección de la compresión (fig. 44-9 b)), preferible a la solución de la fig. 44-9 a)).

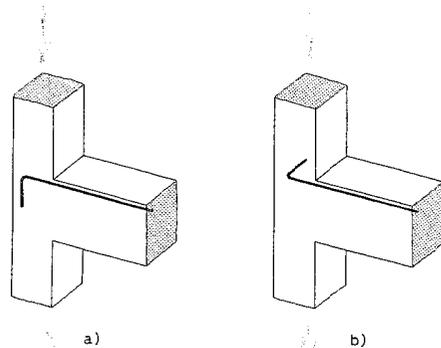


Figura 44-9

En las piezas sometidas a flexión simple, de acuerdo con lo que vimos en 39.23.2.1, a efectos de determinar el punto en que deja de ser necesaria una armadura, deberá existir en cada sección la armadura necesaria en la situada a la distancia  $k_t d$ , en el sentido en que crece el momento flector, viniendo  $k_t$  dado por [39.50] y no siendo,

en ningún caso, superior a  $0,85 d$  en piezas con estribos<sup>1</sup>. La Instrucción EHE adopta la solución, indicada en la figura 44-10, que, como dijimos, sólo es válida para piezas de ancho constante y para ellas resulta conservadora el trasladar la ley de momentos el canto  $d$ . Para ese caso particular de piezas de ancho constante, la regla de trasladar las leyes de momentos flectores  $k_c d \geq 0,85 d$  es suficiente y conduce a economías apreciables. (Se supone  $\theta > 45^\circ$ ).

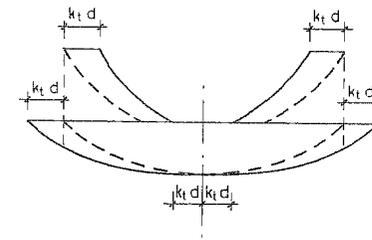


Figura 44-10

Lo anterior es válido para hormigón armado con  $\theta = 45^\circ$ . Para  $\theta \neq 45^\circ$  y para hormigón pretensado, véase el Capítulo 39.

## 44.2 LONGITUD BÁSICA DE ANCLAJE EN TRACCIÓN

La Instrucción EHE define las longitudes básicas de anclaje en tracción de barras corrugadas de acuerdo con lo que sigue:

Para barras en Posición I

(Véase apartado 43.2.4).

$$l_{bI} = m \phi^2 \leq \frac{f_{yk}}{20} \phi \quad [44.1]$$

Para barras en Posición II

$$l_{bII} = 1,4 m \phi^2 \leq \frac{f_{yk}}{14} \phi \quad [44.2]$$

En [44.1] y [44.2],  $\phi$  es el diámetro de la barra en centímetros,  $m$  coeficiente numérico dado por la Tabla T-44.1,  $f_{yk}$  el límite elástico del acero en  $N/mm^2$  y  $l_b$  la longitud básica en cm.

<sup>1</sup> Se supone  $\lambda = 0,10$  que es un valor mínimo en la práctica en vigas.

TABLA 44.1

HORMIGÓN	m	
	B-400	B-500
H-250	12	15
H-300	10	13
H-350	9	12
H-400	8	11
H-500	7	10

La figura 44-1 recoge las longitudes básicas correspondientes, para barras rectas.

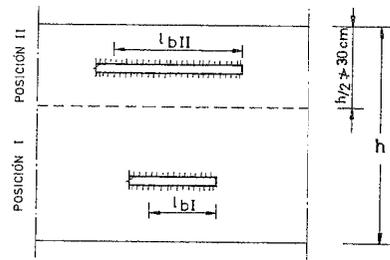


Figura 44-11

Los gráficos GT-132 y GT-133 recogen las tabulaciones correspondientes.

Las fórmulas [44.1] y [44.2] están basadas en experimentación española realizada con motivo de los ensayos de homologación de adherencia. No debe olvidarse, sin embargo, que en el ensayo de homologación de adherencia se emplea el método del BEAM-TEST, que sitúa la barra a ensayar en unas condiciones de recubrimiento y de armadura transversal bastante diferentes y mejores que en muchos casos reales.

### 44.3 LONGITUD NETA DE ANCLAJE POR BARRAS EN TRACCIÓN

A la longitud básica de anclaje  $l_b$ , deben aplicársele los siguientes factores de corrección, aunque rigiendo siempre para la longitud neta de anclaje  $l_{b,net}$  los mínimos que más adelante se indican.

#### a) Factor de corrección por armadura superabundante

Si en la sección donde la barra deja de ser necesaria el área real de armadura  $A_{s,real}$  es superior a la estrictamente necesaria,  $A_{s,nec}$ , la longitud básica debe multiplicarse por el coeficiente

$$k_{bl} = \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \quad [44.3]$$

#### b) Factor de corrección por forma del anclaje

Si el anclaje tiene forma diferente de la recta, la longitud básica debe multiplicarse por el coeficiente  $k_{b2}$ .

donde  $k_{b2}$  viene dado por la Tabla T-44.2 de acuerdo con la figura 44.12.

TABLA T-44.2

Valores de  $k_{b2}$

Tipo de anclaje	Tracción	Compresión
Prolongación recta	1	1
Patilla, gancho y gancho en U	0,7 (*)	1
Barra transversal soldada	0,7	0,7

(\*) Si el recubrimiento de hormigón perpendicular al plano de doblado es superior a  $3 \phi$ . En caso contrario  $\beta = 1$ .

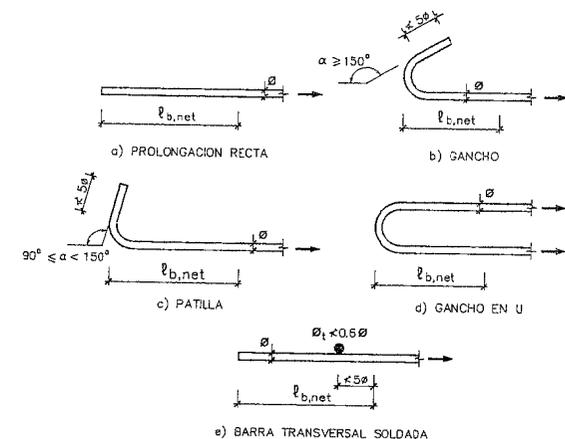


Figura 44-12

#### c) Factor de corrección en función del porcentaje de armadura cortado en la sección <sup>1</sup>.

Supongamos una zona de pieza sometida a una cierta ley de momentos flectores, tal como se presenta en la figura 44-15. Esta ley se cubre con dos series de armaduras A y B (fig. 44-13 b)). Supongamos que la armadura total A + B tenga una sección  $A_{s1}$  y que la A, que deja de ser necesaria en la sección

<sup>1</sup> Este factor no se aplica al anclaje de la armadura en apoyos, que se rige por lo que se expondrá más adelante.

2 y se corta en la sección 4, sea una fracción  $\alpha$  de la sección total, es decir, que su sección es  $\alpha A_{s1}$ .

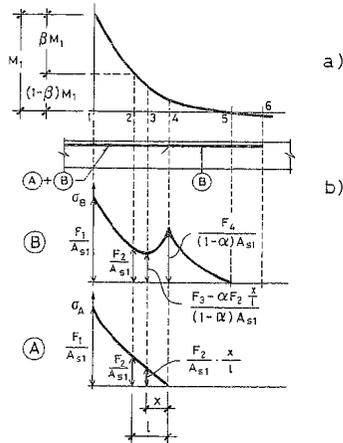


Figura 44-13

La serie B tiene, por lo tanto, una sección  $(1 - \alpha) A_{s1}$ . El momento cubierto por la serie A lo designaremos como  $\beta M_1$  y como  $(1 - \beta) M_1$  el cubierto por la serie B. Naturalmente, siempre se cumple  $\alpha < \beta$  tal como se indica en la figura 44-14, que representa un diagrama típico momentos-áreas de armadura y  $\alpha$  es tanto más cercano a  $\beta$  cuanto más baja es la cuantía correspondiente a  $M_1$ . En la práctica, es muy frecuente suponer  $\alpha = \beta$ , es decir, suponer proporcionalidad entre momentos y armaduras, lo que equivale a suponer constante el brazo mecánico  $z$ , para determinar los puntos de corte de barras. Esto está, por supuesto, del lado de la seguridad en los casos de sección constante <sup>2</sup>.

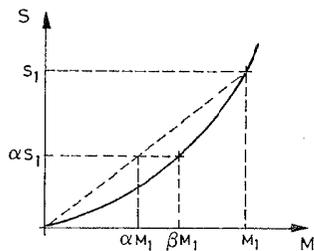


Figura 44-14

- 1 Se entiende que, para la determinación del punto 2, en que la barra deja de ser necesaria, ya se ha tenido en cuenta el incremento de tracción en la armadura debido al esfuerzo cortante, tal como vimos en el Capítulo 39.
- 2 Con los métodos actuales de cálculo, muy del lado de la seguridad, a veces.

Desde la sección 1 hasta la 2, todas las armaduras están perfectamente ancladas y la tensión en todas ellas es la misma en cada sección. El esfuerzo total de tracción en el conjunto de armaduras es:

$$F = \frac{M}{z} \quad [44.4]$$

donde  $M$  es el momento actuante en la sección y  $z$  el brazo mecánico.

La tensión de las armaduras entre las secciones 1 y 2 es por tanto:

$$\sigma = \frac{F}{A_{s1}} \quad [44.5]$$

viniendo  $F$  dada por [44.4].

A partir de la sección 2 en que deja de ser teóricamente necesaria, la serie A de armaduras comienza su anclaje, que suponemos de longitud  $\ell$ . Como es hipótesis habitual, supondremos un decrecimiento lineal de la tensión en las barras de la serie con valor nulo en la punta. La tensión a distancia  $x$  de la punta vale por tanto:

$$\sigma_A = \frac{F_2}{A_{s1}} \cdot \frac{x}{\ell} \quad [44.6]$$

Llamando  $\sigma_B$  la tensión en la serie B en la sección 3, distante  $x$  del punto de corte de la serie A, se habrá de cumplir:

$$\sigma_B (1 - \alpha) A_{s1} + \sigma_A \alpha A_{s1} = F_3$$

y, teniendo en cuenta [44.6]:

$$\sigma_B = \frac{F_3 - \alpha F_2 \frac{x}{\ell}}{(1 - \alpha) A_{s1}} \quad [44.7]$$

Para  $x = 0$ , en la sección 4, se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{A4} &= 0 \\ \sigma_{B4} &= \frac{F_4}{(1 - \alpha) A_{s1}} \end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$\sigma_{B4} = \frac{F_4}{(1 - \alpha) A_{s1}} = \frac{M_4}{(1 - \alpha) A_{s1} z_4}$$

puede ser mayor que  $\sigma_{B2} = \frac{M_2}{A_{s1} z_2}$ , bastando para ello que

$$M_4 > (1 - \alpha) M_2 \frac{z_4}{z_2} \quad 1$$

De la sección 4 hasta la 5, la ley de tensiones es proporcional a la de momentos, con valor:

$$\sigma = \frac{F}{(1 - \alpha) A_{s1}} = \frac{M}{(1 - \alpha) A_{s1} z} \quad [44.8]$$

En la sección 2, donde se inicia el anclaje de la serie A de armaduras,

$$\sigma_{A2} = \frac{F_2}{A_{s1}} = \frac{(1 - \beta) M_1}{A_{s1} z_2}$$

Suponiendo que en la sección 1 la armadura era estricta, es decir, correspondía exactamente al momento  $M_1$ , la relación de tensiones vale:

$$\frac{\sigma_{A2}}{\sigma_{A1}} = \frac{\frac{(1 - \beta) M_1}{A_{s1} z_2}}{\frac{M_1}{A_{s1} z_1}} = (1 - \beta) \frac{z_1}{z_2}$$

y por lo tanto, la longitud  $l$  de anclaje necesaria será:

$$l = \ell_b (1 - \beta) \frac{z_1}{z_2}$$

y como  $\frac{z_1}{z_2} \leq 1$ , se tiene del lado de la seguridad:

$$l = \ell_b (1 - \beta) \quad 2 \quad [44.9]$$

1 Dependiendo de la variación de momentos  $\sigma_{B4}$  puede llegar al límite a valer  $\sigma = \frac{F_1}{A_{s1}}$ , o sea el límite elástico de cálculo.

2 La teoría expuesta es simplificada, pero coherente con el planteamiento de la Instrucción EHE. Por supuesto, la compatibilidad de deformaciones en la zona de anclaje es un fenómeno insuficientemente conocido. La Instrucción EHE, siguiendo al MODEL CODE, especifica que, a partir del punto donde deje de ser necesaria la armadura, se disponga la longitud de anclaje completa. La Norma Norteamericana ACI-318-95 (que no traslada la ley de momentos, según vimos en el Capítulo 39) especifica sólo un anclaje de  $d$  ó  $12 \phi$ , lo que sea mayor, lo que parece muy poco. En cambio la regla EHE es demasiado conservadora y, si ello se suma al hecho de desplazar la ley de momentos siempre un canto, conduce a longitudes de anclaje excesivas.

siendo  $\ell_b$  la longitud básica de anclaje dada por la Instrucción EHE y  $\beta$  la fracción de momento cubierto por la serie que se ancla, respecto al cubierto por toda la armadura existente en la sección.

Si el número de barras que no se anclan, o sea, las que siguen, es muy grande respecto a las que se anclan,  $\beta \approx 0$  y  $l \approx \ell_b$ , es decir, se está prácticamente en el caso de un tirante anclado en un macizo de hormigón (fig. 44-15), en el que la tensión en el punto A en que se inicia el anclaje es la máxima admisible ( $\sigma_{m\acute{a}x} = f_{yd}$  para  $T_d = \gamma_f T$ ).

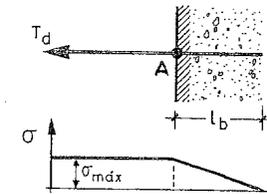


Figura 44-15

Si en el punto considerado se ancla toda la armadura porque ya no es necesaria ninguna, tal como en el caso del punto 5 de la figura 44-13, resulta  $\beta = 1$  y, por tanto,  $l = 0$  y rigen los mínimos prácticos recomendables establecidos por EHE que se indican más adelante.

Si se supone  $\alpha = \beta$ , es decir, proporcionalidad entre momentos y áreas de armadura, la longitud de anclaje se transforma en:

$$l = \ell_b (1 - \alpha) \quad 1 \quad [44.10]$$

siendo  $\alpha$  la fracción de armadura que se ancla respecto a la armadura total de la sección. Como dijimos, esta regla está del lado de la seguridad, pues conduce a considerar que la armadura deja de ser necesaria más tarde de lo verdadero.

En cualquier caso, la longitud de armadura, desde la sección de momento máximo a la sección donde se corta una barra, no puede nunca ser menor de la longitud básica de anclaje  $\ell_b$ .

Las consideraciones anteriores permiten una economía importante de acero respecto a la regla simplificada de llevar la longitud completa  $\ell_b$  a partir del punto donde una barra deja de ser necesaria.

En definitiva y por el motivo expuesto, aparece un tercer factor corrector

$$k_{b3} = (1 - \alpha) \quad [44.11]$$

donde  $\alpha$  es la fracción de la armadura total que se ancla a partir de la sección considerada.

1 Por supuesto [44.10] es evidente sin la demostración incluida. Se ha hecho así por visualizar el problema de anclaje.

d) Longitud neta de anclaje de barras en tracción

La longitud neta de anclaje de barras en tracción viene dada por

$$\ell_{b,net} = \ell_b \cdot k_{b1} \cdot k_{b2} \cdot k_{b3} \quad [44.12]$$

En la fórmula [44.12] se incluirán solamente los valores  $k_{bi}$  que correspondan a cada caso.

e) Longitudes mínimas absolutas de anclaje

La longitud neta [44.12] no será en ningún caso inferior a  $0,3 \ell_b$  ni a  $10 \phi$  ni a  $150 \text{ mm}$ .

Estos valores mínimos tienen un origen de orden práctico, ya que por tolerancias de ejecución, posibles corrimientos de la ley de momentos por acciones horizontales imprevistas, asientos de apoyos, etc., resulta conveniente establecer tales fronteras<sup>1</sup>.

#### 44.4 ANCLAJE DE LA ARMADURA DE MOMENTOS NEGATIVOS

- a) De acuerdo con lo visto en 44.3.c) y según la figura 44-16, un grupo de barras que cubre un momento  $M_1$  deberá cortarse en un punto  $\beta$  tal que

$$AB = k_1 d + \ell_{b,net} \quad [44.13]$$

donde  $k_1$  viene dado por [32.43] y  $\ell_{b,net}$  por [44.12]. Las barras que sobrepasen el punto  $B$  se anclarán de la misma forma, pero el punto  $C$  en que se interrumpan no debe distar del  $B$  menos que el valor de  $\ell_{b,net}$  correspondiente a las barras que se cortan en  $C$  (debido a que, según se expuso en 44.3 c), la tensión de dichas barras en el punto  $B$  puede, en casos extremos, alcanzar el límite elástico de cálculo).

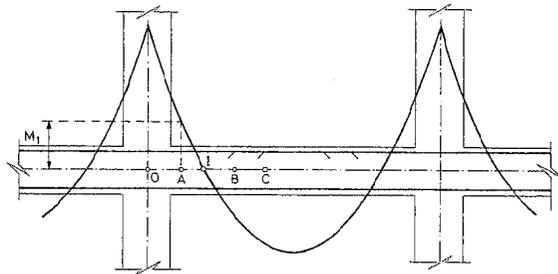


Figura 44-16

<sup>1</sup> EHE no indica nada sobre la necesidad de armadura transversal en la zona de anclaje. El EUROCÓDIGO EC-2 especifica un área mínima de armadura transversal igual al 25% de sección de la más gruesa de las barras ancladas en la zona. Para su distribución en la zona, vale lo indicado en la figura 44-39 a) para solapes.

- b) Como norma general, las barras rectas no deben anclarse en zona de tracción (es decir, a la izquierda del punto I de la figura). Si la armadura se ancla en la zona de la cara superior que está en tracción, (cosa frecuente) debe cumplirse una de las dos condiciones siguientes:

- b-1) El esfuerzo cortante  $V_d$  en la sección de corte de las barras no excederá

$$\frac{2}{3} V_u, \text{ siendo } V_u \text{ el esfuerzo cortante último en dicha sección, tenida en}$$

cuenta la armadura transversal existente.

- b-2) Las barras son de diámetro no superior a 32 mm, la armadura que

continúa es, al menos, el doble de la necesaria y  $V_d < \frac{3}{4} V_u$ .

La razón de estas especificaciones es que la experiencia de laboratorio indica que, si no se cumplen estas condiciones, las zonas de corte presentan tendencia a la fisuración y baja ductilidad.

- c) Una forma posible de anclaje es la de empleo de barras dobladas, pasándolas a la cara opuesta y anclándolas en zona comprimida. Se puede comenzar a bajar las barras a partir del punto A (fig. 44-17) correspondiente a la traslación  $k_1 d$  y la  $\ell_{b,net}$  se comenzará a contar a partir del punto B correspondiente a la mitad del canto. En este caso el coeficiente  $k_{b1}$  de la barra viene dado por la relación del área necesaria por cortante al área real de la barra doblada.

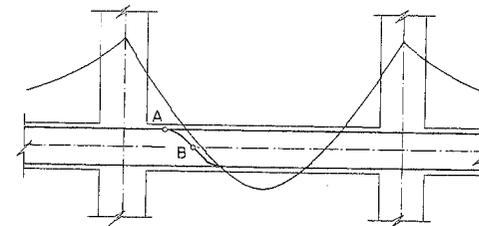


Figura 44-17

Las barras pueden por supuesto pasar a la cara opuesta, aunque esté en tracción, si en lugar de anclarse continúan por la otra cara formando parte de su armadura.

- d) Al menos  $\frac{1}{3}$  de la armadura de momentos negativos debe anclarse más allá

del punto I de inflexión (fig. 44-16).

- e) Debe prestarse atención especial a aquellas piezas en las cuales la tensión de la armadura no es sensiblemente proporcional al momento, como por ejemplo el caso indicado en la figura 44-18. Debido a la fuerte variación de canto, la tensión del acero es muy próxima a  $f_{yd}$  hasta casi la punta del voladizo (línea continua del gráfico de  $\sigma_s$ ), mientras que con canto constante decrecería muy rápidamente (línea de trazos del citado gráfico). En el primer caso, a poca distancia del apoyo,  $\frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \cong 1$ , mientras que, en el segundo,  $\frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \cong 0$  con el consiguiente cambio en  $k_{b1}$ .

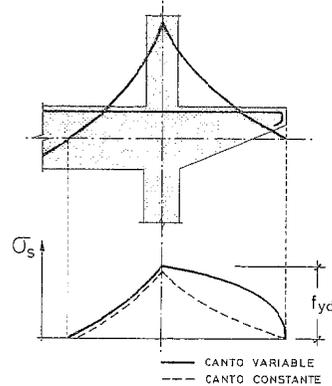


Figura 44-18

- f) En los nudos de fachada conviene distinguir dos situaciones considerablemente diferentes (fig. 44-19).

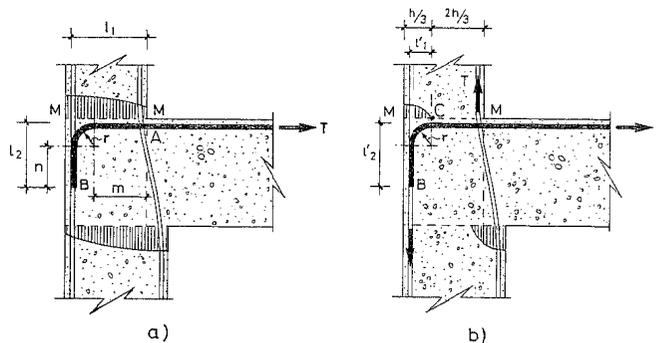


Figura 44-19

Si el pilar superior, en su sección  $M-M$ , tiene toda la sección comprimida (fig. 44-19), el anclaje de la zona de momentos negativos, aunque en Posición II, puesto que  $M-M$  es una junta de hormigonado, está en situación beneficiosa, aunque hoy por hoy no pueda cuantificarse con gran precisión ese efecto beneficioso de la compresión transversal. La longitud de anclaje (en Posición II) para barras corrugadas, puede empezar a contarse desde el punto  $A$  y debe ser tal que, si se desarrolla toda ella en prolongación recta, su longitud sea  $\ell_{b,net}$ . Si es necesario doblar la barra, tal como  $AB$  en el caso de la figura 44-21 a), debe probarse, en primer lugar, si la longitud disponible  $\ell_1$  permite el anclaje con patilla o gancho, lo cual será válido si

$$\ell_1 \geq 0,7 \ell_{b,net} \quad [44.14]$$

Aquí llamamos  $\ell_{b,net}$  a la correspondiente a anclaje recto; por lo tanto  $\ell_{b,net} = \ell_b k_{b1}$  de acuerdo con [44.3], donde  $\ell_b$  correspondiente a Posición II. Si no se cumple [44.14] es necesaria la prolongación recta en vertical tomando como radio mínimo interior el indicado en el Capítulo 51.

Si se dobla la barra, al ser el radio de la curva mayor que el de la patilla normalizada, puede escribirse (fig. 44-21 a))

$$\frac{n}{0,7} + \frac{1,57 (r + 0,5 \phi)}{2 \cdot 0,7} + \frac{1,57 (r + 0,5 \phi)}{2} + m = \ell_{b,net}$$

En la expresión anterior se ha considerado el gancho dividido en dos zonas, de  $45^\circ$  de ángulo, una con pendiente superior a  $45^\circ$  y otra con pendiente inferior a  $45^\circ$ , situadas en Posiciones I y II respectivamente. Teniendo en cuenta que  $n = \ell_2 - r - \phi$  y que  $m = \ell_1 - r - \phi$  y aceptando el caso pésimo  $r = 7 \phi$ , se obtiene

$$\ell_2 = 0,7 (\ell_{b,net} - \ell_1) + 4 \phi \quad [44.15]$$

En resumen:

- Si  $\ell_1 \geq \ell_{b,net}$ : Anclaje por prolongación recta.
- Si  $0,7 \ell_{b,net} \leq \ell_1 < \ell_{b,net}$ : Anclaje por patilla o gancho.
- Si  $\ell_1 < 0,7 \ell_{b,net}$ : Anclaje con prolongación vertical  $\ell_2$ , de acuerdo con [44.15].

Si el pilar superior no tiene toda su sección  $M-M$  comprimida, la situación del anclaje, en su zona inicial de entrada en el pilar, es sumamente desfavorable, pues está en una zona de tracción transversal<sup>1</sup>. En este caso (fig. 44-21 b)), el anclaje  $CB$  debe empezarse a contar a partir del punto  $C$  y, análogamente al caso anterior, se tendrá:

- Si  $\ell'_1 \geq \ell_{b,net}$ : Anclaje por prolongación recta.
- Si  $0,7 \ell_{b,net} \leq \ell'_1 < \ell_{b,net}$ : Anclaje por patilla o gancho.
- Si  $\ell'_1 < 0,7 \ell_{b,net}$ : Anclaje con prolongación vertical  $\ell'_2$ , de acuerdo con [44.15] haciendo en esta fórmula  $\ell_1 = \ell'_1$ .

<sup>1</sup> Si hay viga de fachada, el estado es incluso de tracción triaxil.

Se recuerda que en todo este apartado f), el valor  $\ell_{b,net}$  es igual a  $\ell_b k_{b1}$ , siendo  $\ell_b$  la longitud básica de anclaje en Posición II.

El que la sección M-M esté toda comprimida debe verificarse, en todas las hipótesis de combinación de acciones. Si el edificio está sometido a acciones horizontales importantes de viento y/o sismo, la alternancia de cargas hace que no sea prudente contar con el tramo horizontal del anclaje y la longitud  $\ell_{b,net}$  debe conseguirse entre el codo y la prolongación recta vertical, siendo en este caso  $\ell'_2 \approx 0,7\ell_{b,net}$ <sup>1</sup>.

- g) En los nudos de fachada de última planta, el problema no es de anclaje sino de solape (fig. 44-20) y será tratado en 44.16.

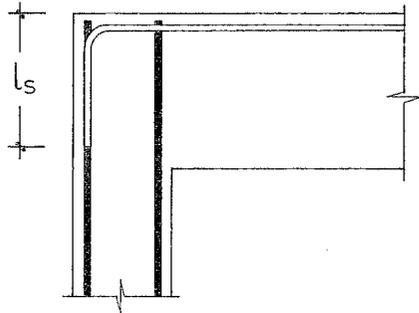


Figura 44-20

#### 44.5 ANCLAJE DE LA ARMADURA DE MOMENTOS POSITIVOS EN VIGAS

- Los cortes consecutivos, por análogo motivo al expuesto en 44.4 a), deben distanciarse un mínimo igual a  $\ell_{b,net}$ .
- Al menos un tercio de la armadura de momentos positivos en vano llegará a los extremos simplemente apoyados o articulados y al menos un cuarto a los apoyos con continuidad, extendiéndose las barras por la cara inferior de la pieza. La razón de esto es prever algún corrimiento de la ley de momentos, lo que puede ser debido a causas muy diversas, como asiento de apoyos, combinaciones de acciones no previstas, acciones horizontales imprevistas, etc.
- La entrega de la armadura en el interior del soporte o de otra viga (fig. 44-21 a) y b)) se realizará de acuerdo con lo que se expone a continuación.

<sup>1</sup> El cálculo teórico, como puede comprobarse, conduciría a  $\ell'_2 = 0,7 \ell_{b,net} + 3 \phi$ .

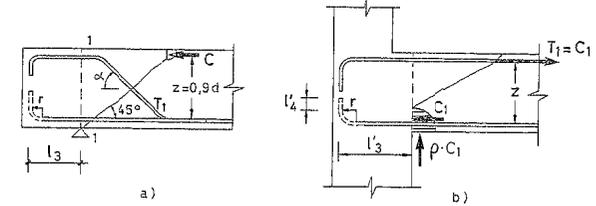


Figura 44-21

- Simple apoyo (fig. 44-21 a))

Según vimos en el Capítulo 39, la tracción de la armadura  $T_1$  en la sección 1-1 de apoyo, al ser  $M_{1d} = 0$ , vale

$$T_1 z = z V_d \left[ \cotg \theta - \frac{\lambda}{2} (\cotg \alpha + \cotg \theta) \right] \quad [44.16]$$

y para  $\theta = 45^\circ$  y el menor valor posible de  $\cotg \alpha$  que es  $\cotg \alpha = 0$ , es decir, armadura formada por estribos, resulta

$$T_1 = V_d \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \right] \quad [44.17]$$

donde  $\lambda = \frac{V_d - V_{cu}}{V_d}$ .

Como vimos en 44.1, el menor valor posible de  $\lambda$  en vigas es del orden de 0,10 y, por tanto, el valor máximo de  $T_1$  viene dado por [44.17] y simplifadamente puede adoptarse, del lado de la seguridad

$$T_1 = 0,95 V_d \quad [44.18]$$

En piezas sin armadura transversal (losas, placas, forjados, etc.),  $\lambda = 0$  y

$$T_1 = V_d \quad [44.19]$$

Si es  $A_s$  el área de la armadura de momentos positivos que llega al apoyo, su capacidad mecánica  $A_s f_{yd}$  requeriría su longitud de anclaje  $\ell_{b,net}$ . Al esfuerzo  $T_1$  le corresponderá

$$\ell_{ba} = \ell_{b,net} \frac{T_1}{A_s f_{yd}} \quad [44.20]$$

que puede organizarse en prolongación recta, patilla o incluso prolongación vertical, si es necesario<sup>1</sup>.

Es recomendable que  $\ell_{ba}$  cumpla, en vigas, los mínimos establecidos de  $0,3 \ell_b$ ,  $10 \phi$  y  $150 \text{ mm}$ . En losas y forjados aceptaremos valores menores en los capítulos correspondientes.

- Apoyo continuo (Fig. 44.21 b)).

En este caso, al existir la cabeza comprimida de resultante  $C_1 = T_1$  se moviliza una fuerza ascendente  $C_1 \rho$ , donde  $\rho$  es el coeficiente de corte-fricción que vimos en el Capítulo 39 y que tomaremos igual a 1.

La fórmula [44.17] se transforma en

$$T_1 = (V_d - C_1 \rho) \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \right]$$

y como  $C_1 \approx \frac{M_d}{0,9d}$ , con  $\rho = 1$ , se tiene:

$$T_1 = \left( V_d - \frac{M_d}{0,9d} \right) \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \right] \quad [44.21]$$

De nuevo, para vigas, puede adoptarse, del lado de la seguridad

$$T_1 = 0,95 \left( V_d - \frac{M_d}{0,9d} \right) \quad [44.22]$$

y, si no hay armadura de corte,

$$T_1 = V_d - \frac{M_d}{0,9d} \quad [44.23]$$

Análogamente a lo visto en el caso anterior

$$\ell_{ba} = \ell_b \frac{T_1}{A_s f_{yd}} \quad [44.24]$$

También es recomendable que  $\ell_{ba}$  cumpla los mínimos establecidos de  $10 \phi$  ó  $150 \text{ mm}$  en la entrega de la viga en otras vigas o pilares<sup>3</sup>.

- 1 Obsérvese que, en este caso, la corrección por armadura superabundante va incluida en la fórmula y, por tanto, para el cálculo de  $\ell_{b,net}$ , debe tomarse  $k_{bl} = 1$ . Lo mismo ocurre en [44.24].
- 2 En [44.24] se emplea  $\ell_b$  y no  $\ell_{b,net}$ , porque la corrección por armadura superabundante ya está tenida en cuenta al tomar  $C = \frac{M_d}{0,9d}$  y no  $C = A_s f_{yd}$ .
- 3 En losas y forjados estas longitudes se reducen como veremos.

d) Si la estructura se proyecta para resistir acciones horizontales, la armadura de momentos positivos que estrictamente debe llegar a un apoyo de acuerdo con 44.5 b), debe anclarse para resistir su capacidad mecánica completa y no sólo la fuerza prevista en 44.5 c). De esta manera, ante la inversión cíclica de momentos, se asegura la ductilidad del enlace, lo que no se conseguiría con más armadura a tensiones menores. Esto es especialmente importante en el caso de acciones sísmicas.

e) En los casos en que la curva de momentos flectores tiene *concavidad hacia la directriz de la pieza*, debe considerarse cuidadosamente lo siguiente (Fig. 44-22 a) y b)).

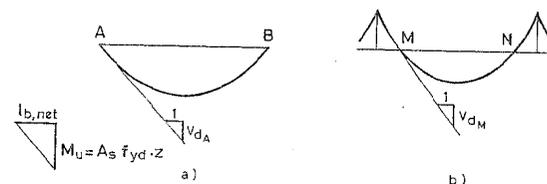


Figura 44-22

De acuerdo con la ecuación diferencial

$$V = \frac{dM}{ds}$$

el coeficiente angular de la tangente en el apoyo de una viga simplemente apoyada y en el punto de inflexión de un dintel continuo es igual al cortante en dichos puntos, respectivamente. A partir de los puntos A ó M, según el caso, la armadura, si aceptamos  $z \approx \text{constante}$ , va incrementando sus tracciones proporcionalmente a los momentos. Dicho incremento sólo se puede producir mediante la movilización de la adherencia en la longitud de anclaje. Para cubrir realmente el crecimiento de los momentos, hace falta que las tensiones de adherencia crezcan a igual o mayor ritmo, lo que conduce (fig. 44-22) a:

$$\frac{M_u}{\ell_{b,net}} \geq \frac{V_d}{I}$$

o lo que es lo mismo

$$\ell_{b,net} \leq \frac{M_u}{V_d} \quad [44.25]$$

Obsérvese que en [44.25]  $M_u$  no es el momento de cálculo en la sección, sino el momento de cálculo cubierto por la armadura realmente existente.

El exceso de armadura, si lo hay, debe tenerse en cuenta para el cálculo de  $\ell_{b,net}$ <sup>1</sup>

La Norma norteamericana ACI-318-95 adopta también la fórmula [44.25], pero con la modificación

$$\ell_{b,net} \leq k \frac{M_u}{V_d} + \ell_a \quad [44.26]$$

donde  $\ell_a$ , en el caso de simple apoyo, es la prolongación de la barra a partir del eje del apoyo y, en el caso de punto de inflexión, el canto de la pieza ó  $12 \phi$ , si esta última longitud es superior a  $d$ .

El valor de  $k$  es, en general, 1 y se adopta  $k = 1,3$  en los apoyos en los que la reacción comprime transversalmente la armadura.

La fórmula [44.26] es más tolerante que la [44.25] y creemos que suficientemente segura, ya que parte de aceptar una cierta redistribución cuando se dispone una longitud adicional  $\ell_a$ .

La condición [44.26], que es la que adoptamos, en definitiva no modifica la cantidad requerida de armadura, sino solamente su distribución en diámetros, limitando el empleo de diámetros excesivamente gruesos.

#### 44.6 ANCLAJE DE LA ARMADURA TRANSVERSAL

##### a) Barras dobladas (fig. 44-23)

Cuando una barra en tracción se dobla y se pasa a la cara opuesta comprimida, cortándose en ella, la longitud de anclaje  $AB = \ell_{b,net}$  se cuenta a partir del punto A correspondiente a la mitad del canto. Como dijimos en 44.4.c) la determinación del factor de corrección  $k_{b1}$  para el cálculo de  $\ell_{b,net}$  se hace igualándolo a la relación del área necesaria por cortante al área real de la barra.

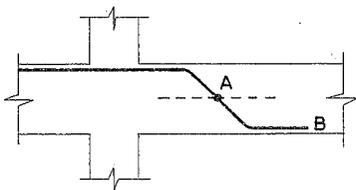


Figura 44-23

##### b) Estribos

La forma de las patillas y ganchos en estribos se indicaron en 39.2.5 así como sus condiciones de anclaje.

<sup>1</sup> La ley de momentos es, en este caso, la real y no la trasladada  $k_1 d$ .

#### 44.7 ANCLAJE DE ARMADURAS EN TRACCIÓN DE PILARES

Como ya dijimos en 44.4 g), el caso de nudo extremo en última planta corresponde a una situación de solapo y se verá en 44.17. Análogamente, las transiciones en plantas intermedias corresponden también a casos de solapo.

Un caso a considerar es, en cambio, el indicado en la figura 44-24. Si alguna barra está en tracción, como se termina en patilla como mínimo, por razones constructivas, llamando  $\ell_{b,net}$  la correspondiente a Posición I, se tiene:

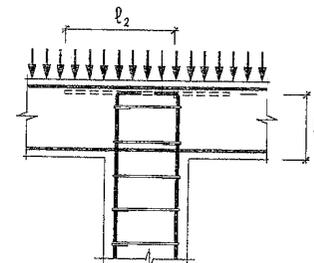


Figura 44-24

- Si  $0,7 \ell_{b,net} \leq \ell_1$ : Anclaje por patilla normalizada.
- Si  $0,7 \ell_{b,net} > \ell_1$ :

$$\ell_2 \approx 1,4 (\ell_{b,net} - \ell_1) \quad [44.27]$$

#### 44.8 LONGITUD BÁSICA DE ANCLAJE DE BARRAS COMPRIMIDAS

La Instrucción EHE establece las mismas que para el caso de tracción<sup>2</sup>.

#### 44.9 LONGITUD NETA DE ANCLAJE DE BARRAS COMPRIMIDAS. FACTORES DE CORRECCIÓN

A la longitud básica de anclaje deben aplicársele los factores de corrección que a continuación se indican. En este caso, no se incluye el factor de corrección por la existencia de patilla debido a que ni la patilla ni cualquier prolongación que pudiera añadirse a continuación de la patilla son eficaces para el anclaje de barras comprimidas.

- 1 La fórmula [44.27] está deducida de forma análoga a la [44.15].
- 2 Bastantes Normas emplean longitudes de anclaje más cortas en compresión que en tracción y ello es lógico. En el caso de compresión, no existe el efecto perturbador de la fisuración y el efecto Poisson incrementa el diámetro de la armadura, lo que favorece la adherencia, a lo que se suma el efecto de apoyo en punta de la barra.

a) *Factor de corrección por armadura superabundante*

Si en la sección donde la barra deja de ser necesaria el área real de armadura  $A'_{s,real}$  es superior a la estrictamente necesaria,  $A'_{s,nec}$ , la longitud básica debe multiplicarse por el coeficiente

$$k'_{b1} = \frac{A'_{s,nec}}{A'_{s,real}} \quad [44.28]$$

b) *Factor de corrección en función del porcentaje de armadura cortado en la sección de piezas sometidas a flexión.*

Por los mismos motivos expuestos en 44.3.c), la longitud básica de anclaje debe multiplicarse por el coeficiente

$$k'_{b3} = (1 - \alpha) \quad [44.29]$$

donde  $\alpha$  es la fracción de la armadura total que se ancla a partir de la sección considerada.

c) *Longitud neta de anclaje de barras comprimidas*

La longitud neta de anclaje de barras comprimidas viene dada por

$$\ell'_{b,net} = \ell'_b k'_{b1} k'_{b3} \quad [44.30]$$

En la fórmula [44.30] se incluirán solamente los valores  $k'_{bi}$  que correspondan.

d) *Longitudes mínimas absolutas de anclaje*

Por análogas razones que en el caso expuesto en 44.3.e), la longitud neta [44.30] no será en ningún caso inferior a  $0,3 \ell_y$  ni a  $10 \phi$  ni a  $150 \text{ mm}$ <sup>1</sup>.

#### 44.10 ANCLAJE DE ARMADURAS COMPRIMIDAS EN PILARES

No es frecuente que en pilares de edificación se corten armaduras en puntos de la pieza diferentes de los extremos, pero se hace a veces, especialmente en pilares importantes de naves industriales y obras públicas, libres o articulados en un extremo, en los que la cantidad de armadura es considerable y su necesidad varía fuertemente a lo largo de la longitud del pilar. En este caso es de aplicación el coeficiente  $k'_{b3}$  expuesto en 44.9.b), y, al regir también lo dicho en 44.4.a), los puntos de corte consecutivos deben distanciarse un mínimo igual a  $\ell'_{b,net}$ <sup>2</sup>.

1 De nuevo, EHE no indica nada sobre armadura transversal en la zona de anclaje. El EUROCÓDIGO EC-2 indica, para este caso también, un área mínima de armadura transversal igual al 25% del área de la más gruesa de las barras ancladas, pero la distribución de esta armadura debe seguir lo indicado en la figura 44-39 b) para solapes.

2 Es tema muy opinable si en pilares la ley de momentos debe desplazarse la fracción  $k_1 d$ . En nuestra opinión, no, salvo caso de flexiones claramente dominantes, con esfuerzos cortantes también importantes.

Dos casos de anclaje de barras comprimidas, que requieren especial consideración, son los indicados en la figura 44.25.

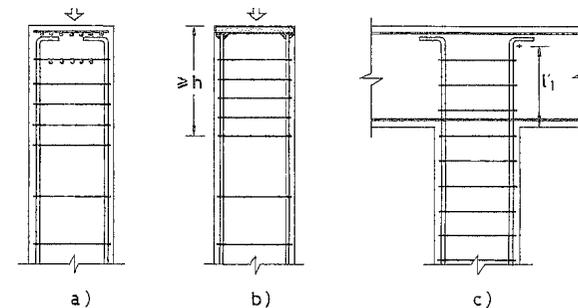


Figura 44-25

El caso de la figura 44-25 a) corresponde a una carga localizada que incide directamente en la cabeza superior libre de un pilar. En primer lugar, será necesario disponer uno o varios emparrillados de armadura transversal para resistir el efecto de la carga localizada, de acuerdo con lo que veremos en el capítulo 60. En segundo lugar, en secciones que disten de la extremidad superior de la armadura menos que  $\ell'_{b,net}$ , la armadura no está todavía totalmente anclada y, por lo tanto, su aportación a la resistencia del pilar no es la teóricamente esperable. Varias disposiciones pueden conducir, aislada o conjuntamente, a la solución del problema.

- Disponer armadura holgada, en el tramo de longitud  $\ell'_{b,net}$ .
- Reducir el diámetro y aumentar el número de barras de la armadura longitudinal.
- Disponer, en la longitud  $\ell'_{b,net}$ , estribos del mismo diámetro que los dispuestos en el resto del pilar, pero a separación  $3 \phi_{min}$ , siendo  $\phi_{min}$  el diámetro de la más fina de las armaduras longitudinales. (Esto permite acortar  $\ell'_{b,net}$  en un 30%, aproximadamente). El hormigonado debe ser especialmente cuidadoso.

Otra solución alternativa (fig. 44-25 b)) es disponer en la cabeza del pilar una chapa metálica (que deberá tener un orificio de 100 ó 150 mm de diámetro para la introducción y vibrado del hormigón, si el hormigonado se realiza en posición vertical), soldada a la armadura longitudinal. De esta forma, la colaboración de las barras longitudinales es prácticamente completa desde el principio. Se sugiere la conveniencia de disponer estribos a separación  $\frac{h}{5} \leq 50 \text{ mm}$ , en una longitud igual a  $h$ , siendo  $h$  la menor dimensión de la sección transversal del pilar.

El caso indicado en la figura 44-25 c) corresponde a un nudo intermedio en última planta<sup>1</sup>. El canto de la pieza debe ser tal que  $\ell'_1$  sea igual o superior a  $\ell'_{b,net}$ . De otra forma, en una sección del pilar poco por debajo de la cara inferior de la viga, las armaduras, al no haber terminado su anclaje, no serían plenamente eficaces. Si el canto

1 Deben disponerse patillas, aunque no sean aquí eficaces para el anclaje, con el fin de evitar el "apoyo en punta" de las barras.

de la viga no puede ser el necesario, varias disposiciones, conjunta o aisladamente aplicadas, pueden contribuir a solucionar el problema. Dichas soluciones son las designadas anteriormente como a), b) y c) para el caso indicado en la figura 44-30 a). *Debe prestarse especial atención a este punto en el caso de empleo de vigas planas.* (Véase el Capítulo 59).

#### 44.11 ANCLAJE DE ARMADURAS DE ESPERA EN LOS CIMIENTOS

El caso de la armadura de espera, en cuanto a su anclaje en los cimientos, requiere también consideración especial. Supongamos (fig. 44-26) un pilar que, respecto al cimiento, no sea de borde ni de esquina. De acuerdo con la Instrucción EHE, la longitud recta de anclaje  $l'_1$  deberá cumplir la condición

$$l'_1 \geq l_{b,net} \quad [44.31]$$

Si la armadura del pilar es de diámetro medio o grueso, la condición [44.31] puede ser condicionante en el canto mínimo del cimiento, obligando a aumentar el necesario por el propio dimensionamiento de la zapata a flexión, corte y punzonamiento. Naturalmente, cualquier intento de prolongar la armadura en dirección horizontal es inútil, ya que suponemos que estamos en un anclaje de barras comprimidas<sup>1</sup>. La única solución práctica, para no aumentar innecesariamente el canto del cimiento, es disponer un número de barras de espera mayor que el de barras del pilar, pudiéndose llegar a tres barras de espera por barra de pilar. Esto permite reducir el diámetro de las esperas y, por lo tanto, su longitud de anclaje  $l_{b,net}$ <sup>2</sup>.

Sin embargo, lo anterior pasa inadvertido con frecuencia, con incumplimientos a veces importantes y no existen noticias de problemas patológicos en relación con este aspecto.

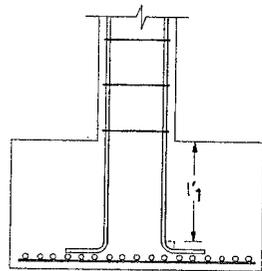


Figura 44-26

En teoría, si  $l'_1$  es inferior a  $l_{b,net}$  en secciones de pilar situadas por encima y próximas a la cara superior del cimiento, la armadura no sería todavía eficaz plenamente al no haber desarrollado la longitud de anclaje completa y, por lo tanto, en esa sección el hormigón estaría más solicitado de lo debido.

1 La disposición de patillas obedece exclusivamente a la necesidad de dotar de estabilidad durante el hormigonado al conjunto de armaduras de espera, atándolo al emparillado del cimiento.

2 Véase J. CALAVERA, "Cálculo de Estructuras de Cimentación" (44.7).

Sin embargo, la situación real difiere de la teórica de manera considerable y debe pensarse que las longitudes de anclaje de la Instrucción están pensadas para las peores condiciones existentes en la práctica, probablemente la de las barras de esquina en pilares o vigas con recubrimientos escasos en dos direcciones. Las barras del caso que estamos analizando, en su longitud de anclaje en el cimiento están rodeadas por amplias zonas de hormigón, de forma que el hormigón directamente solicitado por las tensiones de anclaje está confinado por el hormigón que le rodea. Esto conduce a que los requisitos reales de anclaje sean bastante menores que los establecidos en EHE con carácter general.

El tema ha sido investigado por RODRÍGUEZ LÓPEZ (44.8)<sup>1</sup> mediante ensayo de zapatas rígidas y flexibles con diferentes diámetros de armadura. Las conclusiones alcanzadas permiten establecer que, en el caso de zapatas y en general en cimientos, la longitud de anclaje de las armaduras de espera puede ser  $\frac{2}{3}l_b$ , siendo  $l_b$  el valor dado por [44.1] de acuerdo con EHE. Lo anterior no es válido para armaduras de caras exteriores de pilares de borde o de esquina, que han de regirse por la fórmula general.

Si la barra considerada está siempre en tracción, es válida la solución de su prolongación horizontal para conseguir la longitud  $l_{b,net}$ , calculándose la longitud suplementaria  $l'_2$  (fig. 44-27) a partir de  $l_{b,net}$  en Posición I con las mismas fórmulas que expusimos en 44.7.

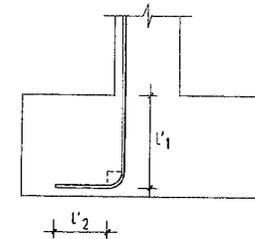


Figura 44-27

#### 44.12 REQUISITOS ESPECIALES DE ANCLAJE PARA LOS GRUPOS DE BARRAS

De acuerdo con EHE, cuando todas las barras del grupo dejan de ser necesarias en el mismo punto, su longitud de anclaje será

$$\left. \begin{array}{l} 1,3 l_{b,net} \text{ para grupos de dos barras} \\ 1,4 l_{b,net} \text{ para grupos de tres barras} \\ 1,6 l_{b,net} \text{ para grupos de cuatro barras} \end{array} \right\} [44.32]$$

1 "Investigación experimental de las longitudes de anclaje de las armaduras de los pilares de hormigón armado en los cimientos". Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de J. CALAVERA en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, 1987. (44.8).

Si las barras del grupo dejan de ser necesarias en secciones diferentes, a cada barra se le dará la longitud de anclaje que le corresponda según el siguiente criterio (fig. 44-28).

- 1,2  $\ell_{b,net}$ , si continúa una barra
- 1,3  $\ell_{b,net}$ , si continúan dos barras
- 1,4  $\ell_{b,net}$ , si continúan tres barras

Recuérdese que, entre puntos de corte consecutivos, debe haber una distancia mínima de  $\ell_{b,net}$ .

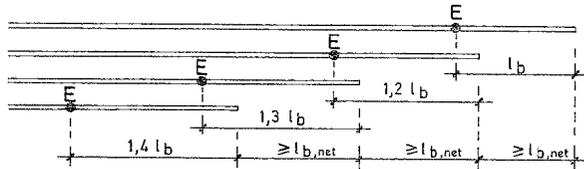


Figura 44-28

#### 44.13 ANCLAJE DE MALLAS ELECTROSOLDADAS DE ALAMBRE CORRUGADO

La longitud de anclaje se determina de acuerdo con la fórmula [44.13], adoptando los valores de la Tabla T-44.1.

Si en la zona de anclaje existe al menos una barra transversal soldada, la longitud  $\ell_{b,net}$  puede reducirse en un 30%. Debe cuidarse que la barra transversal esté a una distancia no inferior a 50 mm del principio del anclaje.

Si se emplean barras dobles, de acuerdo con [44.32],  $\ell_{b,net}$  se aumentará en el 30%.

En todo caso, la longitud de anclaje no será inferior al mayor de los valores siguientes:

- 0,3  $\ell_b$
- 10  $\phi$  (para barras dobles  $\phi_e = \phi \sqrt{2}$ )
- 150 mm

#### 44.14 REGLAS DE ANCLAJE DEL MODEL CODE 90

Es, probablemente, la Norma que trata con mayor detalle el tema. En lugar de lo expuesto en 44.2 para EHE, el MODEL CODE establece lo siguiente:

##### 44.14.1 REGLAS PARA BARRAS Y ALAMBRES

###### a) DEFINICIÓN DE LA TENSIÓN DE CÁLCULO DE ADHERENCIA.

El valor viene dado por

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} \quad [44.33]$$

donde  $f_{ctd} = \frac{f_{ctk,min}}{1,50}$  es el valor de cálculo de la resistencia a tracción.

Los valores de  $\eta$  son los que siguen:

- $\eta_1$  (Coeficiente dependiente del tipo de armadura)
    - $\eta_1 = 1,4$  para alambres y barras grafiladas.
    - $\eta_1 = 2,25$  para barras corrugadas.
  - $\eta_2$  (Coeficiente dependiente de la posición de la barra decreciente al hormigonado).
    - $\eta_2 = 1$  para barras en posición I de adherencia.
    - $\eta_2 = 0,7$  para barras en posición II de adherencia.
- y para barras en elementos estructurales hormigonados con encofrado deslizando.
- $\eta_3$  (Coeficiente dependiente del diámetro de la barra).

$$\eta_3 = 1,0 \text{ para } \phi \leq 32 \text{ mm}$$

$$\eta_3 = \frac{132 - \phi}{100} \text{ para } \phi > 32 \text{ mm}$$

( $\phi$  en mm)

###### b) LONGITUD BÁSICA DE ANCLAJE

Viene definida por la expresión que ya expusimos en [43.5], válida ahora porque es coherente con el valor de  $f_{bd}$  indicado por [44.33].

$$\ell_b = \frac{\phi}{h} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \quad [44.34]$$

###### c) LONGITUD DE ANCLAJE DE CÁLCULO

La longitud de anclaje de cálculo  $\ell_{b,net}$ , viene definida por

$$\ell_{b,net} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \cdot \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \cdot \ell_b \geq \ell_{b,min} \quad [44.35]$$

- $\alpha_1$  es un coeficiente dependiente de la forma de la barra en la zona de anclaje (Ver Tabla T-44.2).
- $\alpha_2$  es un coeficiente que tiene en cuenta la existencia de armaduras transversales soldadas en la longitud de anclaje, con diámetro superior al 60% del de la barra que se ancla (Véase más adelante una ampliación de este tema en 44.15.1).

- $\alpha_3$  es un coeficiente que tiene en cuenta el grado de confinamiento producido por el hormigón que rodea la barra.
- $\alpha_4$  es un coeficiente que tiene en cuenta el grado de confinamiento producido por la armadura transversal.
- $\alpha_5$  es un coeficiente que tiene en cuenta la presión ortogonal al eje de la barra, debida a reacciones de apoyo, cargas aplicadas, etc., dentro de la longitud de anclaje.
- $\ell_b$  viene dado por [44.34].
- $\ell_{b, min}$  es un valor mínimo introducido por las razones ya explicadas al tratar del anclaje según EHE, y cuyo valor en este caso es

- Barras en tracción. El máximo de 
$$\begin{cases} 0,3\ell_b \\ 10 \phi \\ 100 \text{ mm} \end{cases} \quad [44.36]$$

- Barras en compresión. El máximo de 
$$\begin{cases} 0,6\ell_b \\ 10 \phi \\ 100 \text{ mm} \end{cases} \quad [44.37]$$

El producto  $\alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5$  debe cumplir las limitaciones siguientes:

Para barras corrugadas  $\alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 \geq 0,7$ .

Para alambres o barras grafiladas  $\alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5 = 1$ .

Los valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  y  $\alpha_5$  vienen dados por la Tabla T-44.2.

**TABLA T-44.2**  
Coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

Factor de influencia	Tipo de anclaje	Barra de armado	
		en tracción	en compresión
Forma de las barras	—	$\alpha_1 = 1,0$	$\alpha_1 = 1,0$
		$\alpha_1 = 0,7^{(a)}$	$\alpha_1 = 1,0$
Barras soldadas transversales		$\alpha_2 = 0,7$	$\alpha_2 = 0,7$
Confinamiento por hormigón	—	$\alpha_1 = 1 - 0,15 \frac{c_d - \phi}{\phi} \begin{cases} \geq 0,7 \\ \leq 1,0 \end{cases}$	$\alpha_3 = 1,0$
		$\alpha_1 = 1 - 0,15 \frac{c_d - 3\phi}{\phi} \begin{cases} \geq 0,7 \\ \leq 1,0 \end{cases}$	$\alpha_3 = 1,0$
Confinamiento por armado transversal no soldado		$\alpha_4 = 1 - k\lambda^{(b)} \begin{cases} \geq 0,7 \\ \leq 1,0 \end{cases}$	$\alpha_4 = 1,0$
Confinamiento por presión transversal		$\alpha_4 = 1 - 0,04p \begin{cases} \geq 0,7 \\ \leq 1,0 \end{cases}$	

a) Si  $c_d > 3 \phi$ ; en caso contrario,  $\alpha_1 = 1,0$ .

b) 
$$\lambda = \frac{\sum A_{st} - \sum A_{st, min}}{A_s}$$

Los valores de  $C_d$  empleados en la tabla se definen en la figura 44-29.

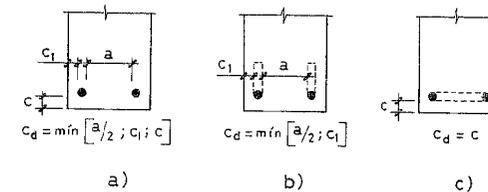


Figura 44-29

La figura 44-30 indica los requisitos que deben cumplir las barras transversales soldadas.

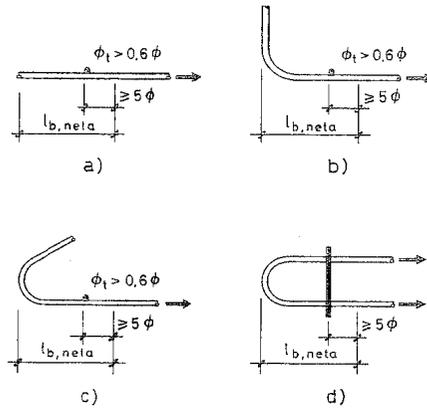


Figura 44-30

En la Tabla T-44.2 se emplean las notaciones siguientes:

$\Sigma A_{st}$  = área de la sección de armadura transversal existente en la longitud  $l_{b,net}$

$\Sigma A_{st,min}$  = área de la sección transversal mínima permitida que es igual a  $0,25 A_s$  para vigas y a  $0$  para losas, placas y forjados ( $A_s$  es el área de la barra individual anclada de mayor diámetro).

$K$  = Coeficiente indicado en la figura 44-31.

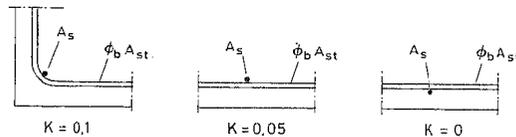


Figura 44-31

$p$  = presión transversal, en MPa, en estado límite último, ortogonal al eje de la barra en la zona de anclaje.

La armadura transversal debe disponerse uniformemente repartida dentro de la longitud de anclaje, en el caso de barras en tracción.

En el caso de barras en compresión, debe disponerse también uniformemente repartida, pero en la longitud  $l_{b,net} + 4 \phi$  y al menos una barra transversal debe estar en la zona de longitud  $4 \phi$ .

En ambos casos, una de las barras transversales debe siempre colocarse en la zona del gancho, barra doblada o cerco si existen.

#### 44.14.2. REGLAS PARA MALLAS CON ALAMBRES O BARRAS CORRUGADAS.

La longitud de anclaje básica se calcula como en el caso de barras, con el número mínimo de barras especificado en 44.13.1.

En el caso de mallas con alambres lisos o grafilados, el cálculo puede hacerse de la misma forma, pero el número mínimo de cruces soldadas existentes en la longitud de anclaje será

$$n = 4 \cdot \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \quad [44.38]$$

#### 44.14.3. REGLAS DE ANCLAJE MECÁNICO MEDIANTE SOLDADURA EN PERFILES METÁLICOS

El tema está recogido en el Manual de Ferralla (44.10) y en la Norma UNE 3683 (44.25).

La figura 44-32 resume las soluciones más frecuentes.

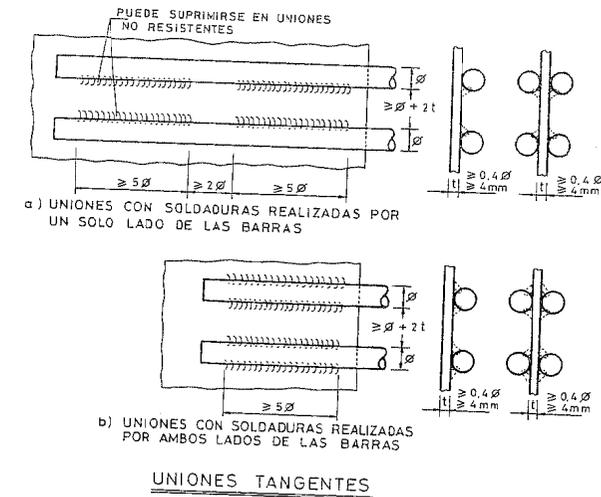


Figura 44-32.1

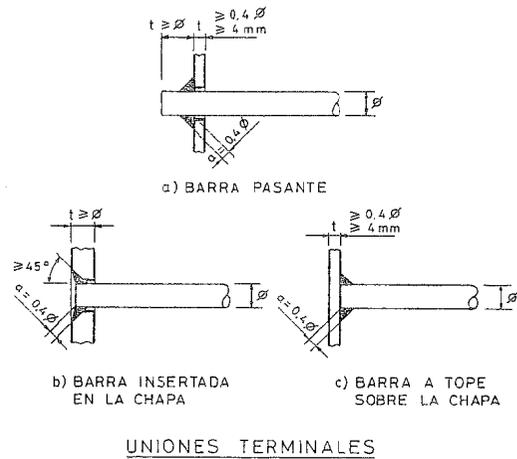


Figura 44-32.2

Debe cuidarse el no emplear soluciones no experimentadas o que han sido experimentadas y se han revelado como inefectivas. A título de ejemplo, la solución a) de la Figura 44-33, ya investigada por INTEMAC en 1974 y las derivadas de las Figuras 44-33 b y c, no son válidas, ya que con cualquier radio de doblado aceptable en la práctica, las presiones sobre el hormigón lo plastifican, la barra experimenta corrimientos apreciables y adopta la forma de trazos y los cordones de soldadura se ven solicitados por tracciones muy fuertes en  $M$  que los van desgarrando progresivamente. La Fig. 44-32 contiene soluciones válidas para este tipo de anclaje.

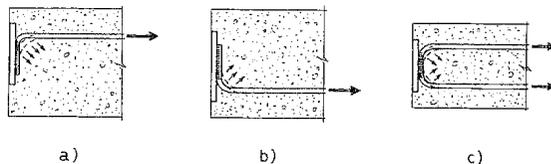


Figura 44-33

#### 44.15 ANCLAJES MECÁNICOS

Puede emplearse cualquier tipo de anclaje mecánico que haya demostrado su eficacia mediante los ensayos correspondientes.

#### 44.15.1 REGLAS DE ANCLAJE CON BARRAS TRANSVERSALES SOLDADAS<sup>1</sup>.

Este tema es de sumo interés en cuanto a anclaje, para el uso racional de las armaduras. En ocasiones se dispone de poco espacio para anclar los extremos de las barras por adherencia. Una solución es soldar en dirección transversal a la barra o barras longitudinales a anclar, barras transversales existentes, o trozos de barra dispuestos expresamente para ejecutar la unión por cruz soldada.

Esta solución se usa con frecuencia simplemente por el ahorro que supone la supresión de la longitud de barra necesaria para el anclaje por adherencia.

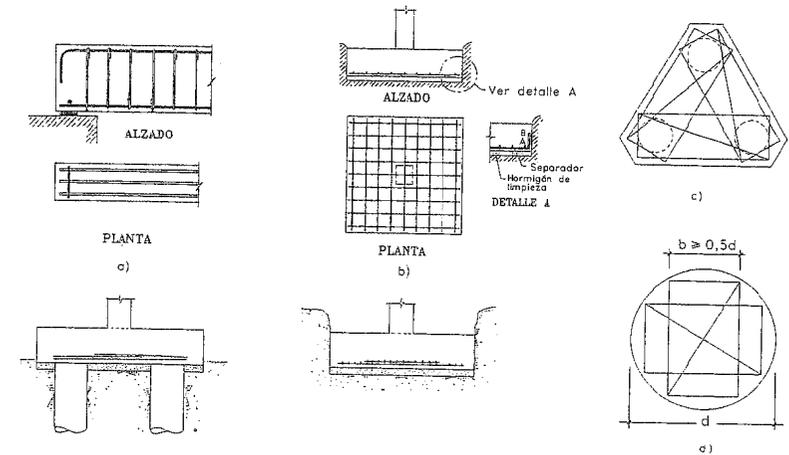


Figura 44-34

La figura 44-34 muestra dos ejemplos típicos. En la figura 44-34 b) el anclaje de la barra por soldadura de la transversal extrema permite ahorrar la longitud AB, es decir, que se trata de un caso en que la soldadura transversal se realiza, no por razones de imposibilidad de la prolongación de la barra a anclar, sino por la ventaja económica que el sistema presenta. La figura 44-34 c) indica una aplicación simple y muy económica de los paneles soldados en encepados de pilotes y la 44-34 d) un sistema de zapatas circulares de excavación mecanizada, resuelto con dos paneles soldados iguales, sin ninguna armadura adicional.

El tema ha sido investigado experimentalmente en varios países y los resultados se resumen a continuación<sup>2</sup>.

- 1 El texto que sigue coincide sensiblemente con los textos de J.CALAVERA "ARMADURAS PASIVAS PARA HORMIGON ESTRUCTURAL. RECOMENDACIONES SOBRE EL PROYECTO, DETALLE, ELABORACION Y MONTAJE" Cuadernos Técnicos 1. CALIDAD SIDERÚRGICA; Madrid 1997 (44.9) y con lo citado en el "MANUAL DE FERRALLA" de J. CALAVERA; E. GONZÁLEZ VALLE; J. FERNÁNDEZ GÓMEZ; F. VALENCIANO; ANIFER. Madrid 1998 (44.10).
- 2 Las fórmulas que siguen están basadas fundamentalmente en investigaciones realizadas por empresas constructoras y empresas de ferralla en laboratorios finlandeses. Deben destacarse los trabajos de Statens Tekniska Forskingscentral y los de Pekka Nykyri (44.11). Estos trabajos han sido incluidos como Anejo en la versión final de la Parte 3 del Eurocódigo EC-2. (Concrete Foundations). (44.12).

• Barras con  $16 \leq \phi \leq 32$  mm

El valor de cálculo de la capacidad de anclaje de una unión transversal soldada, viene dado por la fórmula

$$F_{btd} = L_{td} \cdot \phi_T \sigma_{TD} \leq F_{wd} \quad [44.39]$$

donde:

$F_{btd}$  = Valor de cálculo de la capacidad de anclaje de la unión transversal soldada.

$$L_{TD} = 1,16 \phi_T \sqrt{\frac{f_{yd}}{\sigma_{Td}}} \leq L_T \quad [44.40]$$

$L_T$  = Longitud de la barra transversal. No se tomará para  $L_T$  un valor superior a la separación entre las barras paralelas que se anclan.

$\phi_T$  = Diámetro de la barra transversal.

$$\sigma_{TD} = \frac{f_{id0,5} + \sigma_c}{y} \leq 3 f_{cd} \quad [44.41]$$

$f_{id0,05}$  = Valor de cálculo de la resistencia característica a tracción del hormigón que rodea a la unión soldada. Se toma con signo positivo.

$f_{cd}$  = Valor de cálculo de la resistencia a compresión del hormigón.

$\sigma_c$  = Tensión de compresión en el hormigón en sentido normal a los ejes de ambas barras (positiva si es compresión).

$y$  =  $0,015 + 0,14 e^{(-0,18 \cdot x)}$

$$x = 2 \frac{c}{\phi_T} + 1 \quad [44.42]$$

$c$  = Recubrimiento en la dirección perpendicular a los ejes de ambas barras.

$F_{wd}$  = Resistencia garantizada para la unión soldada.

En la figura 44-35 se muestra de forma gráfica lo anterior.

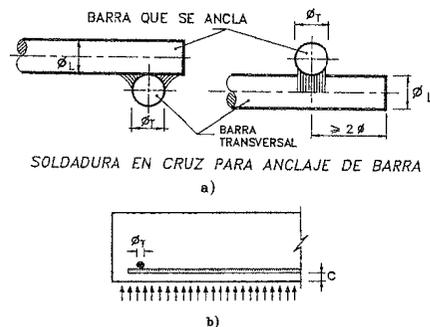


Figura 44-35

Si se sueldan dos barras transversales sobre lados opuestos de la longitudinal, la capacidad de anclaje, calculada mediante la fórmula anterior, se duplica (figura 44-36 a)). En cambio, si se sueldan dos barras transversales paralelas a separación mínima de  $3 \phi_T$  la capacidad se multiplica por 1,4 (figura 44-36 b)).

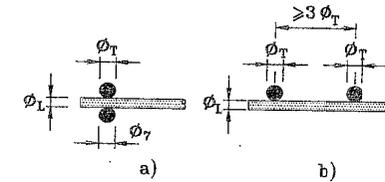


Figura 44-36

Barras con  $\phi \leq 12$  mm

La capacidad de una unión transversal soldada, dentro de la masa de hormigón, que es como mínimo superior en un 25 % a la de la resistencia de la unión soldada en el ensayo habitual de unión desnuda. (Ensayo de arrancamiento).

El valor de cálculo de la capacidad de anclaje de una unión transversal soldada, viene dado por la fórmula

$$F_{bTD} = 1,25 F_{wd} \leq 16 A_s \cdot f_{cd} \frac{\phi_T}{\phi_L} \quad [44.43]$$

donde la mínima longitud de la barra transversal debe ser  $7 \phi_T$  y:

$F_{wd}$  = Valor garantizado de la resistencia de la unión soldada.

$\phi_T$  = Diámetro de la barra transversal  $\leq 12$  mm, con longitud mínima  $7 \phi_T$ .

$\phi_L$  = Diámetro de la barra que se ancla  $\phi \leq 12$  mm.

Si se sueldan dos barras transversales (figura 44-37) a separación mínima de  $4 \phi_T$ , la capacidad mecánica dada por la fórmula se multiplica por 1,4.

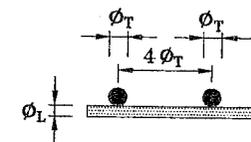
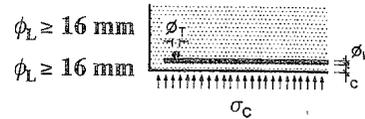


Figura 44-37

Las Tablas T-42.3 y T-42.4 que siguen proporcionan directamente la capacidad de anclaje en todos los casos prácticos, para diversos casos de presión  $\sigma_c$  de cálculo, ortogonal al plano paralelo a los ejes de las dos barras. Por supuesto, si existe presión  $\sigma_c$ , apreciable por ejemplo en zapatas e importante en encepados, la capacidad de anclaje mejora considerablemente.

TABLA T-44.3

CAPACIDAD DE ANCLAJE DE UNA UNIÓN TRANSVERSAL SOLDADA,  
EN % DE  $A_s f_{yd}$  DE LA BARRA LONGITUDINAL



La máxima resistencia considerada en la soldadura es un 50% de  $A_s f_{yd}$  de la barra longitudinal

$f_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T/\phi_L$ (mm)	$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )						
	0	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0
16/16	26%	30%	35%	39%	45%	50%	50%
20/20	22%	26%	29%	33%	40%	50%	50%
25/25	19%	22%	26%	29%	35%	47%	50%
32/32	17%	20%	23%	25%	31%	44%	50%

$f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T/\phi_L$ (mm)	$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )						
	0	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0
16/16	29%	33%	38%	42%	47%	50%	50%
20/20	24%	28%	32%	35%	43%	50%	50%
25/25	21%	24%	28%	31%	37%	48%	50%
32/32	19%	22%	24%	27%	33%	45%	50%

$f_{ck} = 35 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T/\phi_L$ (mm)	$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )						
	0	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0
16/16	32%	36%	40%	44%	48%	50%	50%
20/20	27%	31%	34%	38%	44%	50%	50%
25/25	23%	27%	30%	33%	39%	49%	50%
32/32	21%	23%	26%	29%	35%	46%	50%

$f_{ck} = 40 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T/\phi_L$ (mm)	$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )						
	0	0,2	0,4	0,5	1,0	2,0	3,0
16/16	35%	39%	43%	45%	49%	50%	50%
20/20	29%	33%	37%	40%	45%	50%	50%
25/25	26%	29%	32%	35%	42%	50%	50%
32/32	23%	25%	28%	31%	37%	47%	50%

$f_{ck} = 45 \text{ N/mm}^2$

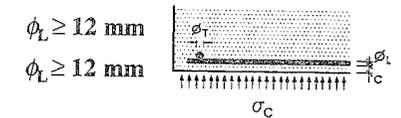
$\phi_T/\phi_L$ (mm)	$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )						
	0	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0
16/16	38%	42%	45%	47%	50%	50%	50%
20/20	32%	35%	39%	43%	46%	50%	50%
25/25	28%	31%	34%	37%	43%	50%	50%
32/32	24%	27%	30%	33%	38%	47%	50%

$f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T/\phi_L$ (mm)	$\sigma_c$ (N/mm <sup>2</sup> )						
	0	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0
16/16	40%	44%	46%	49%	50%	50%	50%
20/20	34%	38%	42%	44%	47%	50%	50%
25/25	30%	33%	36%	39%	44%	50%	50%
32/32	26%	29%	32%	35%	40%	48%	50%

TABLA T-44.4

CAPACIDAD DE ANCLAJE DE UNA UNIÓN TRANSVERSAL SOLDADA,  
EN % DE  $A_s f_{yd}$  DE LA BARRA LONGITUDINAL



La máxima resistencia considerada en la soldadura es un 50% de  $A_s f_{yd}$  de la barra longitudinal

$f_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T$ (mm)	$f_L$ (mm)			
	6	8	10	12
6	48%	36%	29%	24%
8	50%	48%	38%	32%
10	50%	50%	48%	40%
12	50%	50%	50%	48%

$f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T$ (mm)	$f_L$ (mm)			
	6	8	10	12
6	50%	43%	35%	29%
8	50%	50%	46%	38%
10	50%	50%	50%	48%
12	50%	50%	50%	50%

$f_{ck} = 35 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T$ (mm)	$f_L$ (mm)			
	6	8	10	12
6	50%	50%	40%	34%
8	50%	50%	50%	45%
10	50%	50%	50%	50%
12	50%	50%	50%	50%

$f_{ck} = 40 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T$ (mm)	$f_L$ (mm)			
	6	8	10	12
6	50%	50%	46%	38%
8	50%	50%	50%	50%
10	50%	50%	50%	50%
12	50%	50%	50%	50%

$f_{ck} = 45 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T$ (mm)	$f_L$ (mm)			
	6	8	10	12
6	50%	50%	50%	43%
8	50%	50%	50%	50%
10	50%	50%	50%	50%
12	50%	50%	50%	50%

$f_{ck} = 50 \text{ N/mm}^2$

$\phi_T$ (mm)	$f_L$ (mm)			
	6	8	10	12
6	50%	50%	50%	43%
8	50%	50%	50%	50%
10	50%	50%	50%	50%
12	50%	50%	50%	50%

### EJEMPLO 44.1

Detallar los anclajes del nudo indicado en la figura 44-38. El hormigón de la estructura es H-25. Acero B500 S. La armadura estrictamente necesaria para momentos negativos es de  $385 \text{ mm}^2$  y el esfuerzo cortante en el apoyo es  $V_d = 190 \text{ kN}$ . Los pilares, en su enlace con el nudo, tienen toda la sección en compresión.  $\gamma_s = 1,15$ . Se supone que los  $2 \phi 20$  son estrictamente necesarios.

Realizar el cálculo de acuerdo con EHE.

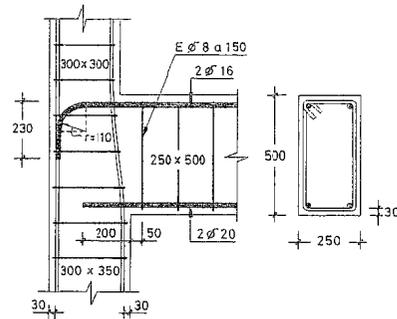


Figura 44-38

### SOLUCIÓN

#### a) Armadura de momentos negativos:

Corresponde al primero de los casos analizados en 44.4 f). Calculemos, en primer lugar, la longitud básica para Posición II, H-25 y B500S, que resulta

$$\ell_b = 1,4 \cdot 14 \phi^2 = 1,4 \cdot 14 \cdot 1,6^2 = 50 \text{ cm}$$

$$k_{b1} = \frac{3,85}{4,02} = 0,96$$

$k_{b2} = 1$  (por el momento, suponemos anclaje por prolongación recta).

$k_{b3} =$  no rige por tratarse de un apoyo.

$$\ell_{b,net} = 500 \cdot 0,96 = 480 \text{ mm}$$

Como  $\ell_j = 300 - 30 = 270 \text{ mm} < \ell_{b,net}$ , corresponde prolongar la armadura en vertical en una longitud dada por [44.15].

$$\ell_2 = 0,7(480 - 270) + 4 \cdot 16 = 210 \text{ mm}$$

El radio de doblado no debe ser inferior (Ver Capítulo 51) a  $10 \phi$

$$r = 10 \cdot 16 = 160 \text{ mm}$$

#### b) Armadura de momentos positivos

Estamos en el caso segundo del apartado 44.5.c) y, por lo tanto, debe aplicarse la fórmula 44.21. Como en este caso  $\frac{M_d}{0,9d} = 385 \cdot \frac{400}{1,15} = 133913 \text{ N}$

$$T_1 = \left( 190.000 - 3,85 \frac{400}{1,15} \right) \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \right]$$

Como

$$\lambda \frac{V_{su}}{V_d} = \frac{V_d - V_{cu}}{V_d} = \frac{190.000 - 0,10 \left( 1 + \sqrt{\frac{200}{470}} \right) \left( 100 \frac{385}{470.250} \cdot 25 \right) 1 / 3 \cdot 250 \cdot 470}{190.000}$$

$$\lambda = 0,79$$

$$T_1 = 33.933 \text{ N}$$

$$\ell_b = 14 \phi^2 = 14 \cdot 2^2 = 560 \text{ mm}$$

$$k_{b1} = 1$$

$k_{b2} = 1$  (suponemos, por el momento, anclaje recto).

$k_{b3} =$  no rige por tratarse de un apoyo

Por tanto

$$\ell_{b,net} = \ell_b = 560 \text{ mm}$$

De acuerdo con [44.24].

$$\ell_{b,net} = 560 \cdot \frac{33.933}{385 \cdot \frac{400}{1,15}} = 142 \text{ mm}$$

Rige por tanto el mínimo de  $10\phi = 200 \text{ mm}$ .

Una comprobación adicional que debe realizarse es la expuesta en 44.5 e).

$$\ell_{b,net} = 560 \leq 1,3 \frac{M_u}{190.000} + 200$$

El valor de  $M_u$ , con  $A_s = 2 \phi 20$ .

$$\omega = \frac{2 \cdot 314 \cdot \frac{400}{1,15}}{\frac{25}{1,5} \cdot 250 \cdot 470} = 0,11$$

a lo que, con el ábaco GT-82, corresponde  $\mu = 0,11$ .

$$M_u = 0,11 \cdot \frac{25}{1,5} \cdot 250 \cdot 470^2 = 101 \cdot 10^6 \text{ mm} \cdot \text{N}$$

y sustituyendo, se cumple [44.26].

$$560 \leq 1,3 \cdot \frac{101 \cdot 10^6}{190.000} + 200 = 891 \text{ mm}$$

#### 44.16 EMPALMES. CONCEPTOS BÁSICOS

La necesidad de los empalmes surge de dos orígenes diferentes. Por un lado, de la longitud comercial de las barras, que es de 12 m y, por otro, de necesidades constructivas en cuanto al montaje de la ferralla.

Los procedimientos de empalme actualmente existentes pueden clasificarse en tres grandes grupos:

- Empalmes por solapo.
- Empalmes por soldadura.
- Empalmes por manguito.

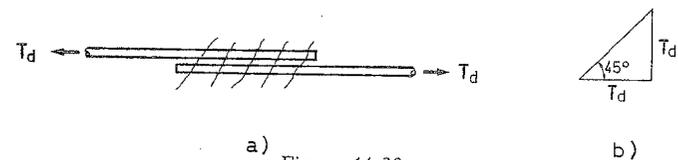
Dentro del grupo c) consideraremos incluido el caso del empalme de barras comprimidas por simple contacto entre puntas.

El paso al empleo de los grupos b) y c) sólo suele realizarse cuando el empalme por solapo no es posible, o bien cuando, al tratarse de diámetros muy gruesos, la soldadura o el manguito permiten ahorros importantes. EHE autoriza, sólo excepcionalmente, el empleo de los empalmes por solapo para diámetros superiores a 32 mm. Pueden disponerse en casos particulares, que se indicarán más adelante.

#### 44.17 EMPALMES POR SOLAPO DE BARRAS CORRUGADAS

##### a) Solapos de barras en tracción

Centrándonos por el momento en los empalmes por solapo, su mecanismo de funcionamiento se indica en la figura 44-39 para barras en tracción y está esquematizado en la figura 44-39 b). La transmisión de la fuerza  $T_d$  se realiza de una de las barras al hormigón y de éste a la otra barra mediante un mecanismo de bielas a 45°. El equilibrio se consigue exclusivamente en la forma indicada y la fisuración oblicua a 45° es uno de los síntomas de agotamiento del solapo. Perpendicularmente a la dirección del solapo aparecen fuerzas de tracción cuya resultante iguala a la fuerza transmitida por el solapo.



a) Figura 44-39

b)

La distribución de estas fuerzas de tracción ortogonales al solapo ha sido estudiada por varios investigadores como STÖCKL (44.13) y TEPFERS (44.14) y es del tipo indicado en la figura 44-39. La tracción transversal, llamando  $A_s$  al área de la menor de las dos barras solapadas y  $f_{yd}$  a su límite elástico de cálculo será

$$T_d = A_s f_{yd} \quad [44.44]$$

La longitud del solape debe corresponder a la  $\ell_{b,net}$  de la barra **más gruesa** de las solapadas de acuerdo con lo que a continuación se detalla.

En la figura 44-40 se indican los esquemas de transmisión de fuerza a lo largo de las barras en una zona de solape.

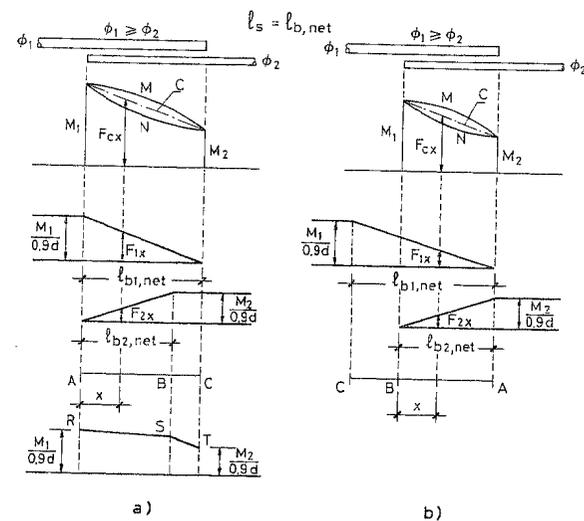


Figura 44-40

Si se emplea como longitud de solape la de la barra de mayor diámetro  $\phi_1$  aceptando la teoría general de que las tensiones de adherencia son constantes a lo largo del solape y que por lo tanto la fuerza transmitida varía linealmente o en la punta hasta  $\frac{M\phi^2}{4} \cdot f_{yd}$  en la sección distante la longitud de solape, se tiene lo siguiente:

Caso a) de longitud de solape la correspondiente a la barra mayor

Zona AB:

$$F_{1x} = \frac{M_{2d}}{0,9} \left( 1 - \frac{x}{\ell_{b1,net}} \right) \quad F_{2x} = \frac{M_{2d}}{0,9d} \cdot \frac{x}{\ell_{b,net}}$$

La fuerza total resistente en la sección  $x$  es por tanto

$$F_{TX} = \frac{M_{1d}}{0,9d} \left( 1 - \frac{x}{\ell_{b1,net}} \right) + \frac{M_{2d}}{0,9d} \cdot \frac{x}{\ell_{b2,net}} \quad [44.45]$$

La fuerza necesaria para cubrir la ley de fuerzas derivadas de la ley de momentos correspondiente a la variación lineal C (cuerda del arco de la ley de momentos), resulta

$$F_{CX} = \frac{M_{1d}}{0,9d} \left( 1 - \frac{x}{\ell_{b1,net}} \right) + \frac{M_{2d}}{0,9d} \cdot \frac{x}{\ell_{b1,net}} \quad [44.46]$$

y por tanto:

$$F_{TX} \geq F_{CX}$$

Zona BC:

$$F_{1x} = \frac{M_{1d}}{0,9d} \left( 1 - \frac{x}{\ell_{b1,net}} \right); \quad F_{2x} = \frac{M_{2d}}{0,9d}; \quad F_{TX} = \frac{M_{1d}}{0,9d} \left( 1 - \frac{x}{\ell_{b1,net}} \right) + \frac{M_{2d}}{0,9d} \quad [44.47]$$

$$F_{CX} = \frac{M_{1d}}{0,9d} \left( 1 - \frac{x}{\ell_{b1,net}} \right) + \frac{M_{2d}}{0,9d} \cdot \frac{x}{\ell_{b1,net}} \quad [44.48]$$

y por tanto, también  $F_{TX} \geq F_{CX}$

Es decir, si la ley de momentos es lineal, o cóncava como las líneas C o N de la figura 44-40 a), en todo el solape se cubre holgadamente, es decir, la ley cubierta RST envuelve a la ley de los momentos. Si la ley es convexa tal como la curva M de momentos, cabe en teoría que en algún punto esto no se cumple, pero en la práctica esto no ocurre por dos motivos.

- La variación de la ley de momentos de A a C, se aleja en cualquier caso poco de la cuerda, ya que la longitud  $\ell_{b1}$  es pequeña. (Los casos de cargas puntuales con fuertes variaciones de la ley de momento corresponde a regiones D de discontinuidad).
- La teoría aplicada que supone una transmisión lineal de fuerza a lo largo del solape es conservadora y en realidad la transmisión se realiza con una ley curva envolvente de la lineal.

Si consideramos la figura 44-40 b), correspondiente a emplear como longitud de solape la  $\ell_{b2,net}$  de la barra de menor diámetro, es inmediato ver que en la zona CB, la fuerza en la barra es inferior al valor  $\frac{\pi \phi_l^2}{4} \cdot f_{yd}$ . Ello quiere decir que si el solape en su punto de comienzo es estricto la regla está del lado de la inseguridad.

La longitud de solape  $\ell_s$  viene dada por la fórmula

$$\ell_s = \alpha \ell_{b,net} \quad [44.49]$$

donde  $\ell_{b,net}$  se definió mediante [44.12] y  $\alpha$  viene dado por la tabla T-42.5.

TABLA T-44.5  
Valores de coeficientes  $\alpha$

Distancia entre los empalmes más próximos	Porcentaje de barras solapadas trabajando a tracción, con relación a la sección total					Barras solapadas trabajando normalmente a compresión en cualquier porcentaje
	20	25	33	50	> 50	
$a \leq 10 \phi$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,0
$a > 10 \phi$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,0

valor de  $a$  ha de interpretarse de acuerdo con la figura 44-41.

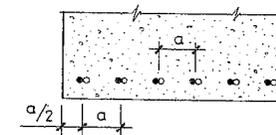


Figura 44-41

En teoría, debería disponerse en la zona del solape una armadura transversal capaz de resistir la fuerza  $T_d$ . EHE, lo hace así exigiendo una armadura transversal de capacidad mecánica igual a la de la barra más gruesa solapada.

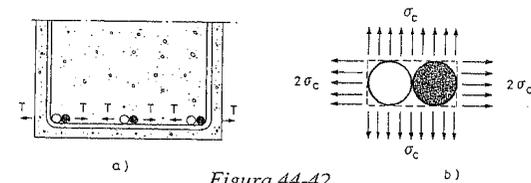


Figura 44-42

El área  $A_{st}$  puede distribuirse uniformemente en la longitud de solape  $l_s$ . Las barras que se solapan pueden estar en contacto o bien separarse hasta un máximo de  $4\phi$  ( $5\phi$  entre ejes). Si no están en contacto, deberán respetar las distancias entre sí y a los paramentos que se indican en general en EHE y que se recogen en el capítulo 51, ya que, si están muy juntas pero no en contacto, no quedan bien embebidas en el hormigón<sup>1</sup>.

Para la disposición de la armadura transversal al solape,  $A_{st}$ , debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con lo que se indica en la figura 44-41 a), una misma rama de estribo es válida para coser varios solapes paralelos<sup>2</sup>. Por este motivo, en las  $A_{st}$  es el área de la barra solapada de mayor diámetro y no de la totalidad. *El área  $A_{st}$ , si es la rama inferior de un estribo de corte, puede ser simultáneamente empleada para resistir este esfuerzo.*

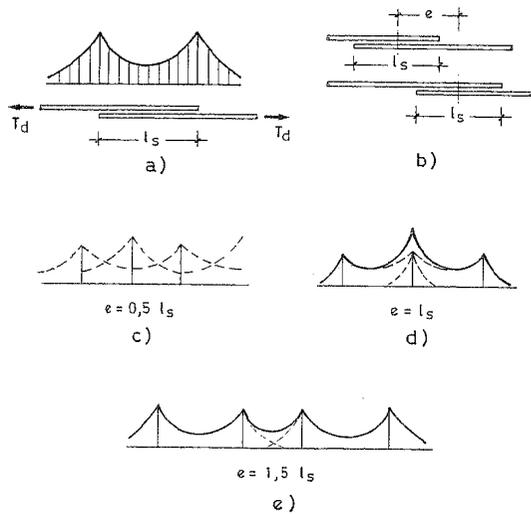


Figura 44-43

Tal como se indica en la figura 44-41 a), las fuerzas radiales de transmisión presentan resultante nula, motivo por el que una misma rama de armadura transversal puede coser varios solapes. Sin embargo, la distribución de tracciones alrededor del solape sigue el esquema simplificado de la figura 44-42 b), lo cual aconseja que el eje de la armadura transversal sea paralelo al plano definido por los ejes de las dos armaduras solapadas.

- 1 La razón de la solución usual de mantener las barras del solape en contacto, es para poder atarlas de forma que no se muevan durante el hormigonado. La eficacia máxima en la transmisión se alcanza para una separación entre ejes de  $5\phi$ . Véanse los ensayos de HAMAD y MANSOUR (44.15) (y también los de SAGAN, GERGELY y WHITE para el caso de cargas cíclicas (44.16). En caso de que las barras no estén en contacto debe asegurarse bien su posición durante el hormigonado. La resistencia del solape, aumenta con la separación hasta  $4\phi$ . Los solapes con barras separadas son especialmente indicados en estructuras sometidas a cargas cíclicas.
- 2 Sobre la distribución de fuerzas  $T_d$  existen trabajos importantes de TEPFERS (44.14) y ELIGEHAUSEN (44.17).

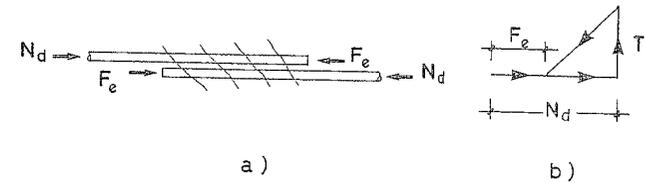


Figura 44-44

Un punto importante es el del distanciamiento de los solapes en sentido longitudinal. En la figura 44-43 y a partir de la distribución de la fuerza  $T_d$  indicada en 44.43 a), se han dibujado las leyes aproximadas para  $e = 0,15 l_s$ ,  $e = l_s$  y  $e = 1,5 l_s$  (44.9). Se aprecia inmediatamente que la solución  $e = 1,5 l_s$  es satisfactoria y que  $e = l_s$  conduce a un fuerte incremento de la tracción, siendo incluso preferible  $e = 0,5 l_s$ . EHE permite el solape del 100 por 100 de las barras si están en una sola capa y 60 por ciento si están en dos o más, distanciándolas en este vano  $1,5 l_s$ .

En cualquier caso, es recomendable disponer los solapes, si es posible, en zonas de esfuerzos débiles y con recubrimientos no inferiores a  $2\phi$ .

#### b) Solapas de barras comprimidas

El funcionamiento de un empalme por solape de barras comprimidas es considerablemente distinto del caso de barras en tracción y ello es debido al apoyo de las puntas de las barras en el hormigón. En la figura 44-44 a) se indica la transmisión por bielas y las fuerzas de punta  $F_e$ . En los ensayos existentes se han registrado tensiones en el hormigón, bajo las puntas, de varias veces su resistencia en probeta cilíndrica, debido al efecto de confinamiento del hormigón circundante. Si los diámetros son grandes, el valor de  $F_e$  es importante en la resistencia del solape. En la figura 44-44 b) se indica el diagrama de equilibrio, que conduce a una necesidad teórica de armadura.

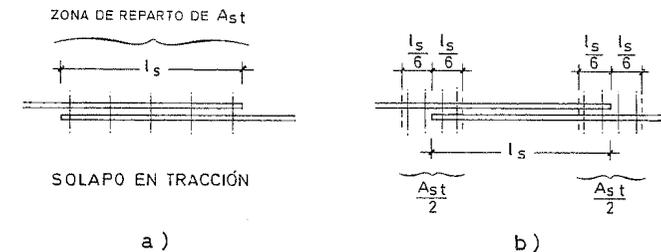


Figura 44-45

$$A_{st} = \frac{A_s f_{yd} - F_e}{f_{yt}} \quad [44.50]$$

Dada la dificultad, por ahora, de evaluar  $F_e$ , supondremos  $F_e = 0$  y adoptaremos las fórmulas del solape en tracción<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> El apoyo en punta, si el solape tiene recubrimiento escaso, puede desgarrar el hormigón.

Con ello, en definitiva, en cuanto a separación entre barras solapadas, distanciamiento de solapos en sentido longitudinal y requisitos de armadura transversal, trataremos en idéntica forma los solapes en tracción y en compresión. Sin embargo, por lo que se refiere al solapo a tracción, es recomendable distribuir  $A_{st}$  en la longitud de solapo (fig. 44-45 a)). Para el solapo en compresión, si  $\phi \leq 16 \text{ mm}$ , puede hacerse de la misma manera, pero para  $\phi > 16 \text{ mm}$  es recomendable disponer la mitad de  $A_{st}$  centrada en cada extremidad del solapo, con objeto de resistir las tensiones de desgarramiento bajo las puntas de las barras (Fig. 44-44 b)). Véanse las referencias (44.14), (44.18), (44.19), (44.20) y (44.21).

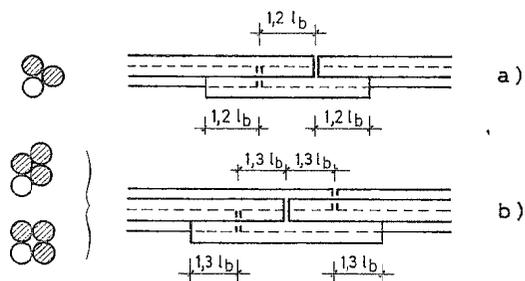


Figura 44-46

Es posible solapar cualquier porcentaje de armaduras en la misma sección tomando  $\alpha = 1$  en [44.49], siendo ahora  $l_b$  la longitud básica de anclaje para barras comprimidas.

#### c) Longitudes mínimas de solapes

Para la longitud  $l_s$ , rigen los mínimos:

$$0,3l_b$$

$$10 \phi$$

$$150 \text{ mm}$$

### 44.18 REQUISITOS ESPECIALES DE EMPALMES POR SOLAPO PARA LOS GRUPOS DE BARRAS

El método más práctico es el empleado en EHE, de utilizar una barra como cubrejuntas. Según se trate de grupos de dos o tres barras, las disposiciones son las indicadas en la figura 44-46. La Instrucción EHE (y todas las demás) prohíben el empalme por solapo de grupos de cuatro barras.

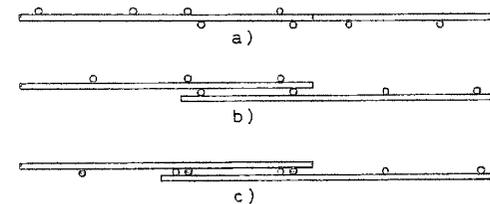


Figura 44-47

### 44.19 EMPALME POR SOLAPO DE MALLAS ELECTROSOLDADAS

En lo que sigue, se manejarán los siguientes conceptos:

- Se entiende por solapo de mallas acopladas aquel en que los ejes de los alambres solapados están en un mismo plano y, por tanto, los alambres transversales cosen el solapo a ambos lados de su plano medio (fig. 44-47 a)).

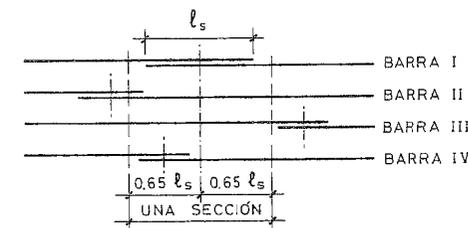


Figura 44-48

- Se entiende por solapo de mallas superpuestas cualquier otro, como los indicados en las figuras 44-47 b) y c), en los que los alambres solapados no están en el mismo plano ni los alambres transversales cosen el solapo a ambos lados de dicho plano.

*Solapo de mallas fabricadas con alambres o barras corrugadas*

*Solapo de alambres longitudinales*

Para mallas acopladas. La longitud de solapo,  $l_s$ , viene dada por:

$$l_s = \alpha l_b \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \quad [44.51]$$

y es por tanto la longitud básica de anclaje de barras *corrugadas*, calculada para el diámetro del alambre liso empleado,  $\alpha$  es el coeficiente dado por la Tabla T-42.5. (Recuérdese el incremento de  $l_b$  en el caso de barras dobles). En cualquier caso, la longitud  $l_s$  no será inferior a

$$0,3l_b$$

$$10 \phi \text{ (para barras dobles } \phi_e = \phi \sqrt{2} \text{ )}$$

$$150 \text{ mm}$$

Para *mallas superpuestas*. La longitud de solapo si cuando la separación entre elementos solapados sea igual o superior a  $10 \phi$ , será:

$$l_s = 1,7 l_{b,net} \quad [44.52]$$

teniendo  $l_b$  el mismo significado que en [44.51], pero el solapo no contendrá menos de  $5 \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}}$  barras transversales. Si la separación es inferior a  $10 \phi$  el coeficiente  $1,7$  se reemplazará por  $2,4$ .

En cualquier caso,  $l_s$  no será nunca inferior a

$$0,3 l_b$$

$$15 \phi \text{ (para barras dobles } \phi_e = \phi \sqrt{2} \text{ )}$$

$$200 \text{ mm}$$

*Solapo de alambres transversales*. Para *mallas acopladas* en sentido transversal se aplica la fórmula [44.51]. Para *mallas superpuestas* en sentido transversal, las longitudes se indican en la Tabla T-44.6.

**TABLA T-44.6**

$\phi$ mm	Longitudes de solapo
$\phi \leq 6$	$\geq 150$ mm; al menos una trama
$6 < \phi \leq 8,5$	$\geq 250$ mm; al menos dos tramas
$8,5 < \phi \leq 12$	$\geq 400$ mm; al menos dos tramas

Si la armadura transversal, en la zona de solapo, no ha sido deducida de un cálculo resistente, es suficiente disponer solapo de una sola trama, pero no menos de 150 mm.

Para cargas estáticas se permite solapar el 100 % de la armadura en la misma sección si las *mallas* están en una sola capa y al 60% en otro caso. Por las razones expuestas anteriormente, resulta necesario distanciar los solapos  $1,5 l_s$ .

Si se emplean barras dobles, debe tenerse en cuenta el incremento correspondiente en  $l_b$  y, si  $\phi > 8,5$  mm, sólo se permite solapar en la misma sección el 60% de la armadura.

**44.20 EMPALMES POR SOLAPE DE BARRAS CORRUGADAS DE ACUERDO CON EL MODEL CODE 90**

La longitud de cálculo del solape viene dada por:

a) *Barras en tracción*

$$l_s = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \cdot l_b \cdot \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}} \geq l_{s,min} \quad [44.53]$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  y  $l_b$  se definen ya en 44.14.1 y  $\alpha_6$  viene dado en la tabla T-44.7 (Para el valor de  $\alpha_6, \Sigma A_{Ast,min}$  debe tomarse como  $1,0 A_s$  siendo  $A_s$  el valor de una barra solapada).

**TABLA T-44.7**  
**Valores del coeficiente  $\alpha_6$**

Porcentaje de barras solapadas respecto a la sección total de acero	$\leq 20$ %	25 %	33 %	50 %	$> 50$ %
$\alpha_6$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0

valor de  $l_{s,min}$  viene dado por el mayor de  $0,3 \alpha_6 l_b, 15 \phi, 200$  mm.

Para el valor  $\alpha_6$ , el porcentaje de armadura solapada es el comprendido en una longitud  $1,3 l_s$  de acuerdo con la figura 44-48.

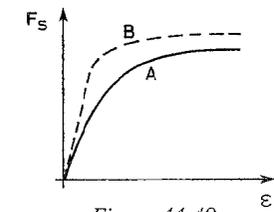


Figura 44-49

b) *Barras en compresión*

$$l_s \geq l_{b,net} \quad [44.54]$$

donde  $l_{b,net}$  se definió 44.14.1.

c) Armadura transversal en la zona de solapo

- Si el diámetro de las barras es inferior a 16 mm o si, siendo superior, el porcentaje de barras solapadas en la misma sección no supera el 25%, las armaduras transversales dispuestas por otros motivos (estribos, cercos, armaduras de reparto, etc.) se consideran suficientes.

- Si  $\phi \geq 16 \text{ mm}$  o el porcentaje de barras solapadas en la misma sección supera el 25%, se adoptará una de las disposiciones siguientes:

c-1) Armadura transversal igual a la sección de la barra más gruesa solapada.

c-2) Si  $a \leq 10 \phi$  (Fig. 44-41) la armadura transversal debe disponerse en forma de estribos.

La disposición de armadura transversal a lo largo del solape coincide con lo especificado por EHE.

c-3) El MODEL CODE 90 permite separaciones entre barras solapadas superiores a  $4 \phi$  pero exige que se cumplan las condiciones adicionales siguientes:

- La longitud de solape  $l_s$ , debe incrementarse en una distancia igual a la separación entre barras.

- La armadura transversal se calculará mediante un modelo de bielas y tirantes y no será inferior a la expuesta en c).

d) Porcentaje admisible de barras solapadas en la misma sección. Viene dado por la tabla T-44.8.

TABLA T-44.8

Porcentaje admisible de barras solapadas en tracción en una sección, si no se dispone armadura transversal

Tipo de barra	Solicitación Monotónica	Solicitación Repetida
<i>Barras de altaadherencia</i>		
Una sola capa	100%	100%
Varias capas	50%	50%

Las armaduras de reparto pueden solaparse todas en la misma sección y lo mismo rige para solapos de barras comprimidas.

44.21 EMPALMES MECÁNICOS. EMPALMES POR SOLDADURA

La clasificación de los empalmes, que no se realizan por adherencia, en mecánicos y por soldadura, es ciertamente convencional, pero la mantendremos en lo que sigue.

a) Empalmes mecánicos

La Instrucción EHE permite cualquier tipo de empalme mecánico, siempre que los ensayos realizados demuestren que la unión posee, de forma permanente, una resistencia a la rotura no inferior a la de la menor de las barras empalmadas y que el deslizamiento relativo no supere 0,1 mm bajo cargas de servicio.

Exigir que la unión presente una resistencia no inferior a la de las barras parece excesivo, ya que las barras no alcanzan esa tensión en el funcionamiento de las piezas. Es evidente que no marcar ningún requisito por encima del límite elástico podría conducir a fallos poco dúctiles. La Norma ACI 318-95 establece que la resistencia alcance el 125 % de la carga correspondiente al límite elástico, lo que parece razonable.

Más importante que lo anterior es exigir al empalme que garantice que una barra que lo contenga tenga un diagrama Fuerzas-Deformaciones por encima del de una barra sin empalmar (fig. 44-49). Obsérvese que se habla de fuerzas y no de tensiones, ya que en una barra con manguito no tiene sentido el concepto de límite elástico al ser la barra de sección no constante.

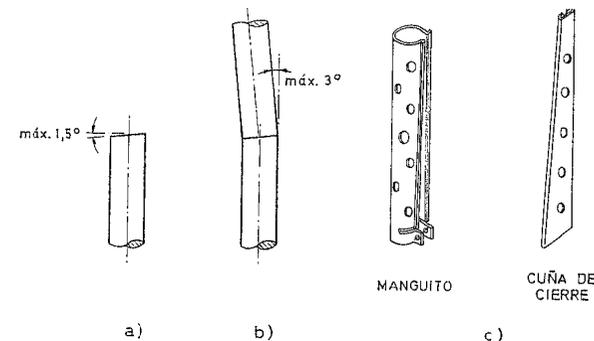


Figura 44-50

Los tipos de empalmes más frecuentes son los que se roscan a ambas barras a empalmar, los que materializan el empalme rellenando el espacio entre las barras y el manguito con metal fundido, resina, etc., y los que conectan ambas barras por aplastamiento del manguito contra los resaltes de ambas barras según veremos en el Capítulo 50.

Su interés es claro en el caso de barras de gran diámetro y el proyectista deberá informarse a fondo de las características exactas del tipo a emplear, así como de los resultados experimentales disponibles. En particular debe conocer con precisión la separación mínima admisible entre barras paralelas a la vista del

diámetro del manguito y de la necesidad de manejo de la herramienta para inyección, extrusión, etc., con el fin de disponer la adecuada posición de las barras y de los manguitos en el proyecto.

Un caso especial importante es el de empalme de barras *siempre comprimidas* por contacto directo entre ellas. El corte debe ser ortogonal al eje de las barras. EHE no contempla este caso. ACI 318-95 admite una tolerancia de  $1,5^\circ$  en el corte (fig. 44-50) y de  $3^\circ$  en la alineación. Es conveniente colocar algún dispositivo que asegure durante el hormigonado la inmovilidad de la unión. La solución 44-45 c) corresponde a una patente norteamericana, no fabricada en España.

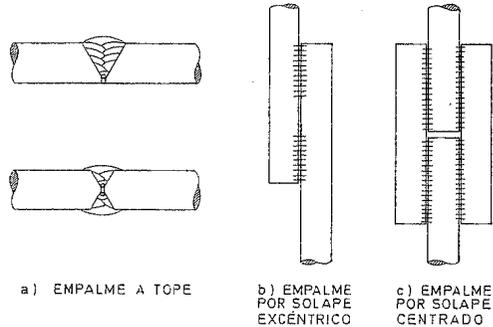


Figura 44-51

Un documento importante sobre empalmes mecánicos es el redactado por la Comisión Permanente VII del C.E.B. "Recommendations for mechanical splices of reinforcing bars" (44.22). Véase el Capítulo 50 para más detalles.

#### b) Empalmes por soldadura

Los empalmes de barras por soldadura pueden clasificarse en los tres grupos indicados en la figura 44-52.

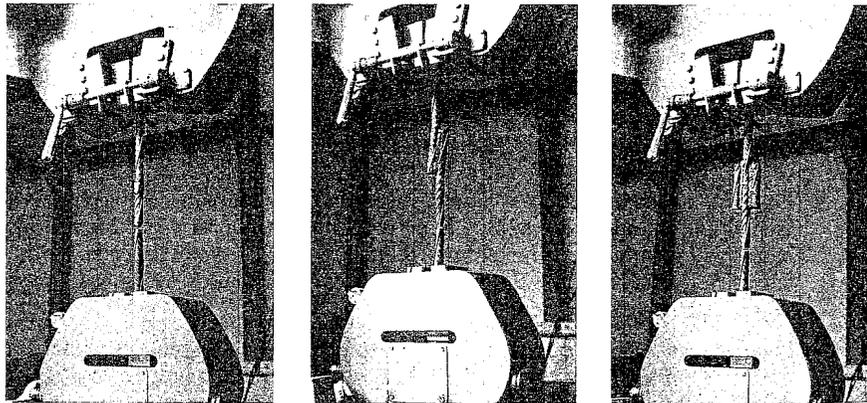


Figura 44-52

La soldadura a tope tiene la ventaja de que la barra soldada tiene prácticamente el mismo diámetro que la barra sin soldar, lo que evita la congestión típica de las zonas de solape o de otros tipos de soldadura. Su inconveniente principal es que es un tipo de soldadura muy difícil de hacer "in situ", requiriendo casi siempre la realización en taller.

La solución b) de solape excéntrico es simple y puede hacerse sin problemas en obra. En ella tomada de los ensayos de CALAVERA y SEGURA (44.23) se aprecia su inconveniente principal, que es que, al alinearse las barras solapadas bajo la acción de la fuerza, producen esfuerzos transversales en el hormigón que deben cubrirse con la adecuada armadura transversal.

La soldadura de solape centrado, indicada en la figura 44-51 c), no presenta ese inconveniente aunque ocupa más espacio.

En cualquier caso, el proyecto debe especificar la posición de las soldaduras y la técnica a emplear y prever los controles de aptitud y durante la ejecución, que especifica la Instrucción EHE.

El proyectista debe recordar que las barras deformadas en frío y las de dureza natural presentan problemas de soldadura muy diferentes y requieren técnicas de soldeo distintas. Toda esta información debe ser proporcionada por el fabricante del acero.

Una publicación interesante sobre soldadura de barras es la realizada por la Comisión Permanente VII del C.E.B. "Recommendations for welded splices in reinforcing bars" (44.24) y la Norma UNE 36831 (44.25). Véase el Capítulo 50 para más detalles.

#### EJEMPLO 44.2

En un pilar de  $400 \cdot 400 \text{ mm}$ , armado con  $4 \phi 25$  de acero B 400S comprimidas, se solapan las armaduras con las  $4 \phi 32$  que suben de la planta anterior. El hormigón es H-25. Recubrimientos  $35 \text{ mm}$ . Estribos  $\phi 10$  a  $250 \text{ mm}$  de B 400S.  $\gamma_c = 1,5$ ;  $\gamma_s = 1,15$ . Proyectar el empalme por solape, sabiendo que el área estricta de armadura en la zona de  $4 \phi 32$  es de  $3020 \text{ mm}^2$ .

#### Solución

La solución básica de solape es la de  $\phi 32$  en Posición I.

$$\ell_b = 12 \cdot 3,2^2 = 123 \text{ cm}$$

De acuerdo con [44.49], para  $\alpha = 1$ .

$$\ell_s = 123 \cdot \frac{3020}{3215} = 116 \text{ cm}$$

La armadura transversal necesaria, será

$$A_{st} = \frac{\pi \cdot 32^2}{4} = 804 \text{ mm}^2$$

En 116 cm existen estribos que proporcionan

$$\frac{116}{25} \cdot 79 = 367 \text{ mm}^2 \quad (\text{Se considera una sola rama})$$

por lo que se necesita armadura suplementaria de 7 estribos.

## BIBLIOGRAFÍA

- (44.1) CEB-FIP MODEL CODE FOR CONCRETE STRUCTURES. 1978.
- (44.2) EUROCODE N° 2 "Design of Concrete Structures". Part 1 "General Rules and Rules for Buildings". Commission of European Communities. Diciembre 1989.
- (44.3) MULLER, H. H. "Auszieversuche mit Betonstahlaken". Diciembre 1968. Materialsprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule. München. Bericht n° 80.
- (44.4) REHM, G. "Kriterien zur Beurteilung von Bewehrungsstäben mit hochwertigem Verbund". En "Stahlbetonbau, Berichte aus Forschung und Praxis, Festschrift Rusch". Ernst & Sohn. Berlin. 1969.
- (44.5) COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. Bulletin d'Information n° 151. "Bond Action and Bond Behaviour of Reinforcement". Avril 1982.
- (44.6) ACI 318-95 "Building Code Requirements for Structural Concrete". American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (44.7) CALAVERA, J. "Cálculo de Estructuras de Cimentación". INTEMAC. Madrid. 2ª Edición. 1987.
- (44.8) RODRIGUEZ LOPEZ, F. "Investigación experimental de las longitudes de anclaje de las armaduras de los pilares de hormigón armado en los cimientos". Tesis doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid. 1987.
- (44.9) CALAVERA, J. "Armaduras pasivas para hormigón estructural. Recomendaciones sobre el proyecto, detalle, elaboración y montaje". CALIDAD SIDERURGICA. Cuadernos Técnicos 1. Madrid 1997.
- (44.10) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; VALENCIANO, F. "Manual de Ferralla", ANIFER. Madrid 1997.
- (44.11) NIKYRY, P.; "Anchorage of reinforcement in concrete structures". International Conference Bond in Concrete. Riga. October 1992.
- (44.12) Eurocode 2. "Design of concrete structures". Part 3. "Concrete Foundations". Aug. 1998.
- (44.13) STOCKL, S. "Übergreifungsstöße von zugbeanspruchten Bewehrungsstäben". Beton und Stahlbetonbau n° 10. October 1972.
- (44.14) TEPFERS, R. "A theory of bond applied to Overlapped tensile reinforcement for Deformed Bars". Chalmers University of Technology. Division of Concrete Structures. Goteborg. 1973.
- (44.15) HAMAD, B.S.; MANSOUR, M.Y.; "Bond strength of noncontact lap splices". ACI Structural Journal. May-June. 1996.
- (44.16) SAGAN, V.E.; GERGELY, P.; WHITE, R.N.; "Behaviour and design of no contact lap splices subjected to repeated inelastic tensile loading". ACI Structural Journal. July-August 1991.
- (44.17) ELIGEHAUSEN, R. "Übergreifungsstöße zubeanspruchter Rippenstäbe mit geraden Stabenden". Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Heft 301. Ernst & Sohn. Berlin 1979.
- (44.18) ARTHUR, P.D.; CAIRNS, J.W. "Compression laps of reinforcement in concrete columns". The Structural Engineer. March 1978.
- (44.19) CAIRNS, J.; ARTHUR, P.D. "Strength of lapped splices in Reinforced Concrete Columns". ACI Journal. February 1979.
- (44.20) CAIRNS, J. "An Analysis of the Ultimate Strength of Lapped Joints of Compression Reinforcement". Magazine of Concrete Research. March 1979.
- (44.21) PFISTER, J. F.; MATTOCK, A.H. "High Strength Bars as Concrete Reinforcement, Part 5. Lapped Splices in Concentrically Loaded Columns". Journal of the PCA Research and Development Laboratories. May 1963.
- (44.22) "Recommendations for mechanical splices of reinforcing bars". C.E.B. TG-VII 6 Permanent Commissions VII. Bulletin 201. 1990. (Existe traducción española del GEHO).
- (44.23) CALAVERA, J.; SEGURA, M. "Resultados de ensayos de soldadura a tope y por solape, con electrodo, de barras de aceros estirados en frío". Informes de la Construcción n° 208. 1968.
- (44.24) "Recommendations for welded splices in reinforcing bars". C.E.B. Bulletin 186. 1988.
- (44.25) UNE 36821 "Armaduras pasivas de acero para hormigón estructural - corte, doblado y colocación de barras y mallas. Tolerancias. Formas preferentes de armado".

## CAPÍTULO 45

### PANDEO DE PILARES. INESTABILIDAD LATERAL DE VIGAS

#### 45.1 PANDEO. INTRODUCCIÓN

Si un pilar es muy esbelto, puede ocurrir que su capacidad resistente se vea disminuida por las deformaciones transversales debidas a las solicitaciones actuantes, o a las excentricidades o faltas de verticalidad accidentales. En pilares poco esbeltos, tales como el a) de la figura 45-1, la flecha  $\Delta$  debida a la acción  $N$  conduce a una sollicitación de agotamiento del pilar  $N'_u$ , bajo un momento flector  $M'_u = N'_u (e + D)$  sensiblemente

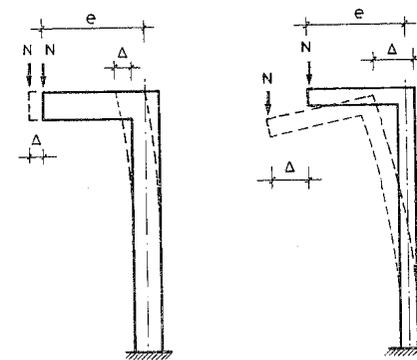


Figura 45-1

igual al valor  $M_u = N_u \cdot e$  y, en definitiva, puede aceptarse que  $N_u = N'_u$  y que el momento de segundo orden es despreciable. En el primer caso (fig. 45-2), el punto representativo de la situación de servicio de la sección del pilar es el A, y el esfuerzo axil y el momento flector crecen proporcionalmente hasta alcanzar el punto B de agotamiento correspondiente a la sollicitación  $(N_u, N_u \cdot e)$ . En el segundo caso, el recorrido de A hasta el agotamiento es la curva AC, donde a C le corresponde la sollicitación de agotamiento  $N'_u, N'_u \cdot (e + \Delta)$ . Como decimos, si el pilar no es esbelto, la diferencia puede despreciarse.

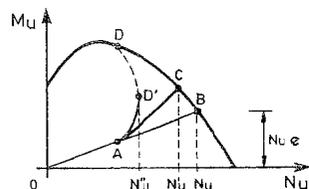


Figura 45.2

Si el pilar tiene, en cambio, una esbeltez importante (fig. 45-1 b)) la flecha  $\Delta$  lo será también y el comportamiento de la pieza, debido a que el momento adicional  $N \cdot \Delta$  ya no es despreciable, puede ser muy diferente. Las deformaciones  $\Delta$  pueden crecer muy rápidamente y el agotamiento ocurrir en un punto teórico  $D'$  (fig. 45-2), bajo un axil  $N''_u$  muy reducido respecto a los valores  $N_u$  o  $N'_u$ . Mientras que el agotamiento en los puntos B y C corresponde al estado límite último de flexión compuesta, con agotamiento del hormigón y/o del acero, es decir, con fallo de la pieza por agotamiento de los materiales, el caso D corresponde a un fallo por pandeo, debido a la inestabilidad de forma de la pieza.

En el caso que nos ocupa, referente a pilares de hormigón, el problema se agrava por el crecimiento adicional de  $\Delta$  debido a las dos causas siguientes:

- El incremento  $N \cdot \Delta$  del momento flector, al fisurarse la pieza reduce el valor  $I$  del momento de inercia de la sección.
- El proceso de fluencia del hormigón, si la carga es duradera, produce un incremento de deformación análogo al que produciría una reducción del módulo de deformación  $E_c$  del hormigón.

En definitiva, la flecha adicional  $\Delta$  al reducir la rigidez (EI) de la pieza, reaccúa sobre el problema, incrementando  $\Delta$ .

En el caso de pilares de entramados la situación puede ser diferente a la de la figura 45-1. Supongamos, en primer lugar, que el entramado es intraslacional.

Si el pilar está sometido a momentos flectores del mismo signo en sus extremos y no hay acciones exteriores sobre su directriz, la situación es la indicada en la figura 45-3 a). Las flechas  $\Delta$  cambiarán la ley de momentos de la recta AB a la curva ACB, pudiendo el momento máximo no presentarse en ninguno de los dos extremos, sino en el interior de la luz del pilar si las deformaciones son importantes.

Si los momentos flectores en los extremos son de distinto signo, la situación es la reflejada en la figura 45-3 b) y, en general, siempre en el caso de entramado intraslacional, el momento máximo seguirá presentándose en un extremo de la pieza, salvo para grandes valores de  $\Delta$ .

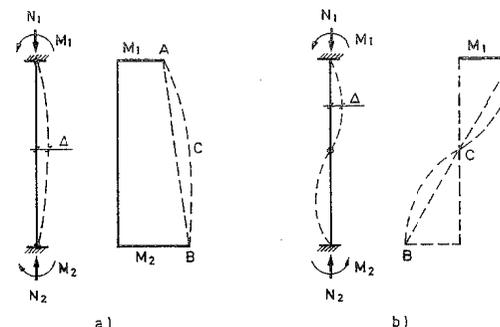


Figura 45-3

Si suponemos en cambio un pilar de un entramado traslacional sometido a acciones horizontales, la situación queda reflejada en la figura 45-4.

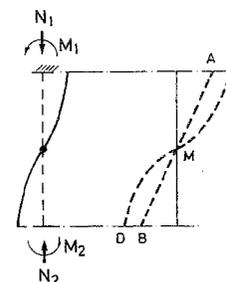


Figura 45-4

La línea recta de la ley original de momentos AB, debido a las deformaciones, pasará a ser la curva CMD, y los momentos en los extremos resultarán, en general, incrementados.

#### a) Longitud de pandeo

Para el estudio de lo que sigue, introduciremos el concepto de *longitud de pandeo*, como distancia entre puntos de inflexión de la deformada.

En pilares de entramados intraslacionales, la situación se indica en la figura 45-5, y la longitud de pandeo  $\ell_0 = \alpha \ell$  tiene valores variables entre 0,5 y 1.

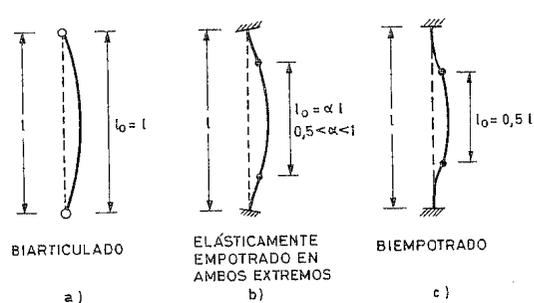


Figura 45-5

Si el pilar es traslacional, la situación se refleja en la figura 45-6, y los valores de  $\alpha$  son siempre superiores a la unidad.

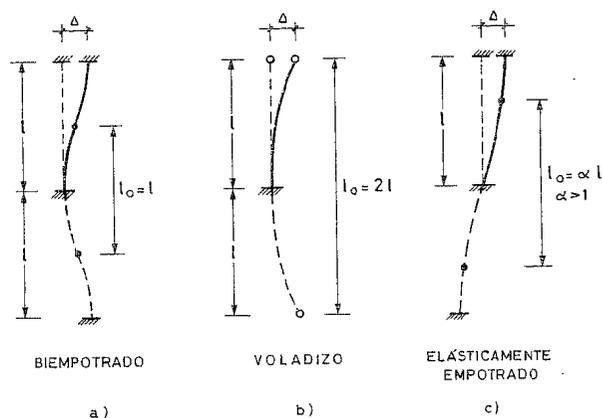
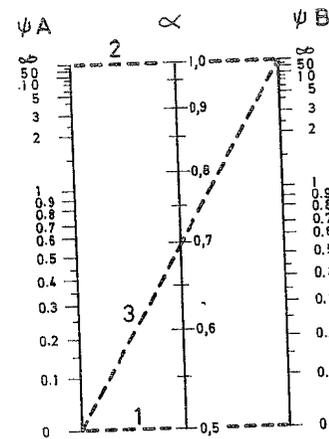
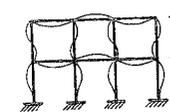


Figura 45-6

En definitiva, la longitud de pandeo  $l_0 = \alpha l$  depende del grado de coacción que los nudos ejerzan sobre la traslacionalidad y giro de cada extremo.

Los dos métodos de cálculo de pilares a pandeo, que más adelante exponemos, el de la Instrucción EHE y el de la Norma Norteamericana ACI 318-95, determinan el valor de  $\alpha$  mediante ábacos de alineación de JACKSON Y MORELAND (45.1) (45.2). Estos ábacos fueron elaborados para el caso de la estructura metálica y posteriormente adoptados por el ACI, de cuyas normas los ha tomado la Instrucción EHE. Los citados ábacos se recogen en la figura 45-7 para entramados intraslacionales y en la 45-8 para los traslacionales.



ENTRAMADOS INTRASLACIONALES

$\psi$  = relación de  $\sum E \frac{I}{l}$  de los pilares a  $\sum E \frac{I}{l}$  de las vigas que concurren en cada extremo A y B del pilar considerado  
 $\alpha$  = factor de longitud de pandeo  
 $l_0$  = longitud de pandeo  
 $l$  = luz libre de la pieza  
 $l_0 = \alpha l$   
 1 = pilar biempotrado ( $l_0 = 0,5l$ )  
 2 = pilar biarticulado ( $l_0 = l$ )  
 3 = pilar articulado-empotrado ( $l_0 = 0,7l$ )

Figura 45-7

$\psi$  = relación de  $\sum E \frac{I}{l}$  de los pilares a  $\sum E \frac{I}{l}$  de las vigas que concurren en cada

extremo A y B del pilar considerado  $l_0 = \alpha l$

$\alpha$  = factor de longitud de pandeo

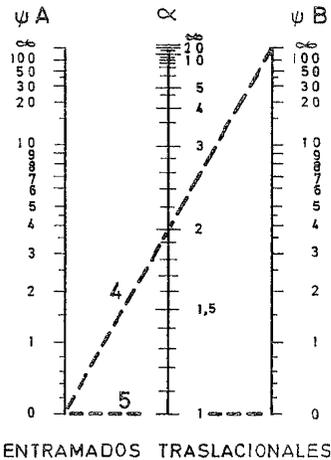
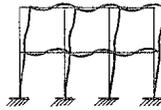
$l_0$  = Longitud de pandeo

$l$  = luz libre de la pieza

1 = pilar biempotrado ( $l_0 = 0,5 l$ )

2 = pilar biarticulado ( $l_0 = l$ )

3 = pilar articulado-empotrado ( $l_0 = 0,7 l$ )



$\psi$  = relación de  $\sum E \frac{I}{\ell}$  de los pilares a  $\sum E \frac{I}{\ell}$  de las vigas que concurren en cada extremo A y B del pilar considerado  
 $\alpha$  = factor de longitud de pandeo  
 $\ell_0$  = longitud de pandeo  
 $\ell$  = luz libre de la pieza  
 $\ell_0 = \alpha \ell$   
 4 = pilar en ménsula ( $\ell_0 = 2\ell$ )  
 5 = pilar biempotrado con extremos desplazables ( $\ell_0 = \ell$ )

Figura 45-8

$\psi$  = relación de  $\sum E \frac{I}{\ell}$  de los pilares a  $\sum E \frac{I}{\ell}$  de las vigas que concurren en cada extremo A y B del pilar considerado

$\alpha$  = factor de longitud de pandeo  $\ell_0 = \alpha \ell$   
 $\ell_0$  = Longitud de pandeo  $4 = \text{pilar en ménsula } (\ell_0 = 2 \ell)$

$\ell$  = luz libre de la pieza  $5 = \text{pilar biempotrado con extremos desplazables } (\ell_0 = 0,7 \ell)$

En relación con la interpretación de los ábacos de las figuras 45-7 y 45-8 son necesarias algunas puntualizaciones.

- La suma de rigideces  $\frac{EI}{\ell}$  de vigas, o en general de elementos que con su rigidez a flexión ejercen coacción al giro en cada extremo del pilar, debe considerarse para el plano en que se estudia el pandeo y para todas las piezas (vigas o pilares) que concurren en el nudo.

- EHE indica que se tome como valor de  $I$  el de la inercia bruta  $I_b$ , y presenta en esto una diferencia considerable con ACI 318-95 (45.3) que no dice nada en el articulado, pero en el Comentario indica los valores siguientes:

a-1) Módulo de elasticidad  $E_c$ . El valor instantáneo  $E'_{ci}$ .

a-2) Momentos de inercia

Vigas	$0,35 I_b$	
Pilares	$0,70 I_b$	[45.1]
Muros no fisurados	$0,70 I_b$	
Muros fisurados	$0,35 I_b$	
Placas y losas	$0,25 I_b$	

a-3) Áreas de las piezas  $A_c$  (Véase (45.4) y (45.5))

( $I_b$  es el momento de inercia de la sección bruta).

En todos los cálculos relativos a acciones permanentes, los momentos de inercia deben dividirse por  $(1 + \beta_d)$ , donde  $\beta_d$  es:

- Para estructuras intraslacionales, la relación del máximo esfuerzo axial permanente de cálculo, al máximo esfuerzo axial de cálculo.
- Para estructuras traslacionales  $\beta_d$  es la relación del máximo esfuerzo cortante horizontal de cálculo debido a cargas permanentes en la planta, al máximo valor de esfuerzo cortante de cálculo en la planta.
- En el caso analizado en 45.3.d se tomará para  $\beta_d$  el valor correspondiente a estructuras intraslacionales. El valor de  $\beta_d$  tiene en cuenta, de forma simplificada, la influencia de la fluencia en la curvatura de la pieza.

b) Radio de giro

En los métodos que luego se exponen, se emplea el radio de giro

$$i = \sqrt{\frac{I}{A_c}} \quad [45.2]$$

donde  $I$  es el momento de inercia y  $A_c$  el área de la sección bruta, respectivamente.

Para pilares de sección rectangular y circular los valores de  $i$  se indican en la figura 45.9.

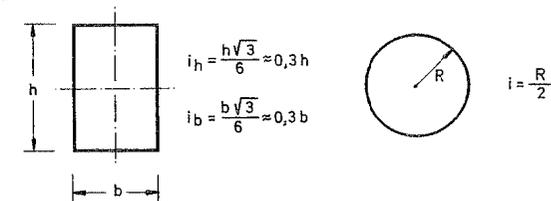


Figura 45.9

c) *Esbeltez*

Se define como *esbeltez* de un pilar el valor

$$\lambda = \frac{\ell_o}{i} \quad [45.3]$$

donde  $\ell_o = \alpha \ell$  es la longitud de pandeo. El valor  $\lambda$  es la *esbeltez mecánica*. Es frecuente el uso del concepto de *esbeltez geométrica*  $\lambda'$ , siendo

$$\lambda' = \frac{\ell_o}{h} \quad [45.4]$$

donde  $h$  es la dimensión de la pieza en la dirección en que se estudia el pandeo. (Para pilar de sección circular,  $h = 2 R$ .)

Para pilares de sección rectangular

$$\lambda' = 0,29 \lambda \quad [45.5]$$

Para pilares de sección circular

$$\lambda' = 0,25 \lambda \quad [45.6]$$

d) *Traslacionalidad e intraslacionalidad de la estructura*

Como se ha podido apreciar en el punto a), la longitud de pandeo y por tanto la esbeltez de la pieza, dependen muy estrechamente de que la estructura sea traslacional o intraslacional. El tema fue ya analizado en el apartado 10.4. Dos procedimientos alternativos válidos para cualquiera de los dos métodos expuestos más adelante, son los siguientes:

d-1) La Instrucción EHE, siguiendo al MODEL CODE CEB-FIP (45.6), acepta que una estructura puede considerarse como intraslacional si cumple la condición

$$h \sqrt{\frac{N}{\sum EI}} \leq 0,6 \quad \text{si } n \geq 4 \quad [45.7]$$

$$h \sqrt{\frac{N}{\sum EI}} \leq 0,2 + 0,1 n \quad \text{si } n < 4 \quad [45.8]$$

donde:

$n$  = Número de plantas de la estructura.

$h$  = Altura total de la estructura desde la cara superior de cimientos.

$N$  = Suma de cargas verticales, con la estructura totalmente cargada en estado de servicio.

$\sum EI$  = Suma de rigideces a flexión de los elementos de contraviento en la dirección considerada, tomando para el cálculo de  $I$  la sección bruta de hormigón.

EHE emplea la expresión "elementos de contraviento". El MODEL-CODE (45.6) emplea la expresión "elementos de rigidización", pero advierte que "la no traslacionalidad de las estructuras puede ser obtenida por pantallas o elementos de rigidización". Ninguna de las dos normas se define explícitamente sobre si la rigidez de los pilares puede ser tenida en cuenta o no. En nuestra opinión puede serlo, pero el proyectista debe darse cuenta con claridad de que la rigidez horizontal debe ser conseguida adoptando las disposiciones adecuadas en el momento de concebir el esquema general del edificio y que los pilares por sí solos no son una buena solución en edificios esbeltos por mucho que se pretenda afinar su cálculo.

d-2) La Norma Norteamericana ACI 318-95 (45.3) define como intraslacional la estructura si el incremento en los momentos de extremidad del pilar debido a los efectos de segundo orden (calculados de acuerdo con las hipótesis de (45.1)) no excede en más del 5% a los obtenidos en un cálculo de primer orden.

La definición es poco práctica y la propia Norma da un criterio más simple para establecer la condición de intraslacionalidad, que es:

$$\frac{(\sum P_d) A_o}{V_d \ell} \leq 0,05 \quad [45.9]$$

donde:

$\sum P_d$  es la suma de los esfuerzos axiales de cálculo en la planta considerada

$V_d$  es la resultante de esfuerzos cortantes en los pilares de la planta considerada

$A_o$  es el corrimiento horizontal relativo de la planta considerada, resultante del cálculo de primer orden

Es evidente que a pesar de lo dicho en 10.4 y de lo recogido en los anteriores puntos, el proyectista por el momento debe ejercer aquí su propio juicio de manera considerable.

## 45.2 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE

La Instrucción establece, como norma general, el estudio de la inestabilidad mediante métodos de cálculo no lineal, que tengan en cuenta la no linealidad geométrica y la no linealidad mecánica de la estructura, en función de los diagramas tensión-deformación del hormigón y del acero, habida cuenta de la fisuración y la fluencia. Existen estudios interesantes y entre ellos pueden destacarse los realizados por H. CORRES (45.7) y F. MORÁN (45.8) y el trabajo, de gran interés y amplitud sobre el tema de inestabilidad en general, contenido en el libro de J. L. LÓPEZ AGÜI (45.9).

Un estudio general debe tener en cuenta tanto la inestabilidad local de cada pieza aislada como la global de la estructura, considerando también la rigidez de los

nudos que puede ser diferente según se trate de estructuras ejecutadas "in situ" o prefabricadas. En los Comentarios al Artículo correspondiente de EHE se incluye un método que permite un mayor refinamiento de cálculo que el del articulado que se sigue<sup>1</sup>.

#### 45.2.1 ESTRUCTURAS TRASLACIONALES

Se comprobarán en general de acuerdo con lo expuesto en 45.2. Como excepción, en el caso de estructuras de edificación de menos de 15 plantas en las que el corrimiento horizontal máximo en el dintel de la última planta, bajo las acciones características, calculado mediante método de cálculo de primer orden partiendo de

secciones sin fisurar, no supere  $\frac{l}{750}$  de la altura total, podrá comprobarse

aisladamente cada pilar con la longitud de pandeo  $l_0$  deducida del nomograma de la figura 45-8 y el método expuesto en el apartado 45.2.2 para estructuras intraslacionales.

#### 45.2.2 ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES

En los casos en que se cumplan las condiciones [45.7] ó [45.8], puede comprobarse aisladamente cada pilar de acuerdo con lo siguiente:

- Si la esbeltez mecánica está comprendida entre 100 y 200 se aplicará el método general indicado en 45.2.
- Si la esbeltez mecánica está comprendida entre 35 y 100 se aplicarán los métodos expuestos en 45.2.2.1 ó 45.2.2.2.

En la práctica la esbeltez  $\lambda = 100$ , que corresponde en pilares de sección rectangular a la esbeltez geométrica  $\lambda' = 30$ , rara vez es alcanzada.

- Si la esbeltez mecánica es inferior a 35 pueden despreciarse los efectos de segundo orden y por tanto no comprobar las condiciones de inestabilidad.

##### 45.2.2.1 Método aproximado. Flexión compuesta recta

Para pilares de sección y armadura constantes, deberá dimensionarse la pieza para una excentricidad total igual a

$$e_{tot} = e_o + e_f \quad [45.10]$$

La excentricidad ficticia  $e_f$  viene dada por

$$e_f = (1 + 0,12 \beta) (\varepsilon_y + \varepsilon) \frac{h + 20 e_o}{h + 10 e_o} \cdot \frac{l_o^2}{50 i_c} \quad [45.11]$$

<sup>1</sup> Ambos están basados en la obra citada de LÓPEZ AGÜI (45.9).

donde:

$\beta$  = Factor de armado dado por la expresión

$$\beta = \frac{(d - d')^2}{4 i_s^2} \quad \text{donde } i_s \text{ es el radio de giro de la armadura, } \sqrt{\frac{I_s}{A_s}}, \text{ respecto al eje}$$

que pasa por el c.d.g. de la sección bruta.

Los valores de  $\beta$  para los casos más usuales vienen indicados en la Tabla T-45.1

**TABLA T-45.1**  
**VALORES DE  $\beta$**

DISPOSICIÓN DE LA ARMADURA	$i_s^2 = \frac{I_s}{A_s}$	$\beta$
	$\frac{1}{4} (d - d')^2$	1,0
	$\frac{1}{12} (d - d')^2$	3,0
	$\frac{1}{6} (d - d')^2$	1,5
	$\frac{1}{4} (d - d')^2$	1

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$\varepsilon$  = Parámetro que introduce el efecto de la fluencia. Se tomará

$\varepsilon = 0,003$  si el esfuerzo axil cuasi-permanente no supera el 70% de esfuerzo axil total de cálculo

$\varepsilon = 0,004$  si supera dicho valor<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Lo anterior corresponde a procesos de fluencia apreciables ( $\varepsilon = 0,003$ ) y a procesos muy intensos ( $\varepsilon = 0,004$ ). LÓPEZ AGÜI (45.9) sugiere  $\varepsilon = 0,002$  en los casos de sobrecargas predominantes y de posible crecimiento rápido, que no es un caso infrecuente.

$h$  = canto total de la sección de hormigón en mm.

$e_o$  = excentricidad de cálculo de primer orden equivalente, en mm, que viene dada por:

$e_o = 0,6 e_2 + 0,4 e_1 \leq 0,4 e_2$  para pilares intraslacionales

$e_o = e_2$  para pilares traslacionales

$e_2$  = es la excentricidad de cálculo máxima de primer orden en los extremos del pilar, tomada con signo positivo

$e_1$  = es la excentricidad de cálculo mínima de primer orden en los extremos del pilar, que se tomará con signo positivo si los momentos flectores en los extremos del pilar son del mismo signo y con signo negativo en otro caso

(Recordar que de acuerdo con lo establecido en el Capítulo 35,  $e_o$  no puede ser inferior a la excentricidad accidental  $\frac{h}{20}$  ó 20 mm.

$\ell_o$  = Longitud de pandeo, tomada de la figura 45-7 para entramados intraslacionales y de la figura 45-8 para los traslacionales

#### 45.2.2.2 Método aproximado. Flexión compuesta esviada

Para pilares de sección y armadura constantes, si se cumple (fig. 45-10) alguna de las dos condiciones

$$\frac{e_x/b}{e_y/h} \leq \frac{1}{4} \quad [45.12]$$

$$\frac{e_y/h}{e_x/b} \leq \frac{1}{4} \quad [45.13]$$

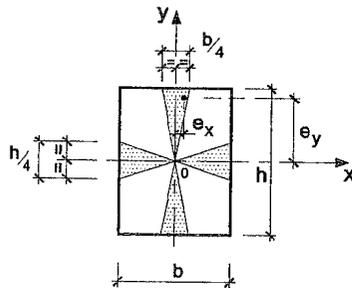


Figura 45-10

es decir, si la resultante de las excentricidades de cálculo  $e_x$ ,  $e_y$  está en las zonas sombreadas de la figura 45-10, pueden hacerse comprobaciones separadas según los dos planos principales.

Si no se cumple ninguna de las condiciones [45.12], [45.13], puede emplearse la comprobación conservadora.

$$\frac{M_{xd}}{M_{xu}} + \frac{M_{yd}}{M_{yu}} \leq 1 \quad [45.14]$$

donde  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$  son los momentos de cálculo, considerando los efectos de segundo orden, (es decir con los valores  $e_{rot}$  según [45.10]), en los planos principales y  $M_{xu}$ ,  $M_{yu}$  los momentos últimos correspondientes.

#### 45.3 MÉTODO DE LA NORMA ACI 318-95

El American Concrete Institute introdujo ya en su Norma en la edición de 1971 el método que a continuación se expone, basado en un conjunto de estudios analíticos y en comprobaciones de numerosas series de ensayos. El método fue mantenido en las ediciones de 1977, 1983 y 1986 y se reprodujo con mejoras paulatinas en la edición de 1989 y sobre todo en la actual de 1995, que se recogen a continuación. El método es más completo, a nuestro juicio, que el del articulado de EHE anteriormente expuesto.

##### a) Campo de aplicación del método

En primer lugar, de acuerdo con el método *no es necesario el cálculo a pandeo* en los dos casos siguientes:

- En estructuras intraslacionales, si se cumple la condición

$$\lambda \leq 34 - 12 \frac{M_{1d}}{M_{2d}} \quad [45.15]$$

$M_{1d}$  es el menor momento de cálculo en los extremos del pilar, positivo si la deformada del pilar tiene una sola curvatura y negativo si tiene doble curvatura.

$M_{2d}$  es el mayor momento de cálculo en los dos extremos del pilar, siempre positivo.

$M_{1d}$ ,  $M_{2d}$  se obtienen por un cálculo de primer orden aplicando las excentricidades mínimas accidentales, si ha lugar. Si el cálculo

conduce a  $M_{1d} = M_{2d} = 0$  se toma en [45.15]  $\frac{M_{1d}}{M_{2d}} = 1$ . En

todo caso  $\frac{M_{1d}}{M_{2d}} \leq -0,5$

- En estructuras traslacionales, si se cumple la condición

$$\lambda \leq 22 \quad [45.16]$$

El método no es aplicable para casos en que  $\lambda > 100$ , que deben ser resueltos por análisis no lineal.

b) *Cálculo del momento incrementado*

Cuando es necesario el cálculo a pandeo, el método parte de incrementar los momentos máximos actuantes sobre el pilar, obtenidos mediante el cálculo de primer orden, multiplicándolos por unos factores  $\delta_t$ ,  $\delta_i$  de forma que el pilar se calcula para el esfuerzo axil  $N_d$ , obtenido del cálculo de primer orden y para un momento flector

$$M'_d = \delta_i M_{2d,i} + \delta_t M_{2d,t} \quad [45.17]$$

donde  $M_{2d,i}$  es el mayor momento de cálculo en los dos extremos del pilar debido a aquellas acciones que no producen traslación apreciable, siempre positivo. En estructuras intraslacionales  $M_{2d,i}$  es el momento debido a las cargas totales y  $M_{2d,t}$  es el mayor momento de cálculo en los extremos del pilar, debido a aquellas acciones que producen traslación apreciable, considerado siempre como positivo.

Tanto en [45.15] como en [45.17], en general no hay duda sobre qué acciones producen o no traslación apreciable. Sin embargo, en algunos casos especiales puede surgir alguna confusión. Por ejemplo, acciones verticales con distribución asimétrica sobre una estructura traslacional o en forma simétrica sobre una estructura asimétrica traslacional, podrían producir "traslación apreciable". En caso de duda, se entiende que la traslación es apreciable si el corrimiento  $\Delta$  entre cabeza y pie de pilar en la planta considerada es tal que

$$\frac{\Delta}{h_s} > \frac{1}{1.500} \quad [45.18]$$

En [45.18]  $\Delta$  es el corrimiento debido a las acciones verticales y  $h_s$  la luz libre del pilar (45.4).

$\delta_i$  y  $\delta_t$  vienen dadas por las expresiones

$$\delta_i = \frac{C_m}{1 - \frac{N_d}{0,75 N_c}} \leq 1 \quad [45.19]$$

$$\delta_t = \frac{1}{1 - \frac{\sum N_d}{0,75 \sum N_c}} \leq 1 \quad [45.20]$$

siendo  $N_d$  el esfuerzo axil de cálculo y  $N_c$  la carga crítica de pandeo de EULER

$$N_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell_o^2} \quad [45.21]$$

$\delta_i$  se calcula con los esfuerzos  $N_d$ ,  $N_c$  del pilar que se comprueba. En el valor [45.20] de  $\delta_t$  la suma se extiende a todos los pilares de la planta considerada.

En estructuras intraslacionales, el valor de  $M_{2d,t}$  es nulo. En este caso para el cálculo en  $\delta_i$  se emplea el valor  $\ell_o$  deducido de la figura 45-7.

En estructuras traslacionales, el valor de  $\delta_i$ , se toma igual a 1 y se calculará  $\delta_t$  con el valor  $\ell_o$  deducido del gráfico de la figura 45-8.

Para el cálculo del valor  $EI$  en  $N_c$ , según [45.21], debe emplearse, a falta de cálculos más exactos, el valor

$$EI = \frac{\frac{E'_{ci} I_b}{5} + E_s I_s}{1 + \beta_d} \quad [45.22]$$

donde:

$E'_{ci}$  = Módulo de deformación del hormigón para cargas de duración breve.

$I_b$  = Momento de inercia de la sección bruta de hormigón, respecto al eje que pasa por el c.d.g. de la sección sin fisurar.

$E_s$  = Módulo de elasticidad del acero de la armadura.

$I_s$  = Momento de inercia de la armadura respecto al eje que pasa por el c.d.g. de la sección sin fisurar.

$\beta_d$  = Valor ya definido en 45.1.

El valor de  $C_m$  a utilizar en [45.19], es:

- Para estructuras intraslacionales, sin acciones transversales directas en la luz del pilar,

$$C_m = 0,6 + 0,4 \frac{M_{1d}}{M_{2d}} \leq 0,4 \quad [45.23]$$

- Para estructuras traslacionales o intraslacionales con acciones transversales directas en la luz del pilar

$$C_m = 1 \quad [45.24]$$

Si existen acciones transversales directas en la luz del pilar, el momento máximo total puede no ocurrir en un extremo de la pieza. En ese caso además de tomar  $C_m = 1$ , en la fórmula [45.19], para el cálculo de  $M'_d$  se tomará como valor  $M_{2d,i}$  el mayor momento a lo largo de la luz del pilar<sup>1</sup>.

Si el cálculo de primer orden conduce a momentos que son menores que los correspondientes a una excentricidad accidental mínima

$$e_a = 15 + 0,003 h \quad [45.25]$$

( $e_a$  en mm para  $h$  en mm)

<sup>1</sup> Es claro que puede ocurrir que los momentos  $M_{2d,i}$  y  $M_{2d,t}$  no ocurran físicamente en la misma sección del pilar.

$M_{2d,i}$  en la ecuación de  $M'_{d,i}$  [45.17], se tomará como el correspondiente a esa excentricidad mínima en cada dirección de pandeo considerada.

En este caso en la relación  $\frac{M_{1d,i}}{M_{2d,i}}$  a introducir en [45.15] se tomará:

- Si las excentricidades de los momentos de cálculo son inferiores a [45.25], se emplearán los valores de cálculo.
- Si no existen momentos se tomará la relación igual a 1.

Si el cálculo de primer orden conduce a la no existencia de momentos en los extremos de un pilar de una estructura traslacional, o las excentricidades resultantes son inferiores al valor  $e_d$  dado por [45.25], en la ecuación [45.17] se adoptará para el cálculo de  $M_{2d,i}$  el correspondiente a la excentricidad mínima en cada dirección separadamente.

c) *Caso de pilares muy esbeltos*

Si un pilar tiene una esbeltez mecánica

$$\frac{\ell_o}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{N_d}{f_{ck} A_c}}} \quad [45.26]$$

debe comprobarse a pandeo para un esfuerzo axial  $N_d$  y un momento  $M_d$  calculado por la fórmula

$$M_d = \delta_i M_{2d} \quad [45.27]$$

donde  $M_{2d}$  se calcula por la fórmula

$$M_{2d} = M_{2d,i} + \delta_i M_{2d,i} \quad [45.28]$$

En este cálculo, los valores de  $\beta_d$  y de  $\ell_o = \alpha \ell$  deben ser los expuestos anteriormente.

Este caso corresponde a pilares en los que, por su esbeltez, el máximo momento flector puede no ocurrir en los extremos del pilar.

d) *Pandeo del conjunto de la estructura*

Cuando existen acciones laterales, debe comprobarse la estabilidad de la estructura como conjunto, sometida también a las cargas verticales.

Para asegurar esta estabilidad cuando  $\delta_i M_{d,i}$  se calcula de acuerdo con [45.20], con valores de  $N$  correspondientes a las cargas permanentes más las variables, el valor  $\delta_i$  no debe superar el valor 2,5. En el cálculo debe tenerse en cuenta el valor de  $\beta_d$  correspondiente.

e) *Momentos incrementados a considerar en las vigas*

En estructuras traslacionales, las vigas deben ser comprobadas para garantizar que resisten en sus extremos momentos no menores que los correspondientes valores  $M'_d$  deducidos de [45.17].

Un criterio suficientemente aproximado es repartir la suma algebraica de momentos  $M'_d$ , de empotramiento del nudo sobre los pilares que en él concurren, entre las vigas en proporción a sus rigideces.

La razón de lo anterior es que la resistencia de una estructura traslacional depende de la estabilidad de sus pilares y, por tanto, del grado de coacción al giro que proporcionen las vigas. Si en éstas se forman rótulas plásticas la estructura se transformaría en un mecanismo.

**EJEMPLO 45.1**

Se considera un pilar de sección circular de 300 mm de diámetro, armado con 6  $\phi$  16. Hormigón H-25. Acero B 400S.  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ . El pilar está situado en una estructura intraslacional y sometido a un esfuerzo axial  $N_d = 800$  kN y a unos momentos en los extremos de igual signo y valor  $M_d = 20$  mkn. El 50% del momento es debido a acciones verticales y el 50% a acciones de viento. La luz libre del pilar es de 3,50 m. Los pilares de la planta superior e inferior son iguales al considerado. Los dinteles en cabeza y pie del pilar son vigas cuyas luces libres en los dos vanos contiguos son de 6 m, con  $I_b = 10.400.000$  mm<sup>4</sup>. Comprobar el pilar a pandeo.

*Solución*

Resolvemos el problema por los dos métodos expuestos.

a) *Método de la Instrucción EH-88*

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{(25+8)^2} = 87.450 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{En vigas } (EI)_v = 87.450 \cdot 10.400.000 = 9,09 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$\text{En pilares } (EI)_p = 87.450 \cdot \frac{\pi \cdot 150^4}{4} = 3,48 \cdot 10^{13} \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

$$\left(\frac{EI}{\ell}\right)_v = \left(\frac{9,09 \cdot 10^{11}}{6.000}\right) = 1,52 \cdot 10^8$$

$$\left(\frac{EI}{\ell}\right)_p = \frac{3,48 \cdot 10^{13}}{3.500} = 9,94 \cdot 10^9$$

$$\psi_A = \psi_E = \frac{2 \cdot 9,94 \cdot 10^9}{2 \cdot 1,52 \cdot 10^8} = 65,39$$

$$\alpha = 1 \quad \ell_o = 3,50 \cdot 1 = 3,50 \text{ m}$$

$$i_c = \frac{150}{2} = 75 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{3.500}{75} = 46,67$$

$$e_o = \frac{20}{800} = 0,025 \text{ m} = 25 \text{ mm}$$

$$e_f = (1 + 0,12 \cdot 1) \left( \frac{400}{1,15 \cdot 200.000} + 0,003 \right) \frac{300 + 20 \cdot 25}{300 + 10 \cdot 25} \cdot \frac{3.500^2}{50 \cdot 75} = 25,22 \text{ mm}$$

$$e_{tot} = 25 + 25,22 = 50,2 \text{ mm}$$

$$\text{Para } N_d = 800 \text{ kN}$$

$$M_d = 800 \cdot 0,0502 = 40,18 \text{ m kN}$$

$$\text{Entrando en el ábaco GT-99 con } f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,67 \text{ MPa}$$

$$\text{con } v = \frac{800.000}{0,785 \cdot 300^2 \cdot 16,67} = 0,68$$

$$\mu = \frac{40.180.000}{0,785 \cdot 300^3 \cdot 16,67} = 0,114$$

se obtiene:

$$\omega = 0,27$$

$$\frac{A_s \cdot \frac{400}{1,15}}{0,785 \cdot 300^2 \cdot 16,67} = 0,27$$

$$A_s = 914 \text{ mm}^2$$

$$6 \phi 16 = 6 \cdot 201 = 1206 \text{ mm}^2$$

luego el pilar tiene seguridad suficiente frente al pandeo.

b) Método de ACI 318-95

Comenzaremos por calcular  $C_m$ . De acuerdo con [45.23]

$$C_m = 0,6 + 0,4 \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Con } \beta_d = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\left( \frac{EI}{\ell} \right)_v = E \cdot 0,3 I_b = 0,46 \cdot 10^8$$

$$\left( \frac{EI}{\ell} \right)_p = E \cdot 0,7 I = 6,96 \cdot 10^9$$

$$\psi_A = \psi_B = \frac{2 \cdot 6,96 \cdot 10^9}{2 \cdot 0,46 \cdot 10^8} = 151,3$$

$$\alpha = 1 \quad \ell_o = 3,5 \cdot 1 = 3,50 \text{ m}$$

$$\text{En el pilar } (EI)_p = 3,48 \cdot 10^{13} + 6 \cdot 201 \cdot 122^2 \cdot \frac{200.000}{87.450} = 3,48 \cdot 10^{13}$$

$$N_c = \frac{3,14^2 \cdot \frac{3,48 \cdot 10^{13}}{1 + 0,5}}{3.500^2} = 18.672.875 \text{ N} = 18.673 \text{ kN}$$

$$N_d = 800 \text{ kN}$$

$$\delta_i = \frac{1}{1 - \frac{800}{0,75 \cdot 18.673}} = 1,06$$

$$\delta_i = 1$$

$$M'_d = 1,06 \cdot 20 = 21,2 \text{ m kN}$$

$$N_d = 800 \text{ kN}$$

De esto,  $v = 0,68$ ,  $\mu = 0,06$ , y del ábaco GT-99,  $\omega = 0,26$ , resultando  $A_s = 271 \text{ mm}^2 < 6 \phi 16$ , luego el pilar está en buenas condiciones en cuanto a la comprobación de pandeo.

f) Aplicación del método para flexión esviada

Si un pilar está sometido a flexión esviada, el método del ACI se aplica incrementando de acuerdo con [45.17] los momentos en cada dirección  $x$ , y a valores  $M'_{xd}$  y  $M'_{yd}$  y calculando el pilar en flexión esviada para esos momentos y el esfuerzo axil de cálculo  $N_d$ .

Los valores  $\delta_i$  y  $\delta_r$  serán en general diferentes en cada dirección por serlo las luces libres, las rigideces  $EI$  y las sumas  $\sum \frac{EI}{\ell}$ .

Recuérdese que la flexión debida a la excentricidad accidental se comprueba independientemente en cada dirección y no en flexión esviada.

#### 45.4 MÉTODO DE LA COLUMNA MODELO DEL CEB

En el MODEL CODE (45.6) se incluye el método de la columna modelo, que no exponemos, ya que resulta de una gran complejidad si no se dispone de una colección de ábacos muy completa, que no existe todavía.

El manual "BUCKLING AND INSTABILITY" del CEB (45.10) contiene información amplia sobre el tema.

#### 45.5 CASO DE EXISTENCIA DE TORSIONES ADEMÁS DE TRASLACIONES

Si por la disposición geométrica de la estructura o por las acciones aplicadas, la estructura además de traslaciones sufre torsiones en planta, los métodos simplificados expuestos no son aplicables y solamente el cálculo no lineal puede proporcionar resultados correctos.

#### 45.6 CASO DE PANDEO EN SENTIDO PERPENDICULAR AL PLANO MEDIO DEL ENTAMADO

En ciertos casos pueden presentarse disposiciones en planta como la indicada en la figura 45-11, en las que el esquema estructural es de entramados longitudinales paralelos. Es evidente que para un pilar como el A, el pandeo no sólo es posible en la dirección  $x$ , es decir, en el plano del entramado, tema resuelto aceptablemente en los apartados anteriores, sino que puede ocurrir en la dirección  $y$ . La coacción en esta dirección está proporcionada por los forjados y no por vigas, por lo que en general los coeficiente  $\psi_A$  y  $\psi_B$  serán superiores en la dirección  $y$  que en la dirección  $x$ . Si el canto en dirección  $y$  no es bastante superior al que tiene el pilar en dirección  $x$ , la esbeltez y por tanto el riesgo de pandeo, pueden ser mayores en el sentido  $y$  que en el  $x$ . Ni EHE ni ACI 318-95 dan indicaciones para el cálculo en este caso.

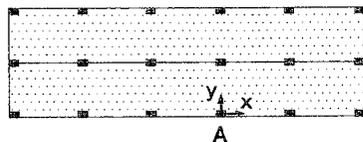


Figura 45.11

Como método razonable se sugiere el que ya expusimos en los apartados 8.7 y 19.4.2, tanto para el cálculo de los momentos en la dirección  $y$  como para la evaluación de las rigideces a considerar para el cálculo de los valores  $\psi$ .

#### 45.7 INESTABILIDAD LATERAL DE VIGAS

El problema es poco frecuente, pero en el caso de vigas exentas y de escasa rigidez transversal, puede presentarse. Es más común en piezas prefabricadas (en especial en fases intermedias de montaje), que en estructuras "in situ" (fig. 45-12).

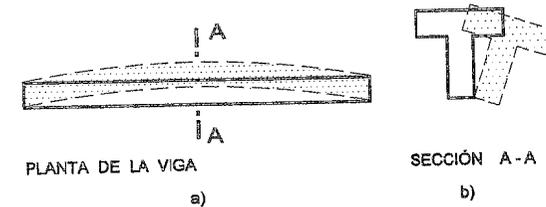


Figura 45.12

El problema se presenta siempre como una combinación de pandeo lateral y torsión.

La información disponible es muy poca, pues son sumamente escasos los trabajos experimentales sobre el tema. Un trabajo interesante es el de MARSHALL (45.11) que conduce a una fórmula aproximada para el momento crítico de inestabilidad transversal de una viga de sección rectangular de ancho  $b$  y canto útil  $d$ .

$$M_{cr} = \frac{160\varphi f_{ck} b^3 d}{\ell} \quad [45.29]$$

siendo  $f_{ck}$  la resistencia del hormigón y  $\ell$  la luz.  $\varphi$  es un factor de reducción para el que PARK y PAULAY (45.5) sugieren el valor de 0,5.

La Norma Inglesa CP-110 (45.12), en su apartado 3.3.1.3 establece que para garantizar la estabilidad lateral de una viga simplemente apoyada o continua, debe dimensionarse de forma que la distancia entre puntos de arriostramiento transversal no exceda al menor de los límites siguientes

$$60 b_c \quad [45.30]$$

$$250 \frac{b_c^2}{d} \quad [45.31]$$

donde  $d$  es el canto útil y  $b_c$  el ancho de la cabeza comprimida en la sección de la viga equidistante de los puntos de arriostramiento.

Para voladizos con arriostramiento transversal exclusivamente en el arranque, la luz libre no debe exceder el menor de los límites siguientes

$$25 b_c \quad [45.32]$$

$$100 \frac{b_c^2}{d} \quad [45.33]$$

El EUROCÓDIGO EC-2 (45.13) recomienda tanto para vigas armadas como pretensadas que el ancho de la cabeza comprimida  $b$  cumpla las condiciones:

$$b \geq 0,02 L \quad [45.34]$$

$$b \geq 0,2 h \quad [45.35]$$

donde  $L$  es la luz entre apoyos y  $h$  el canto total.

Dos estudios importantes sobre inestabilidad lateral de vigas pretensadas son los contenidos en (45.11) y (45.15).

### BIBLIOGRAFÍA

- (45.1) "Comentary and Specifications for the Design, Fabrication, and Erection of Structural Steel for Buildings". American Institute of Steel Construction. (AISC). New York 1969.
- (45.2) ACI Committee 340. "Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77". American Concrete Institute. Detroit. 1978.
- (45.3) ACI 318-95. "Building Code Requirements for Structural Concrete". Detroit. 1995.
- (45.4) BREEN, J.E.; MAC GREGOR, J.G.; PFRANG, E. O. "Determination of Effective Length Factors for Slender Concrete Columns". Journal ACI. November 1972.
- (45.5) PARK, R., and PAULAY, T. "Reinforced Concrete Structures". John Wiley & Sons. New York. 1975.
- (45.6) CEB-FIP MODEL CODE FOR CONCRETE STRUCTURES. 1990.
- (45.7) CORRES, H.; MORÁN, F. "Reference curvature method". Bulletin d'information C.E.B. n° 155 "Buckling and Instability". Sept. 1983.
- (45.8) CORRES, H.; MORÁN, F. "Analysis for slender reinforced concrete columns with the general method". C.E.B. Permanent Commission III "Buckling and Instability". Budapest. April 1982.
- (45.9) LÓPEZ AGÜI, J.L.; "Estabilidad de Pilares Esbeltos de Hormigón. Estado Límite Último de Inestabilidad." LOENCO. Madrid 1997.
- (45.10) CEB-FIP "Manual of Buckling and Instability". The Construction Press. Lancaster. 1978.
- (45.11) MARSHAL, W. T. "A survey of the Problem of Lateral Instability in Reinforced Concrete Beams". Proceedings of the Institution of Civil Engineers. July 1969.
- (45.12) Norma BS 8110 "Structural use of concrete". Part 1: "Code of practice for design and construction". Part 2: "Code of practice for special circumstances". Part 3: "Design charts for singly reinforced beams, doubly reinforced beams and rectangular columns". British Standards Institution. 1985.
- (45.13) EUROCÓDIGO EC-2. "Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación".
- (45.14) WILBY, Ch. B.; "Elastic Stability of Post-tensioned Prestressed Concrete Members". Edward Arnold. London. 1964.
- (45.15) MAST, R.F.; "Lateral Stability of Long Prestressed Concrete Beams". Part 1. PCI Journal, January-February 1989. Part 2. PCI Journal, January-February 1993.

## CAPÍTULO 46

### ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE FATIGA

#### 46.1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años, ha aumentado considerablemente el interés por los fenómenos de fatiga. Ello es debido a motivos diversos, entre los cuales debe destacarse el empleo de materiales de resistencia cada vez mayor, a tensiones cada vez más altas, la ampliación de la construcción de estructuras a campos, especialmente en edificios industriales, cada vez más propicios a sufrir fenómenos de fatiga y, finalmente, a un mejor conocimiento de los daños ocasionados por este fenómeno.

La Instrucción EHE trata el tema sucintamente. No lo hace el EUROCÓDIGO EC-2, pero tanto el ACI, en la Norma ACI 215R-74 (Revisada 1992) "Considerations for Design of Concrete Structures Subjected to Fatigue Loading" (46.1), como el C.E.B., en el MODEL CODE CEB-FIP 1990 (46.2), tratan el tema en detalle. Las referencias (46.3) y (46.4) contienen también información importante sobre el fenómeno de fatiga. Tres trabajos recientes e importantes figuran en las referencias (46.5), (46.6) y (46.7).

**Debe recalarse que los problemas de fatiga sólo pueden presentarse si la estructura presenta, simultáneamente, las dos características siguientes:**

- a) Las oscilaciones de tensiones en el hormigón y/o en la armadura son importantes.
- b) Dichas oscilaciones se presentan millones de veces durante la vida útil de la estructura.

## 46.2 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

### 46.2.1 HORMIGÓN

Bajo cargas repetidas, el hormigón puede fisurarse e incluso alcanzar la rotura bajo cargas inferiores a su resistencia en ensayo estático. La resistencia a la fatiga depende de la oscilación de la tensión, historia de carga, características del hormigón, etc.

La fatiga es un proceso de daño estructural progresivo. Por ejemplo, para  $10^6$  ciclos, la resistencia del hormigón a compresión es del orden del 50% de su resistencia estática.

La figura 46-1 permite una estimación más precisa de las tensiones de tracción, compresión o flexión entre las cuales puede oscilar la tensión del hormigón durante  $10^6$  ciclos. Obsérvese que, para  $\sigma_{min} = 0$ ,  $\sigma_{max} = 0,5$  de la resistencia estática, la resistencia a fatiga es el 50% de la estática.

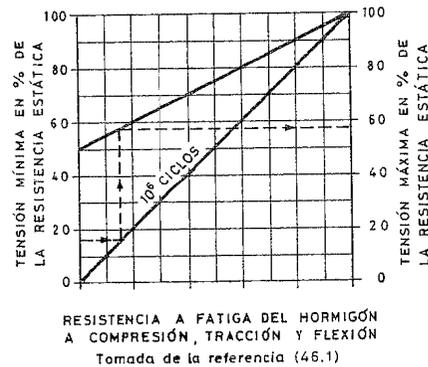


Figura 46-1

### 46.2.2 ACERO

También el acero experimenta el fenómeno de fatiga. La resistencia a fatiga de barras corrugadas está ligada a muchas variables, entre las cuales deben destacarse:

- Tensiones mínima y máxima.
- Diámetro.
- Tipo de corrugado.
- Límite elástico.
- Carga de rotura.
- Proceso de fabricación del acero.

Un diagrama típico de fatiga es el proporcionado por el MODEL CODE 90 (figura 46-2).

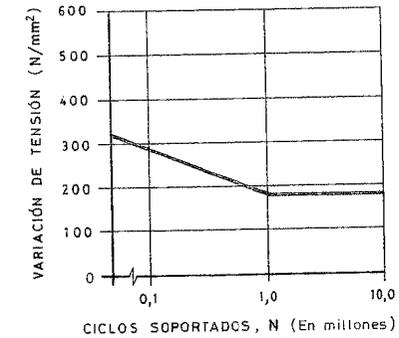


Figura 46-2

Los diagramas de este tipo suelen denominarse diagramas  $s - n$  ( $s$ , oscilación de tensión,  $n$ , número de ciclos).

Sin embargo, el comportamiento ante la fatiga de las barras desnudas no es igual que el de las barras embebidas en el hormigón. (Véase (46.1)).

El ensayo en barra desnuda es, sin embargo, de uso frecuente, pues es de duración corta y de realización simple. Véase, por ejemplo, D.A. BASCOY (46.8), para un ensayo abreviado.

## 46.3 MÉTODO DE CÁLCULO A FATIGA DE EHE

Tanto para armaduras activas como pasivas, la estructura se considera suficientemente segura frente a fatiga si se cumple la condición

$$\Delta\sigma_{sf} \leq \Delta\sigma_D \quad [46.1]$$

donde  $\Delta\sigma_{sf}$  es la máxima variación de tensión en la armadura debida a las sobrecargas que producen fatiga.

$\Delta\sigma_D$  es la tensión límite de fatiga, que viene dada en la tabla T-46.1

TABLA T-46.1

LÍMITE DE FATIGA PARA ARMADURAS PASIVAS Y ACTIVAS

Tipo de acero	Límite de fatiga $\Delta\sigma_D$ [N/mm <sup>2</sup> ]	
	Adherencia directa	Adherencia dentro de vainas de acero
Armaduras pasivas		
-Barras	150	---
-Mallas electrosoldadas	100	---
Armaduras activas		
-Alambres	150	100
-Cordones constituidos por 7 alambres	150	100
-Barras de pretensado	---	100

En el caso de barras dobladas, salvo información específica, el límite de fatiga proporcionado en la tabla debe reducirse de acuerdo con la fórmula

$$\Delta\sigma_{D,red} = \left(1 - 3 \cdot \frac{\phi}{D}\right) \Delta\sigma_D \quad [46.2]$$

donde  $\phi$  es el diámetro de la barra y  $D$  el de doblado.

Esta reducción no se aplica a los estribos si su diámetro no supera los 10 mm.

46.4 MÉTODO DE CÁLCULO A FATIGA DEL MODEL CODE 90

El método es aplicable a estructuras sometidas a procesos de fatiga superiores a 10<sup>4</sup> ciclos.

46.4.1 MÉTODO SIMPLIFICADO

El método sólo es aplicable a estructuras sometidas a no más de 10<sup>8</sup> ciclos.

Comprobación para el acero

No necesita realizarse un estudio detallado de fatiga si bajo la combinación de acciones frecuente, la variación máxima prevista de tensión en el acero,  $\Delta\sigma_{s,máx}$  cumple la condición

$$\gamma_{f,fat} \cdot \Delta\sigma_{s,máx} \leq \frac{\Delta\sigma_{RC}}{\gamma_{s,fat}} \quad [46.3]$$

donde  $\Delta\sigma_{RC}$  es la resistencia característica del acero a fatiga, que se indica en la Tabla T-46.2. El MODEL CODE 90 adopta  $\gamma_{s,fat} = 1,15$  y  $\gamma_{f,fat} = 1,1$ .

TABLA T-46.2

VALORES DE  $\Delta\sigma_{RC}$  EN N/mm<sup>2</sup>

	A 10 <sup>6</sup> ciclos	A 10 <sup>8</sup> ciclos
	Estructuras alejadas de la costa con barras rectas o dobladas con $D \geq 25\phi$	160
Estructuras alejadas de la costa con barras dobladas con diámetros $D < 25\phi$	$160 \cdot K^{(*)}$	$95 \cdot K^{(*)}$
Estructuras en ambiente marino	65	40

$$(*) K = 0,35 + 0,026 \frac{D}{\phi}$$

Comprobación para el hormigón

No es necesario realizar un estudio detallado si bajo la combinación frecuente de acciones la tensión máxima de compresión,  $\sigma_{c,máx}$  y la de tracción,  $\sigma_{ct,máx}$  cumplen, respectivamente, las condiciones

Compresión

$$\gamma_{f,fat} \cdot \sigma_{c,máx} \leq 0,45 f_{cd,fat} \quad [46.4]$$

Tracción

$$\gamma_{f,fat} \cdot \sigma_{ct,máx} \leq 0,33 f_{ctd,fat} \quad [46.5]$$

donde

$$f_{cd,fat} = \frac{\left[0,85 \beta_{cc}(t) f_{ck} \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)\right]}{\gamma_{c,fat}} \quad [46.6]$$

donde  $\beta_{cc}(t)$  se definió en [28.13]

$$f_{ctd,fat} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_{c,fat}} \quad [46.7]$$

siendo

$$f_{ctk} = 0,39 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad [46.8]$$

Las unidades en [46.6] y [46.8] son MPa.

$\gamma_{c,fat}$  se toma igual a  $1,5 \cdot \gamma_{f,fat} = 1,1$

#### 46.4.2 MÉTODO MEDIANTE UN NIVEL ÚNICO DE CARGA

Es más preciso que el anterior y permite tener en cuenta la duración del período de vida de fatiga.

*Comprobación para el acero*

Debe cumplirse la condición

$$\gamma_{fat} \cdot \Delta \sigma_{s,max} \leq \frac{\Delta \sigma_s(n)}{\gamma_{s,fat}} \quad [46.9]$$

donde,

$n$  = Número de ciclos previsto en la vida de la estructura.

$\Delta \sigma_s(n)$  = Variación de tensiones correspondiente a los  $n$  ciclos, obtenido a partir de una curva de fatiga del acero.

La curva de fatiga del acero es del tipo bilineal de la figura 46-3 y viene dada por una función de la forma

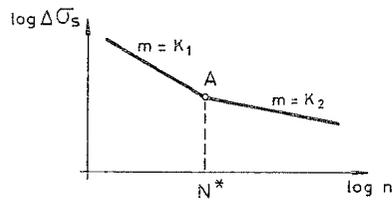


Figura 46-3

$$\left(\frac{\Delta \sigma_s}{10}\right)^m \cdot n = C = \text{constante} \quad [46.10]$$

o bien

$$m \log \Delta \sigma_s + \log n = \log C + m \quad [46.11]$$

con lo que se tienen las rectas de la figura 46-3.

Los valores de  $m$ ,  $k_1$  y  $k_2$ , para los dos tramos de recta, se obtienen en la Tabla T-46.3.

TABLA T-46.3  
PARÁMETROS DE CURVAS  $s - n$  DE FATIGA  
PARA ARMADURAS DE HORMIGÓN ARMADO

TIPO DE BARRAS	$N^*$ (Ver fig. 46-3)	$\Delta \sigma_s(N^*)$ para $N^*$ ciclos	$\Delta \sigma_{RC}$ para $10^8$ ciclos	$k_1$	$k_2$
Barras rectas y barras dobladas con diámetro de doblado $D \geq 25 \phi$ $\phi \leq 16 \text{ mm.}$ $\phi > 16 \text{ mm.}$	$10^6$ $10^6$	210 160	125 95	5 5	9 9
Barras dobladas con $D < 25 \phi$ (**)	$10^6$	(**)	(**)	5	9
Barras soldadas por resistencia o a tope con electrodo (*)	$10^7$	50	30	3	5
Conectores mecánicos (*)	$10^7$	50	30	3	5
Barras en ambiente marino (*)	$10^7$	65	40	3	5

Nota: Si se emplean barras soldadas a tope, salvo justificaciones en contrario los valores de la tabla deben reducirse al 50%.

(\*) La mayoría de las curvas  $s - n$  cortan a la curva de la correspondiente barra recta. En tales casos, la resistencia a fatiga de la barra recta es válida para números de ciclos inferiores al correspondiente al punto de intersección.

(\*\*) El valor correspondiente es el del caso de barra recta multiplicado por un factor

$$\xi = 0.35 + 0.026 \frac{D}{\phi}$$

**TABLA T-46.4**  
**PARÁMETROS DE LAS CURVAS S-N PARA ACERO DE PRETENSADO**  
**(EMBEBIDO EN HORMIGÓN)**

ACERO DE PRETENSADO	N*	Exponente de la tensión		$\Delta \sigma_{Rsk}$ (MPa)	
		k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	A N* ciclos	A 10 <sup>8</sup> ciclos
<i>Pretesado</i> Aceros rectos	10 <sup>6</sup>	5	9	160	95
<i>Postesado</i> Tendones curvos <sup>(a)</sup>	10 <sup>6</sup>	3	7	120	65
Tendones rectos	10 <sup>6</sup>	5	9	160	95
Conectores mecánicos	10 <sup>6</sup>	3	5	80	30

<sup>(a)</sup> Si la curva S-N corta la de la barra recta, es válida la resistencia a fatiga de la barra recta.

Conocido el punto A de coordenadas [N\*,  $\Delta \sigma_s$  (N\*)], proporcionadas por la tabla, a partir de él se trazan las rectas para  $m = k_1$  y  $m = k_2$ , con el coeficiente angular

$$-\frac{1}{k_1} \text{ ó } -\frac{1}{k_2}, \text{ respectivamente.}$$

Como en el método anterior, se adopta

$$\gamma_{i,fat} = 1,1 \quad \gamma_{c,fat} = 1,15$$

#### Comprobación para el hormigón

El método se aplica en el supuesto pésimo de hormigón en estado húmedo. (Para correcciones en función de la humedad, véase (46.9)).

Las curvas s - n que se utilizan para el hormigón son válidas en el supuesto de que la frecuencia de la acción que produce la fatiga es mayor que 0,1 Herzios, lo cual se cumple habitualmente. Para frecuencias inferiores a 0,1 Herzios, véase (46.9).

La comprobación es correcta si se cumple la condición

$$n \leq N \quad [46.12]$$

donde N se calcula a partir de las funciones de fatiga, que son:

Para compresión

$$\log N = \frac{10 \left( 1 - \gamma_{fat} \frac{\sigma_{c,máx}}{f_{cd,fat}} \right)}{\sqrt{1-R}} \quad [46.13]$$

donde:

$$R = \frac{\sigma_{c,mín}}{\sigma_{c,máx}}, \text{ es la relación de la tensión mínima a la máxima, en el hormigón.}$$

Para tracción

$$\log N = 12 \left( 1 - \gamma_{fat} \frac{\sigma_{ct,max}}{f_{ctd,fat}} \right) \quad [46.14]$$

Si  $\sigma_{c,mín}$  es de tracción y  $\sigma_{c,máx}$  de compresión, han de cumplirse simultáneamente [46.13] y [46.14].

El coeficiente  $\gamma_{fat}$  se toma igual a 1,15.

Si las condiciones exigidas no se cumplen, es necesario proyectar de nuevo la sección, variando la armadura, la sección de hormigón o ambas.

#### BIBLIOGRAFÍA

- (46.1) "Considerations for Design of Concrete Structures Subjected to Fatigue Loading" (ACI 215R-74. Revised 1992). American Concrete Institute. Detroit. 1992.
- (46.2) CEB-FIP MODEL CODE 1990.
- (46.3) "Fatigue of Concrete Structures". Publication SP-75. American Concrete Institute. Detroit. 1982.
- (46.4) "Fatigue of Steel and Concrete Structures". IABSE Colloquium. Lausanne. 1982.
- (46.5) MALLETT, G.P.; "Fatigue of Reinforced Concrete. State of the Art Review". Transport and Road Research. Laboratory. London 1991.
- (46.6) IABSE WORKSHOP. EL PAULAR, MADRID, 1992. "Length Effect on Fatigue of Wires and Strands". 1992.
- (46.7) "RC ELEMENTS UNDER CYCLIC LOADING". State of the art report. CEB. London. 1996.
- (46.8) BASCOY, S.A. "Investigación experimental sobre fatiga en barras rectas de acero conformado para hormigón armado". Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ingeniería. Instituto de Materiales y Estructuras.
- (46.9) "Fatigue of Concrete Structures". C.E.B. Bulletin 188. Septiembre 1988.

## CAPÍTULO 47

### ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN

#### 47.1 GENERALIDADES

La fisuración de las estructuras de hormigón armado es un fenómeno prácticamente inevitable y cuya importancia se ha incrementado con el uso de las armaduras de alta resistencia.

Ello ha obligado a perfeccionar los métodos de cálculo que permitan estimar el ancho de fisuras y a tomar medidas para mantenerlo por debajo de aquellos límites que:

- Supongan un riesgo de corrosión. (Véase PEREPEREZ y otros (47.1)).
- Afecten al aspecto de la construcción (Riesgo estético).
- Produzcan temor a los usuarios de la construcción. (Lo que más adelante definiremos como riesgo psicológico).

En este capítulo se tratan fundamentalmente los casos de fisuración por alargamiento de armaduras. No debe olvidarse la fisuración por compresión excesiva de bielas expuesta en el Capítulo 39 de Esfuerzo Cortante.

#### 47.2 RIESGO DE CORROSIÓN

A efectos del riesgo de corrosión, clasificamos las condiciones ambientales según las Tablas T-30.1, T-30.2 y T-30.3 del Capítulo 30.

Aunque el tema ya ha sido tratado en dicho Capítulo, se resumen a continuación los aspectos esenciales.

Existen una serie de factores que influyen sobre la corrosión (47.2) y que son los siguientes:

- *La humedad.* Si la humedad relativa no supera el 50 %, rara vez se produce corrosión de las armaduras. Por encima de este valor, la corrosión aumenta con la humedad.
- *La combinación* de alta humedad relativa con altas temperaturas es especialmente peligrosa. (Costas de zonas cálidas).
- *El nivel de saturación de agua* en el hormigón. En estado permanente de saturación del hormigón, no hay aportación de oxígeno al acero y, por lo tanto, no se produce corrosión.
- *La alternancia* de ciclos de saturación y secado, cuyos efectos lleguen hasta las armaduras, aumenta considerablemente el riesgo de corrosión.
- *La presencia de cloruros* o de otras sustancias corrosivas en la interfaz acero-hormigón acelera el proceso de corrosión. (El tema puede ampliarse en (47.3)).
- *La presencia de corrientes eléctricas parásitas* en la armadura acelera fuertemente la corrosión.

Las consecuencias de la corrosión aumentan al reducirse el diámetro de las armaduras y, en este sentido, el proyectista debe considerar cuidadosamente los hechos siguientes:

A grandes rasgos, la fisuración de las estructuras de hormigón puede clasificarse en dos grupos:

- Fisuras de origen tensional*, producidas bien por las acciones permanentes y variables, bien por las deformaciones impedidas, tales como la retracción y la temperatura. Habitualmente se trata de fisuras ortogonales a las armaduras (Fig. 47-1 a)).
- Fisuras de origen atensional* debidas al incremento de volumen de las barras producido por su oxidación, que ejerce presión sobre el hormigón hasta estallar, provocando fisuras paralelas a las armaduras (Fig. 47-1 b)). Estas fisuras son debidas generalmente a la corrosión inicial directa de las armaduras por escasa protección física de las barras (escasez de recubrimiento, elevada porosidad, etc.), o por escasa protección química (bajo contenido de cemento).
- Fisuras debidas a otras causas*, tales como la retracción plástica o reacciones químicas dentro del hormigón endurecido. Este tipo de fisuras está fuera del alcance de este capítulo.

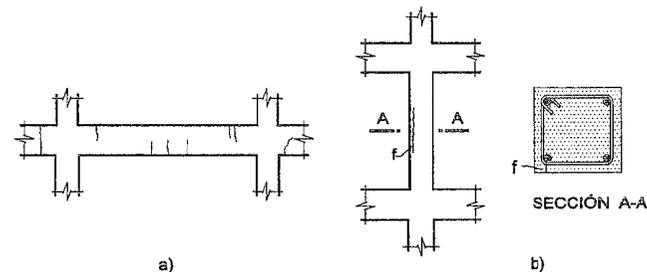


Figura 47-1

La experiencia recogida muestra que las fisuras del tipo b) son más frecuentes y más anchas que las del tipo a), y son consecuencia de una escasez de recubrimiento o de una pobre calidad del hormigón de recubrimiento.

Como se verá en lo que sigue, una posibilidad para reducir el riesgo de fisuración del tipo a) es emplear diámetros finos y recubrimientos pequeños. El proyectista debe ejercer aquí su buen juicio y darse clara cuenta de que ello puede incrementar el riesgo de fisuras del tipo b).

### 47.3 RIESGO ESTÉTICO

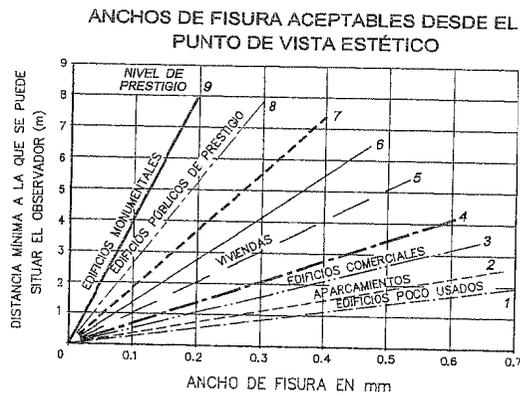
Es claro que la fisuración afecta al aspecto de la superficie del hormigón y por lo tanto a su calidad estética. La figura 47-2, tomada de la referencia (47.2) da información para distintos casos usuales.

### 47.4 RIESGO PSICOLÓGICO

El usuario identifica en ocasiones la existencia de fisuras con un supuesto riesgo de hundimiento.

La reacción de los usuarios ante este problema ha sido poco estudiada. Un trabajo interesante es el realizado por PADILLA y ROBLES en Méjico. (47.5). De acuerdo con este estudio, la mayoría de las personas son capaces de distinguir fisuras de un ancho en décimas de milímetro igual a la distancia del observador a la fisura en metros.

A efectos de responsabilidad, no debiera olvidarse que los métodos de cálculo asocian el ancho máximo de fisura a un nivel de confianza del 95%, es decir que no puede excluirse la posibilidad de algunas fisuras de ancho superior al reglamentario.



### 47.5 ACCIONES A CONSIDERAR EN LAS COMPROBACIONES DE FISURACIÓN

Es evidente que el riesgo de corrosión de origen tensional no sólo depende del ancho de la fisura<sup>1</sup>, sino también del periodo de tiempo en que ésta esté abierta. Una carga accidental breve puede producir un ancho de fisura excesivo, que, al cerrarse tras la desaparición de la carga, no supone riesgo de corrosión y supondrá escaso riesgo psicológico.

Este aspecto ha sido considerado por EHE que establece los límites de ancho de fisura  $W_{m\acute{a}x}$  que se recogen en la tabla T-47.1. Para el caso de hormigón armado la comprobación debe hacerse bajo la combinación de acciones cuasi permanentes. Para el caso de hormigón pretensado la comprobación debe hacerse para la combinación de acciones frecuentes<sup>2</sup>.

**TABLA T-47.1  
ANCHOS MÁXIMOS DE FISURAS**

Clase de exposición	$W_{m\acute{a}x}$ (mm)	
	Hormigón armado	Hormigón Pretensado
I	0,4	0,2
IIa, IIb, H	0,3	0,2 (*)
IIIa, IIIb, IV, F	0,2	Descompresión
IIIc, Qa, Qb, Qc	0,1	

(\*) Adicionalmente deberá comprobarse que las armaduras activas se encuentran en la zona comprimida de la sección, bajo la combinación de acciones cuasi permanentes.

- Aunque la experiencia muestra que los daños más importantes de corrosión no guardan una gran relación con el ancho de fisura, tal relación existe y es el motivo de que EHE y todas las Normas, controlen dicho ancho. Véase una discusión de esto en CALAVERA (47.6).
- Los casos de estanqueidad requieren comprobaciones especiales no incluidas en EHE.

El Eurocódigo EC-2 contempla más específicamente el caso del hormigón pretensado tal como se recoge en la Tabla T-47.2.

**TABLA T-47.2**

Clase de exposición	Anchura de fisura de proyecto $w_k$ , bajo la combinación de cargas frecuentes (mm)	
	Armaduras postesas armado	Armaduras pretesas Pretensado
I	0,2	0,2
IIa, IIb, H	0,2	Descompresión
IIIa, IIIb, IIIc, IV, F	Descompresión o $W_k = 0,2$ pero con revestimiento de tendones	

(\*) El límite de descompresión requiere que bajo la combinación de cargas frecuentes todas las partes de los tendones y vainas estén al menos 25 mm dentro de la zona de compresión.

La Norma ACI 318-95 presenta un tratamiento diferente del tema, no basando las condiciones en el ancho de fisura, sino en las tensiones nominales de flexotracción.

Las limitaciones correspondientes fueron ya expuestas en 31.2.2 b).

EHE incluye especificaciones especiales para el caso de armaduras pretesas. Éstas son las siguientes:

- Si la sección tiene armaduras pretesas y pasivas, puede calcularse como una sección de hormigón armado, considerando el pretensado como una acción exterior.
- Como alternativa, para secciones pretensadas con armaduras pretesas y sin armaduras pasivas, puede suponerse que no se rebasa el ancho de fisuras  $W_k = 0,2$  mm si el incremento de tensión de la armadura activa bajo las acciones exteriores es inferior a 200 N/mm<sup>2</sup>.

En todo caso, el cálculo del ancho de fisuras debe realizarse únicamente para la combinación de acciones frecuentes. (Fórmula [32.41] del Capítulo 32).

### 47.6 MÉTODO DE EHE

El método se describe en el Código CEB-FIP 78 (47.5). Su justificación detallada figura en la referencia (47.2). Un excelente resumen amplio puede encontrarse en el libro de FAVRE, KOPRINA Y RADOJICIC (47.7). Véase también TASSIOS (47.8).

#### 47.6.1 PLANTEAMIENTO GENERAL

Supongamos inicialmente un tirante de hormigón con armadura simétrica y sometido a tracción centrada (Fig. 47-3).

Una vez alcanzada en una sección la resistencia a tracción del hormigón, en ella se produce una fisura y el acero resiste él solo el esfuerzo  $N$ . A partir de la fisura, la armadura inicia su anclaje, transmitiendo parte de su fuerza por adherencia al hormigón y reduciendo su tensión y, por tanto, su alargamiento.

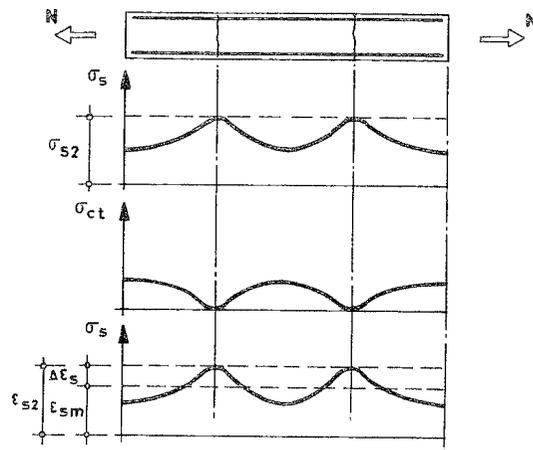


Figura 47-3

A una cierta distancia de la fisura, el anclaje se habrá producido y la pieza se encuentra en el llamado Estado I, de sección sin fisurar. Cuando entre fisuras se alcanza de nuevo la resistencia a tracción del hormigón, se forma una nueva fisura.

En los planos de las fisuras, la pieza está en el llamado Estado II, con el hormigón en tracción fisurado. (Estas definiciones son válidas para cualquier tipo de sollicitación y no sólo para tracción centrada).

Se dice que la fisuración **está estabilizada** cuando ya, aunque se incrementen las cargas, las fisuras aumentan en ancho, pero no se forman nuevas fisuras.

Para calcular el ancho  $W$  de fisura, necesitamos conocer el *alargamiento medio del acero* y la *separación media entre fisuras*.

#### a) Alargamiento medio del acero

De acuerdo con lo indicado en la figura 47-3, el *alargamiento medio* de la armadura entre fisuras es inferior al  $\epsilon_{s2}$  producido entre los labios de la fisura, debido a la reducción de tensión del acero entre fisuras consecutivas por su anclaje en el hormigón. (Efecto de rigidización de la sección).

El estudio de numerosos resultados de ensayos ha permitido establecer la fórmula

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - k_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \leq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad [47.3]$$

en la que

$\epsilon_{sm}$  = Alargamiento medio relativo de la armadura respecto al hormigón que la rodea.

$\sigma_s$  = Tensión en la armadura en una sección con el hormigón en tracción fisurado (Estado II), bajo la combinación de acciones para la que se comprueba la fisuración ( $N/mm^2$ ).

$\sigma_{sr}$  = Tensión en la armadura calculada en el Estado II (sección fisurada) cuando la tensión máxima del hormigón traccionado sea igual a  $f_{ctm} = 0,68 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$  (unidades en  $N/mm^2$ ).

donde:

$k_2 = 1$  para la primera carga instantánea de la pieza.

$k_2 = 0,5$  para cargas de larga duración o gran número de ciclos de carga para secciones pretensadas.

Planteamos el problema para una sección de forma cualquiera.

Llamamos

$M_f$  = Momento que produce la tensión  $f_{ctm}$  en Estado I, según [47.4].

$M$  = Momento flector bajo la combinación de acciones para la que se comprueba la fisuración.

$$(Si \ M < M_f \ \epsilon_{sm} = 0)$$

El valor  $\sigma_{sr}$  se puede obtener mediante el cálculo siguiente (fig. 47-3).

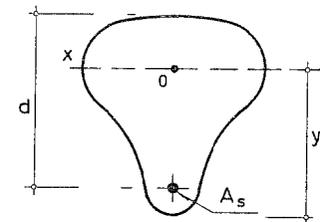


Figura 47.4

Llamando  $y_1$  a la ordenada de la fibra inferior respecto al eje X-X, que pasa por el c.d.g. de la sección sin fisurar y homogeneizada, el momento flector que produce en la fibra inferior la tracción  $f_{ctm}$  viene dado por

$$f_{ctm} = \frac{M_f y_1}{I} \quad [47.4]$$

donde  $I$  es el momento de inercia homogeneizada, respecto a X-X.

Llamando

$$W_1 = \frac{I}{y_1}$$

se obtiene

$$M_f = f_{cm} W_1 \quad [47.5]$$

Por otro lado

$$M_f = \sigma_{sr} k_z d A_s \quad [47.6]$$

y sustituyendo

$$\sigma_{sr} = \frac{f_{cm} W_1}{k_z d A_s} \quad [47.7]$$

Para  $k_z$  puede tomarse con buena aproximación, para valores tan reducidos de  $M$ ,

$$k_z = 0,90 \quad [47.8]$$

Para obtener el valor de  $\sigma_s$  pueden utilizarse los métodos de cálculos en teoría clásica vistos en 36.6, pero puede aceptarse, con suficiente aproximación el valor

$$\sigma_s = \frac{M}{k_z d A_s} \quad [47.9]$$

donde  $M$  es el momento flector correspondiente a la combinación de acciones para la que se comprueba la fisuración. El valor de  $k_z$  puede tomarse, como

$$k_z = \approx \frac{7}{8} = 0,88 \quad [2]$$

Puede aceptarse  $\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \approx \frac{M_f}{M}$  como buena aproximación. [47.10]

### b) Separación media entre fisuras

De acuerdo con los ensayos disponibles hasta el momento, EHE siguiendo al C.E.B. ha adoptado la fórmula:

$$s_{m,r} = 2c + 0,2s + 0,4k_z \frac{\phi}{\rho_r} \quad [47.11]$$

1  $W_1$  debería ser calculado en Estado I (sin fisurar) y homogeneizando la sección. Puede sustituirse por el de la sección bruta. Para sección rectangular  $W_1 = \frac{bh^2}{6}$  y se obtiene la fórmula  $\sigma_{sr} = \frac{b h^2 f_{cm}}{6 \cdot 0,9 d A_s}$ .

2 EHE adopta  $k_z = 0,8$ .

donde:

$s_{m,r}$  = distancia media entre fisuras, en mm.

$c$  = espesor del recubrimiento, en mm.

$s$  = separación entre ejes de barras o de grupos de barras en contacto, en mm.

En el caso de vigas,  $s$  es el ancho del alma dividido por el número de barras o grupos de barras, situados al mismo nivel. Se debe tomar el nivel que conduzca al máximo valor de  $s$ . Si  $s > 15 \phi$  se introduce  $s = 15 \phi$  en la fórmula [47.11].

$k_2$  = coeficiente dependiente de la distribución de tensiones de tracción en la sección de la pieza, de valor  $k_2 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$ , donde  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son las deformaciones máxima y mínima calculadas en sección fisurada en las fibras extremas a la zona traccionada.

$k_2 = 0,125$  para flexión simple.

$k_2 = 0,25$  para tracción pura.

$k_2 = 0,25 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_1}$  para tracción excéntrica o para una zona de alma

de una viga<sup>1</sup>.

$\phi$  = Diámetro de las barras en mm.

- Si se emplean barras de distintos diámetros, se toma el diámetro de la mayor.

- Si se emplean grupos de barras:

$$\phi_e = \phi \sqrt{n}$$

donde  $n$  es el número de barras que forman el grupo,  $\phi_e$  su diámetro equivalente y  $\phi$  el de las barras individuales.

$\rho_r$  = cuantía de la sección de la armadura de tracción referida al área de la sección recta de la zona efectiva de tracción<sup>2</sup>  $A_{c,ef}$ .

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c,ef}} \quad [47.12]$$

1  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son las deformaciones del hormigón calculadas en Estado II. Para piezas en flexión, la situación es confusa entre los documentos (47.2), (47.6) y (47.8). Adoptamos para flexión simple el valor  $k_2 = 0,125$ . En vigas de gran canto, el valor  $k_2 = 0,25 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_1}$  puede resultar adecuado, pero para los forjados conduce a resultados excesivamente conservadores.

2 Se entiende por zona efectiva de tracción del hormigón aquella a la cual se extienden las tracciones transmitidas por las barras. Véase (47.2) para más información.

La definición de  $A_{c,ef}$  se indica en la figura 47-5. En el caso de losas,

$$h_{ef} \leq \frac{(h-x)}{2}, \text{ siendo } x \text{ la profundidad de la fibra neutra en Estado II.}$$

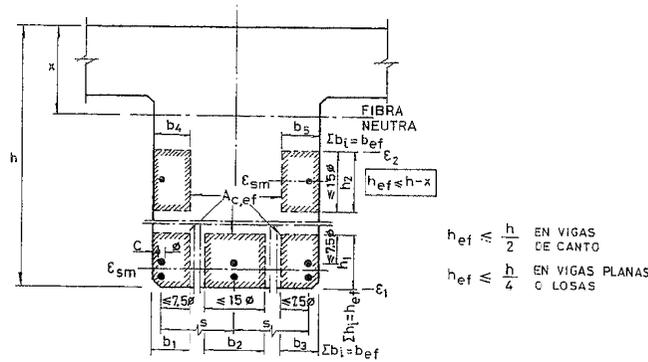


Figura 47-5

La figura 47-5 resuelve el caso general. La 47-6 resume algunos casos sencillos.

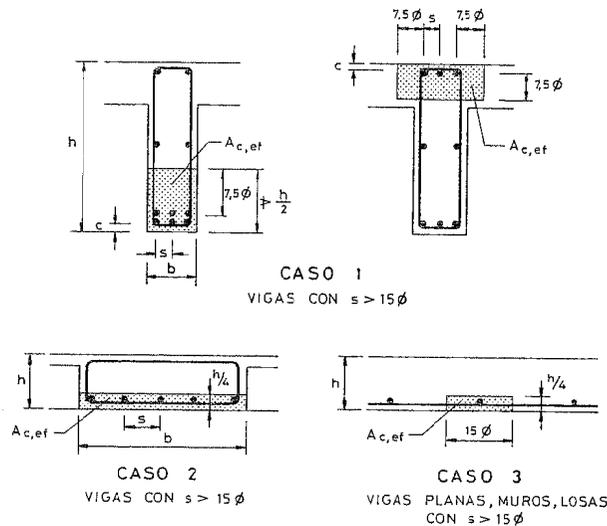


Figura 47-6

Como simplificación, EHE indica para el cálculo de  $A_{c,ef}$  que  $h_{ef}$  no debe tomarse superior a medio canto en vigas (y, por extensión, en nervios) ni al cuarto del canto en losas.

c) Ancho medio de fisuras

Conocida la separación media entre fisuras,  $s_{m,x}$  y el alargamiento medio del acero,  $\epsilon_{sm,x}$  es inmediato calcular

$$W_m = \epsilon_{sm,r} s_{m,r} \quad [47.13]$$

d) Ancho máximo de fisuras

Las mediciones realizadas demuestran que puede aceptarse que la distribución estadística de los valores de los anchos de fisuras sigue la ley de GAUSS.

El concepto de valor medio  $W_m$  [47.13] tiene escaso interés y el MODEL CODE define el valor característico del ancho de fisura,  $W_k$ . EHE define el valor  $W_k$  como

$$W_k = \beta W_m \quad [47.14]$$

donde

$\beta = 1,3$  para fisuración debida exclusivamente a acciones indirectas.

$\beta = 1,7$  para el resto de los casos (1.7 es el redondeo de 1,64 correspondiente al cuantil 95% en la distribución gaussiana de anchos de fisuras).

Obsérvese que la adaptación del valor característico *no excluye la posibilidad de encontrar ocasionalmente valores superiores a  $W_k$  en cualquier obra.*

47.6.2 MÉTODO DEL EUROCÓDIGO EC-2 (47.10)

Esencialmente, el planteamiento general coincide con el expuesto para EHE.

El EUROCÓDIGO incluye métodos simplificados, resumidos en las Tablas T-47.3 y T-47.4.

TABLA T-47.3  
DIÁMETROS MÁXIMOS DE BARRAS PARA  
BARRAS DE ALTA ADHERENCIA

Tensión del acero N/mm <sup>2</sup>	Diámetro máximo de la barra (mm)	
	Sección Armada	Sección Pretensada
160	32	25
200	25	16
240	20	12
280	16	8
320	12	6
360	10	5
400	8	4
450	6	

TABLA T-47.4

SEPARACIÓN MÁXIMA ENTRE BARRAS DE ALTA ADHERENCIA,

Tensión del acero N/mm <sup>2</sup>	SEPARACIÓN MÁXIMA ENTRE BARRAS (mm)		
	Flexión pura	Tracción pura	Secciones pretensadas (flexión)
160	300	200	200
200	250	150	150
240	200	125	100
280	150	75	50
320	100	-	-
360	50	-	-

Los valores de  $\sigma_s$  se calculan en cada caso con la fórmula [47.9].

47.7 ARMADURA DE PIEL

En vigas de canto superior a los 500 mm, puede ocurrir el fenómeno indicado en la figura 47-7. Si bien la armadura de tracción reparte la fisuración a su nivel, en zonas superiores se producen uniones de fisuras que constituyen los llamados "árboles de fisuras", de ancho bastante superior a las fisuras individuales. Si estos "árboles" afectan a los estribos, entrañan riesgo de corrosión y, en todo caso, afectan al riesgo psicológico y al estético.

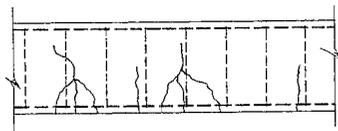


Figura 47-7

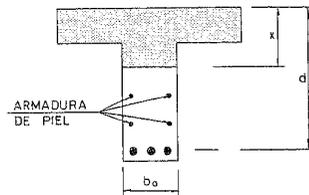


Figura 47-8

Esto exige la disposición de una cierta armadura de alma. Los ensayos de laboratorio han demostrado que este tipo de armadura no es necesaria en zonas próximas a la fibra neutra, ya que en ellas las deformaciones son pequeñas (Fig. 47-8). El máximo ancho de fisuras suele registrarse a la mitad de la distancia  $d - x$ .

El gráfico de la figura 47-9 da la altura  $h_w$  en la que debe disponerse armadura de alma<sup>1</sup>.

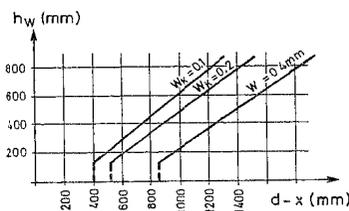
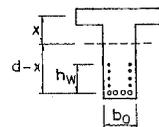


Figura 47-9



<sup>1</sup> Tomado de MC-73 (47.5).

La tabla T-47.5 da el diámetro mínimo exigible.

TABLA T-47.5

Ancho de alma $b_0$ (mm)	$b_0 \leq 150$	$150 < b_0 < 300$	$\geq 300$
Diámetro de la armadura de piel (mm)	$\geq 10$	$\geq 12$	$\geq 16$

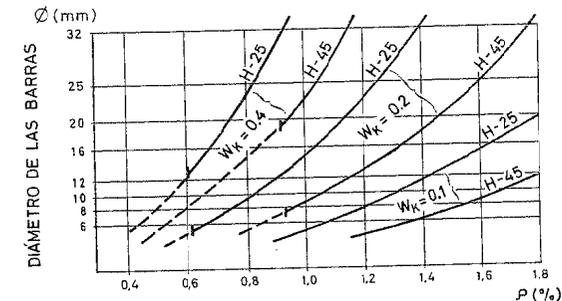
La Tabla T-47.6 proporciona la separación máxima entre ejes de barras.

TABLA T-47.6

Tipo de hormigón	H-25		H-45	
	Ancho de fisura (mm)	0,2	0,4	0,2
Separación máxima de la barras de la armadura de piel (mm)	150	250	100	150

47.8 FISURACIÓN DEBIDA A DEFORMACIONES COARTADAS. CUANTÍA MÍNIMA A EMPLEAR

Los gráficos de las figuras 47.10 y 47.11, tomados de la referencia (47.2) permiten el cálculo directo, basado en algunas hipótesis simplificadoras.



ARMADURA NECESARIA EN EL CASO DE DEFORMACIÓN POR TRACCIÓN COARTADA  
 $P = A_s / A_c$  ( $A_c$  = ÁREA TOTAL DE LA SECCIÓN DE HORMIGÓN)  
 — ACEROS B-400 ó B-500    - - - ACERO B-500

Figura 47-10

La figura 47-10 corresponde al caso de piezas con la deformación por tracción coartada y da, en función del diámetro elegido, la cuantía geométrica necesaria, referida a la sección total, para aceros B400 y B500.

Análogamente, la figura 47-11 resuelve el mismo problema para el caso de deformación por flexión simple coartada.

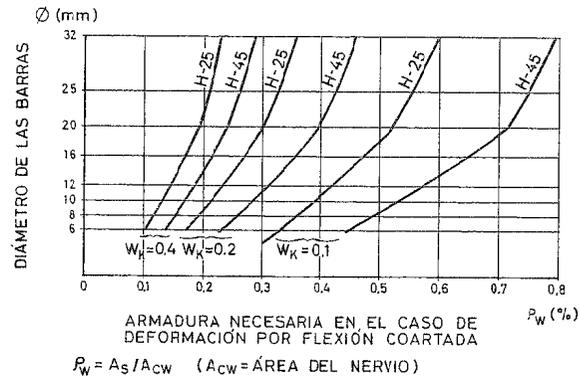


Figura 47-11

### 47.9 FISURACIÓN DEBIDA AL ESFUERZO CORTANTE

El tema es tratado por EHE de acuerdo con el MODEL CODE-90 (47.11) y el EUROCÓDIGO EC-2 (47.10). En la Tabla T-47.7 se resumen las especificaciones.

**TABLA T-47.7**  
**MÁXIMA SEPARACIÓN DE LA ARMADURA DE CORTE**  
**(ESTRIBOS O BARRAS DOBLADAS) PARA CONTROL**  
**DE LA FISURACIÓN**

$\frac{V_{rd} - 3V_{cu}}{A_{cd}}$ (N/mm <sup>2</sup> )	Separación máxima (mm)
< 50	300
75	200
100	150
150	100
200	50

(\*) La Notación corresponde a la empleada para esfuerzo cortante en el Capítulo 38.

### EJEMPLO 47.1

Dada una sección de  $300 \cdot 600$  mm armada con  $2 \phi 32$  y con recubrimiento de 60 mm, en ambiente interior de humedad baja, comprobarla a fisuración. El momento flector de comprobación es  $M = 170$  m kN Acero B-400S y Hormigón H-25. (Se supone carga mantenida)  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ,  $\gamma_f = 1,50$ .

Método de EHE

Adoptamos  $d = 540$  mm

$$A_s = 1609 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_s = \frac{170.000.000}{0,88 \cdot 540 \cdot 1609} = 222,3 \text{ N/mm}^2$$

$$A_{c,ef} = 300 (40 + 16 + 7,5 \cdot 32) = 88800 \text{ mm}^2$$

$$k_2 = 0,5$$

Para H-25,  $f_{ctm} \approx 2,6$  N/mm<sup>2</sup>, según Tabla T-28.1.

$$\sigma_{sr} = \frac{2,6 \cdot 300 \cdot 600^2}{6 \cdot 0,90 \cdot 540 \cdot 1609} = 59,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 = \left( \frac{59,8}{222,3} \right)^2 = 0,072$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{222,3}{200.000} = 0,0011$$

$$e_{sm} = (1 - 0,5 \cdot 0,072) 0,0011 = 0,0011$$

$$\rho_r = \frac{1609}{88800} = 0,018$$

$$c = 40 \text{ mm}$$

$$s = \frac{300}{2} = 150 \text{ mm}$$

$$k_2 = 0,125$$

$$s_{m,r} = 2 \cdot 40 + 0,2 \cdot 150 + 0,4 \cdot 0,125 \cdot \frac{32}{0,018} = 199 \text{ mm}$$

$$W_m = e_{sm,r} \cdot s_{m,r} = 0,0011 \cdot 199 = 0,22 \text{ mm.}$$

$$W_k = 1,7 \cdot 0,22 = 0,374 \text{ mm}$$

Como por el ambiente le corresponde un ancho límite  $W_k = 0,4$  mm, la pieza es aceptable.

#### 47.10 LIMITACIÓN DE LA FISURACIÓN POR TORSIÓN.

Puede suponerse que esta fisuración está adecuadamente controlada si la separación entre armaduras transversales consecutivas cumple las limitaciones siguientes:

$$s_t \leq \frac{a}{2} \quad (a \text{ es la menor dimensión transversal de la pieza})$$

$$s_t \leq \frac{b}{3} \quad (b \text{ es la mayor dimensión transversal de la pieza})$$

$$s_t \leq 200 \text{ mm}$$

#### BIBLIOGRAFÍA

- (47.1) PEREPÉREZ, B.; BARBERA, E.; BENLLOCH, J. "Grandeurs de fissures et corrosion". Conférence Européenne "La Fissuration des Bétons et la Durabilité des Constructions". AFREM-CEE, 1988.
- (47.2) CAMPBELL-ALLEN, D; "The reduction of cracking in concrete". University of Sidney. May. 1979.
- (47.3) MANUAL C.E.B. "Fissuration et Déformations". Bulletin d'information n° 158. Octubre, 1983.
- (47.4) "DURABLE CONCRETE STRUCTURES. CEB DESIGN GUIDE". Bulletin d'information n° 182.
- (47.5) PADILLA, J.D.; ROBLES, F. "Human response to cracking in concrete slabs". ACI Special Publications SP-30 "Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems". American Concrete Institute. Detroit, 1971.
- (47.6) CALAVERA, J. "Patología de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado". 2 Tomos. INTEMAC. Madrid, 1996.
- (47.7) CEB-FIP MODEL CODE FOR CONCRETE STRUCTURES (1978).
- (47.8) FAVRE, R.; KOPRNA, M.; RADOJICIC, A. "Effets différents, fissurations et déformations des structures en béton". Saint Saphorin, 1980.
- (47.9) TASSIOS, T.; SCARPAS, A. "Model for local crack behaviour". IABSE Colloquium, Delft, 1987.
- (47.10) BLANCO, F. "Utilización de aceros para hormigón en piezas sometidas a flexión simple". Revista Hormigón y Acero, n° 99, 2° trimestre de 1971.
- (47.11) EUROCODE N° 2 "Design of Concrete Structures". Part 1 "General Rules and Rules for Buildings". Commission of European Communities. Diciembre 1989.
- (47.12) CEB-FIP MODEL CODE 1990

## CAPÍTULO 48

### DEFORMACIONES

#### 48.1. INTRODUCCIÓN

Los métodos de cálculo correspondientes a los estados límite últimos, vistos anteriormente, los correspondientes valores de los coeficientes  $\gamma$  y los avances en los métodos de cálculo de esfuerzos y las mejoras obtenidas en los materiales, especialmente en los aceros, permiten el proyecto de piezas que, siendo suficientemente resistentes, resultan a veces excesivamente deformables. Incluso en muchos casos, aún no siendo las piezas excesivamente deformables, aisladamente consideradas, sus deformaciones resultan incompatibles con la rigidez de otras partes no estructurales del edificio. La fisuración de tabiquerías y fachadas por esta causa es hoy un problema grave en muchos países y, en particular, en España. Véase CALAVERA (48.1) y GONZÁLEZ VALLE (48.2).

Ello ha motivado que el cálculo de las deformaciones, relativamente secundario en la mayoría de los casos en épocas pasadas, haya cobrado extraordinaria importancia en los últimos años.

Esencialmente, dentro de métodos de cálculo simples, las dificultades proceden de tres puntos diferentes:

- a) Del cálculo de los valores de los esfuerzos en condiciones de servicio, tema ya analizado anteriormente. En este sentido, el cálculo lineal es, en general, el más apropiado y proporciona una precisión razonable<sup>1,2</sup>.

1 Por supuesto, puede comprobarse la flecha con diagrama de momentos derivados del lineal, reduciendo los momentos de apoyo, puesto que ello quedará del lado de la seguridad. La Instrucción EF lo autoriza expresamente. En teoría, cabe la duda de si, dimensionando a flexión con redistribución plástica, las armaduras de momentos negativos serán suficientes para permitir una comprobación en servicio con los momentos derivados del cálculo lineal. Los estudios sobre el tema son escasos, pero no conocemos pruebas en contra.

2 Existen hoy programas informáticos que permiten el cálculo de las deformaciones a partir de la integración de curvaturas en régimen no lineal. Véase el libro de J. CALAVERA y L. G.DUTARI (48.3), que contiene un programa informático para dicho cálculo.

- b) De la incertidumbre de los valores  $E_c$  para cargas breves y para cargas de larga duración.
- c) De la dificultad de evaluar el momento de inercia de la sección de la pieza, agravada por el hecho de que la reducción de los coeficientes de seguridad y el empleo de los aceros de alta resistencia, han conducido hoy a una fisuración relativamente importante en condiciones de servicio.

El estado límite de deformaciones es un estado límite de servicio y, por tanto, se comprueba con  $\gamma_f = \gamma_c = \gamma_s = 1$ , es decir con los valores característicos de las acciones, combinando éstas de acuerdo con lo que más adelante se indica.

#### 48.2 ANÁLISIS DE ALGUNOS ASPECTOS RELACIONADOS CON LA DEFORMABILIDAD EXCESIVA DE LAS ESTRUCTURAS

Como ya se ha dicho, más que de una deformabilidad excesiva de la propia estructura, el problema surge de que esa deformabilidad supera la que pueden presentar los elementos no estructurales del edificio, que de alguna manera están ligados a la estructura.

El problema afecta tanto a flechas verticales de vigas y forjados como a flechas horizontales de pórticos y entramados, aunque el primero de los dos casos sea predominante.

Las dificultades comenzaron a ser apreciables hacia 1960 y en los últimos años han obligado a que fueran revisadas, en este aspecto, las Normas de la mayoría de los países.

Es interesante analizar por qué este problema, casi inexistente en 1960, ha llegado a ser tan intenso hoy día. A continuación se exponen las causas esenciales:

- a) En los edificios de viviendas y oficinas, que son lo que más frecuentemente presentan problemas de este tipo, la luz de forjados rara vez sobrepasaba los 5 m en 1960. Hoy la luz en forjados frecuentemente pasa de los 6 m. Como la flecha es, casi, proporcional al cuadrado de la luz en la mayoría de los casos, ello representa un incremento de flecha del orden del 30 ó 40%<sup>1</sup>.
- b) Hasta 1960, la armadura más frecuente era la de acero B 220, es decir de acero ordinario. Hoy las barras son corrugadas de acero B 400 ó B 500 y, por tanto, su límite elástico se ha duplicado prácticamente y las cuantías geométricas se han reducido por tanto a la mitad. La inercia equivalente, que analizaremos luego en detalle, al variar de acero ordinario a acero de alta resistencia se reduce a valores del orden de 0,50 y, por lo tanto, la flecha aumenta por este motivo del orden del doble.
- c) Las posibilidades del cálculo con ordenador han permitido realizar los cálculos por métodos más precisos conduciendo en definitiva a estructuras más afinadas.

<sup>1</sup> Hay que tener en cuenta que aunque con carga repartida la flecha crece con  $l^4$ , al aumentar  $l$  también lo hace el canto y se incrementa  $l$ . Lo dicho es una estimación aproximada.

- d) Los adelantos introducidos por las nuevas normas, en especial los valores de los coeficientes de seguridad, han conducido también a estructuras más afinadas.
- e) Antiguamente era una práctica habitual que los tabiques y cerramientos llegaran hasta el terreno. Hoy es frecuente la supresión de tales elementos, sobre todo los tabiques, en planta baja, debido al uso de plantas diáfanos, situación de locales públicos, etc., lo que a través de la transmisión de cargas entre plantas conduce a deformaciones antes infrecuentes.
- f) Durante muchos años las normas de los diferentes países no indicaban cuál debía ser el valor del momento de inercia a utilizar en el cálculo de flechas. Quizá por la costumbre de utilizar la inercia de la sección bruta de hormigón para evaluar las rigideces de las piezas con vistas al cálculo de esfuerzos en las estructuras hiperestáticas, se tomaba también dicho valor para el cálculo de flechas. Como veremos la inercia equivalente, rara vez alcanza el 50% del valor de la inercia bruta, con lo que se cometía un gran error, que no resultaba trascendente con luces moderadas, pero sí lo es con las luces habituales hoy día.

#### 48.3 CONSIDERACIONES PREVIAS SOBRE EL CÁLCULO Y LIMITACIÓN DE LAS FLECHAS

En lo que sigue, no deben perderse de vista las consideraciones siguientes:

- a) Los métodos de cálculo de flechas pueden considerarse divididos en dos grandes grupos:
  - *Métodos de proyecto*. Deben ser razonablemente simples y de aplicación rápida. En general es necesario renunciar al estudio minucioso de las condiciones higrotérmicas, historial de curado, historial de aplicación de cargas, etc.
  - *Métodos de investigación*. Son los habituales en investigación experimental, estudios de patología, etc. En general, son métodos mucho más complejos, pero la informática ha facilitado su uso desde hace muchos años.
- b) No debe olvidarse que el problema de las deformaciones no consiste sólo en *calcular las flechas*, sino también en *comprobarlas con unos valores límite* que se establecen para evitar los daños en las partes no estructurales básicamente, aunque no exclusivamente. Estos límites, hoy por hoy, se fijan de forma empírica.

Cada *método de cálculo de flechas* es coherente con el *sistema de limitación de flechas* al que va asociado. Ciertamente hoy es posible elaborar métodos más refinados que los usualmente especificados en las Normas. Véase a este respecto el Boletín del CEB citado en la referencia (48.4), el libro de FAVRE, KOPRNA y RADOJICIC (48.5) o el de BRANSON (48.17). Sin embargo, tales métodos distan mucho de ser de aplicación simple y por otra parte necesitan ir acompañados de otros valores de limitación de flechas, generalmente más exigentes, para no conducir a daños en las partes no estructurales.

En líneas generales, puede por tanto afirmarse que *los métodos más complejos permiten una mejor estimación de las flechas pero no necesariamente proyectar piezas más esbeltas.*

- c) La flecha de una pieza es una variable aleatoria, como lo es la resistencia del hormigón o el ancho de fisuras. Su conocimiento no es posible y únicamente podemos estimarla con un nivel de fiabilidad adecuadamente alto.
- d) Las variaciones de humedad, el proceso constructivo, el tipo de árido, etc. son aspectos que pueden afectar sustancialmente a las flechas y que habitualmente no son considerados en proyecto.
- e) No debe olvidarse que las limitaciones de flechas establecidas en las Normas se refieren a las *flechas de proyecto*, y no a las realmente ocurridas en la estructura construida, que en la mayoría de los casos son de imposible averiguación.

## 48.4 DEFORMACIONES DEL HORMIGÓN

### 48.4.1 CARACTERÍSTICAS DE DEFORMABILIDAD

Han sido expuestas en detalle en el Capítulo 28 y a ellas nos referimos en lo que sigue.

### 48.4.2. RELACIONES DE DEFORMACIONES, CURVATURAS Y FLECHAS

Las deformaciones, calculadas de acuerdo con el Capítulo 28, permiten establecer métodos para un cálculo bastante preciso de las flechas. Sin embargo, tales métodos son complejos, debido al hecho, ya señalado en 1977 por BRANSON (48.17), de que las curvaturas instantánea y diferida no guardan la misma relación que las deformaciones correspondientes del hormigón.

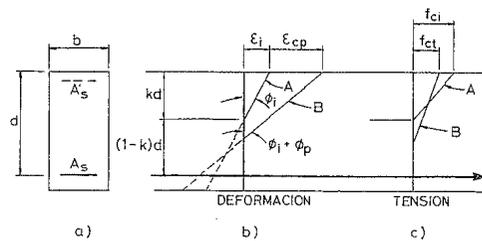


Figura 48-1

(Tomada de la referencia 48.17) (BRANSON)

De acuerdo con la figura 48-1, donde  $\epsilon_i$  y  $\epsilon_{cp}$  son la deformación instantánea y la diferida de la fibra más comprimida del hormigón y  $\phi_i$  y  $\phi_{cp}$  las curvaturas instantánea y diferida, en el funcionamiento de la pieza en flexión se produce un descenso de la fibra neutra. El cambio con el tiempo en la deformación al nivel del acero es pequeño, comparado con el que ocurre en la fibra más comprimida. Para mantener las

condiciones de equilibrio, la tensión del hormigón a largo plazo,  $f_{c\infty}$ , se reduce respecto a la inicial,  $f_{ci}$ .

Es, por tanto, evidente que

$$\frac{\phi_{cp}}{\phi_i} < \frac{\epsilon_{c\infty}}{\epsilon_i} \quad [48.1]$$

y por la proporcionalidad entre curvaturas y flechas, llamando  $f_d$  a la flecha diferida y  $f_i$  a la instantánea

$$\frac{f_d}{f_i} < \frac{\epsilon_{c\infty}}{\epsilon_i} \quad [48.2]$$

La relación

$$\frac{f_d}{f_i} = k_f \cdot \frac{\epsilon_{c\infty}}{\epsilon_i} \quad [48.3]$$

donde  $k_f$  es siempre inferior a 1, no es fácil de expresar en forma sencilla, razón por la que las diversas Normas adoptan para el proyecto métodos más simplificados.

## 48.5 VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA

Supongamos una pieza sometida a flexión simple, tal como la representada en la figura 48-2a), en la que se han representado con flechas las acciones de adherencia del hormigón sobre la armadura entre fisuras consecutivas. La figura 48-2b) representa la variación del momento flector y la 48-2c) la de esfuerzos cortantes.

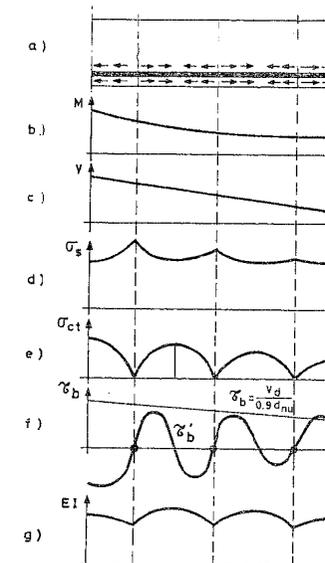


Figura 48-2

La formación de fisuras modifica sustancialmente el funcionamiento de la pieza en varios aspectos. En las figuras 48-2d) y e) se indican, de forma esquemática, las tensiones de tracción en el acero,  $\sigma_s$ , y en el hormigón,  $\sigma_c$ . Entre labios de fisura, el acero desarrolla él sólo todo el esfuerzo de tracción, pero, entre fisuras, se produce el anclaje de la armadura en el hormigón y se transfiere a éste parte de la fuerza de tracción del acero. Si la tracción  $\sigma_{c,máx}$  iguala a la resistencia a tracción del hormigón, se forma una nueva fisura.

En la figura 48-2f) se ha dibujado la ley de variación de las tensiones teóricas de adherencia,  $\tau_b$ , de acuerdo con la teoría expuesta anteriormente, y un esquema aproximado de la distribución real  $\tau'_b$  entre fisuras.

Finalmente, la figura 48-2g) representa esquemáticamente la variación del valor  $EI$ , que es mínimo en las fisuras. Obsérvese que, entre fisuras, se produce un incremento del valor  $EI$ , conocido como fenómeno de "rigidización"<sup>1</sup>. Este efecto es tanto mayor cuanto más escasa sea la fisuración y cuanto más rápido sea el anclaje de las armaduras. El fenómeno es, por tanto, muy complejo y está ligado a todas las variables que influyen en la fisuración y la adherencia. Como el cálculo de las deformaciones se basa en el valor  $EI$ , cualquier intento de una gran precisión no tiene, por ahora, sentido alguno<sup>2</sup>.

Antes de fisurarse la pieza, la inercia viene dada por la de la sección sin fisurar y homogeneizada, aunque frecuentemente se adopte la inercia de la sección bruta.

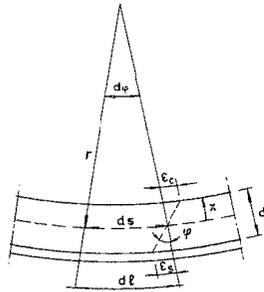


Figura 48-3

Una vez fisurada la pieza, de acuerdo con la ecuación clásica y la figura 48-3,

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_f} \quad M = A_s \sigma_s z$$

siendo  $\sigma_s = \epsilon_s E_s$ .

- 1 La expresión inglesa "tension-stiffening" se traduce con frecuencia como "tensorigidez".
- 2 Piénsese, por ejemplo, que, a igualdad de sección, calidades de materiales y cuantía, dos aspectos no considerados por las teorías habituales de deformaciones, tales como la eficacia del curado en obra y el diámetro de barras empleado (a igualdad de cuantía), pueden variar fundamentalmente las flechas. Igualmente, la influencia de la retracción es muy importante.

$$\text{De la figura, } \frac{ds}{dl} = \frac{r}{r+d-x} \text{ y, por tanto, } \frac{d-x}{r} = \frac{dl-ds}{ds}; \frac{d-x}{r} = \epsilon_s \frac{l}{r} = \frac{\epsilon_s}{d-x} = \frac{M}{EI}$$

y sustituyendo

$$EI_f = A_s E_s z (d-x) \quad [48.4]$$

En la práctica el valor de  $EI$  a considerar en los cálculos habrá de ser un valor intermedio entre el de la sección sin fisurar y homogeneizada y la sección fisurada homogeneizada.

El comportamiento de la sección en una pieza flectada, en cuanto a la tensión de la armadura y el efecto de "rigidización" producida por el anclaje de las barras a partir de los labios de las fisuras, viene indicado en la figura 48-4, tomada de (48.5).

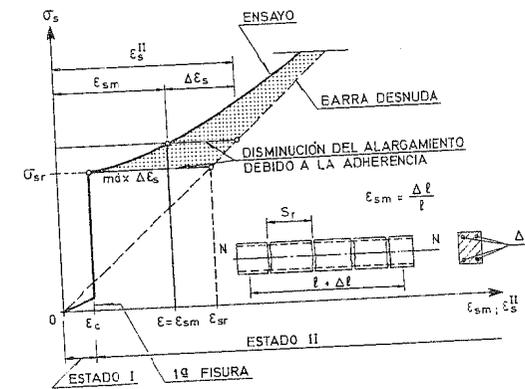


Figura 48-4

En la figura se indica el salto tensional sufrido por la armadura al fisurarse el hormigón para un alargamiento en tracción  $\epsilon_c$ . Llamando  $\sigma_{sr}$  la tensión del acero en ese instante, FAVRE adopta:

$$\Delta \epsilon_s = máx \Delta \epsilon_s \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \quad [48.5]$$

y despreciando  $\epsilon_c$

$$máx \Delta \epsilon_s = \epsilon_{sr} - \epsilon_c \approx \frac{\sigma_{sr}}{E_s} \quad [48.6]$$

y, por tanto,

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_s - \Delta \epsilon_s = \epsilon_s \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad [48.7]$$

que es la fórmula adoptada por el CEB para fisuración, según ya se expuso y es también la adoptada tanto por el CEB MODEL CODE 90 como por el EUROCÓDIGO EC-2 para el desarrollo de sus especificaciones de flechas.

En líneas generales, aunque son muchos los trabajos interesantes sobre el tema, la evaluación del momento de inercia equivalente para el cálculo de flechas instantáneas se ha desarrollado, en el ACI, con base en los trabajos de BRANSON y en general del Comité 435 de ACI, dedicado a flechas. En el CEB, la base es debida a FAVRE y sus colaboradores de la Comisión de Deformaciones. Los resultados son sensiblemente coincidentes.

En cambio, la manera de evaluar la flecha adicional diferida es bastante diferente en ambos sistemas. Mientras el ACI en la norma ACI 318-95 (48.18) presenta un método muy simple, que proporciona directamente la suma de flechas de fluencia y retracción, sin consideración de la humedad ambiente y del espesor medio de la pieza<sup>1</sup>, tanto el MODEL CODE 90 como el EUROCÓDIGO EC-2 realizan por separado el cálculo de la flecha adicional debida a la fluencia y el de la debida a la retracción.

Todo ello se expone en detalle a continuación y se aclara con los ejemplos al final del Capítulo.

#### 48.6 MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE PARA PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO

Dentro del campo de los métodos de carácter general para la estimación del valor  $I_e$ , suficientemente simples para la aplicación a la práctica habitual, ha elegido el de BRANSON (48.17) recogido por la Norma ACI 318 ya en su edición de 1971, y mantenido hasta la actual de 1995.

El método, basado en una fórmula aproximada ajustada mediante contraste con los ensayos disponibles, parte de definir un momento de inercia equivalente de la sección,  $I_e$ , mediante la fórmula

$$I_e = \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 I_b + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 \right] I_f \quad [48.8]$$

(Si  $M_f > M_a$  se toma  $I_e = I_b$ ).

donde:

$I_e$  = Momento de inercia equivalente.

$M_f$  = Momento de fisuración de la sección:

- 1 El propio ACI, en los documentos específicos del Comité 435 de flechas, presenta procedimientos más precisos pero más complejos (48.17) y (48.19).
- 2 La fórmula representa una solución para la transición del valor  $I_b$  a  $I_f$  según crece el momento aplicado y, por lo tanto, la fisuración. Para cuantías altas,  $I_e \approx I_f$ . Para secciones en T,  $I_f$  puede ser incluso mayor que  $I_b$  si la cuantía es alta.

$$M_f = \frac{f_{ck,flex} I_b}{y_1} \quad [48.9]$$

siendo  $f_{ck,flex}$  la resistencia a flexotracción a la edad de  $j$  días definida como  $f_{ck,flex} = 0,37 (f_{ckj})^{2/3}$  (unidades en N/mm<sup>2</sup>);  $I_b$  el momento de inercia de la sección bruta de hormigón respecto al eje que pasa por su c.d.g. e  $y_1$  la distancia de dicho c.d.g. a la fibra de tracción más alejada. (El valor de  $f_{ck,flex}$  está tomado de ACI 318-95).

$M_a$  = Máximo momento flector aplicado en la vida de la pieza, hasta el instante en que se calcula la flecha, en la sección que luego se indica.

$I_b$  = Momento de inercia de la sección bruta, ya definido<sup>1</sup>.

$I_f$  = Momento de inercia de la sección fisurada homogeneizada a valores de hormigón, respecto al eje que pasa por su c.d.g.  $\left( m = \frac{E_s}{E'_{ci}} \right)$  donde  $E'_{ci}$  viene dada por [28.12].

El valor de  $I_e$ , de acuerdo con el método de BRANSON, se toma como base para el cálculo de la flecha instantánea y, por lo tanto, para homogeneizar el valor de  $I_f$  debe tomarse para el cálculo de  $m$  el módulo  $E'_{ci}$  correspondiente a cargas instantáneas.

Como ya se ha dicho, el método de BRANSON fue adoptado, tras un contraste experimental, por el Comité ACI-435 como el mejor de los disponibles para uso práctico. En la figura 48-5 se recoge un gráfico comparativo de los distintos ensayos (48.19). Como puede verse, el margen de error a que conduce el método es del orden de  $\pm 20\%$ , lo cual, en nuestro actual estado de conocimientos, representa una precisión razonable. El método es válido para piezas en general y es claro que, para algún tipo particular, la experimentación concreta y suficientemente amplia puede conducir a valores más exactos.

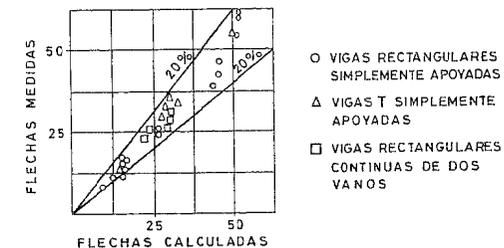


Figura 48-5

- 1 Puede tomarse en vez de  $I_b$  el momento de la sección homogeneizada con  $m = \frac{E_s}{E'_{ci}}$ , siendo  $E'_{ci}$  el módulo de deformación del hormigón a la edad de carga, para cargas instantáneas. Esto supone que ya se ha armado la pieza al comprobar la flecha durante el proyecto de la estructura.

El momento de inercia a adoptar en el cálculo será:

#### Tramos simplemente apoyados

Se adoptará como  $I_e$  el valor de  $I_e$  dado por [48.8], siendo  $M_a$  el máximo momento del vano.

#### Voladizos

Se adoptará como  $I_e$  el valor de  $I_e$  dado por [48.8] para la sección de arranque.

#### Tramos de vigas y forjados continuos de sección no rectangular

$$I_e = 0,50 I_{em} + 0,25 (I_{ed} + I_{ef}) \quad [48.10]$$

#### Tramos con un extremo apoyado y el otro continuo, de vigas y forjados continuos de sección no rectangular

$$I_e = 0,50 I_{em} + 0,50 I_{ec} \quad [48.11]$$

#### Tramos continuos de piezas de sección rectangular

Se adoptará como valor de  $I_e$  el dado por [48.8], siendo  $M_a$  el máximo momento del vano.

En [48.10],  $I_{em}$  es el valor de  $I_e$  para la sección en el punto de momento máximo en vano e  $I_{ed}$  e  $I_{ef}$ , los valores de  $I_e$  en los apoyos dorsal y frontal, tomando para  $M_a$  el valor del momento máximo en vano o apoyo, según el caso.

En [48.11],  $I_{ec}$  es el valor de  $I_e$  para la sección en el apoyo con continuidad, tomando para  $M_a$  el momento en dicho apoyo.

Para el cálculo de flechas debidas a una carga puntual importante en el centro de la luz, debe tomarse

$$I_e = I_{em}$$

Para la aplicación de la fórmula de BRANSON es necesario emplear, como ya se ha dicho, el valor de  $M_a$  correspondiente al nivel de carga considerado. *Por tanto, la flecha producida por un incremento de carga del valor  $p_1$  al  $p_2$  debe ser calculada como diferencia de las flechas correspondientes a los niveles  $p_1$  a  $p_2$  y no como flecha debida al incremento  $p_2 - p_1$ .*

Un aspecto esencial es que, aunque las Normas no lo indiquen, el valor de  $I_e$  a tomar de acuerdo con [48.8] no es, realmente, el debido al momento flector actuante para el estado de carga para el que se calcula la flecha, sino, tal como hemos definido,  $M_a$  es el mayor valor aplicado hasta ese momento. Es decir, que la inercia a considerar es la menor inercia "histórica" alcanzada por la pieza, pues es claro que una vez producida la fisuración para un cierto estado de carga, la descarga ya no reduce la fisuración ocurrida. Véase CALAVERA y otros (48.20) y (48.22).

Lo dicho aquí tiene especial importancia para forjados construidos por el sistema de cimbrado de plantas consecutivas, pues es conocido que estos forjados en el proceso de cimbrado pasan por etapas en que la carga es del orden de 2, 3 veces su peso propio

aunque luego al descimbrarlos la carga actuante sea sólo su peso propio. La importancia de este tema en las flechas ha sido ya señalada en varias ocasiones. (Véase CALAVERA (48.21) y GARDNER (48.23), (48.24), y debería ser cuidadosamente considerada por quienes deseen afinar el cálculo de flechas en cuyo caso no debería omitirse el cálculo de la flecha debida al proceso constructivo.

Para el cálculo de la flecha adicional diferida,  $f_d$ , considera que es igual a la instantánea,  $f_i$ , multiplicada por un factor

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'} \quad [48.12]$$

donde  $\xi$  viene dado por el gráfico de la figura 48-6 y  $\rho'$  es la cuantía geométrica de la armadura de compresión, si existe. Debe tomarse el valor de  $\rho'$  correspondiente a la sección crítica de vano en piezas simplemente apoyadas o continuas y a la del arranque en el caso de voladizos

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd} \quad [48.13]$$

siendo  $d$  el canto útil y  $b$  el ancho de la cabeza comprimida de la sección<sup>1</sup>. El coeficiente  $\xi$  recoge simultáneamente los efectos de fluencia y retracción.

El gráfico de la figura 48-6 permite el cálculo de flechas activas, pero debe recordarse el empleo del valor  $M_a$  adecuado para el cálculo de  $I_e$  de acuerdo con lo que ya ha sido explicado en 48.6.

Debe prestarse atención a la debida interpretación del gráfico de la figura 48-6, pues la frase "Tiempo en años" puede inducir a confusión.

El gráfico conduce a que para cargas aplicadas íntegramente a edades cortas, para  $\rho' = 0$ , resulta  $\xi = 2$  y, por tanto, la flecha diferida es doble de la instantánea y la total, triple de la instantánea.

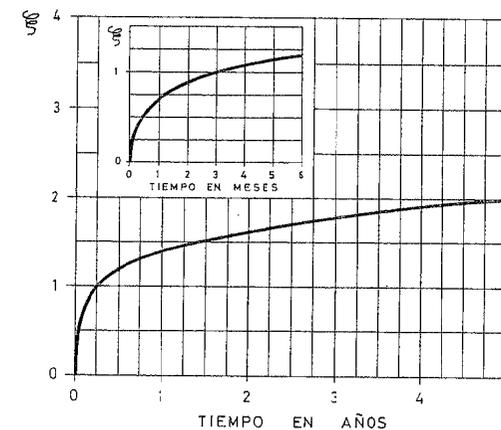


Figura 48-6

<sup>1</sup> EHE sustituye la curva de la figura 48-6 por una tabla de valores numéricos.

Sin embargo, si la carga se aplica a una edad  $t_1$ , no despreciable, como es frecuente que ocurra en edificación para la tabiquería y el solado, el valor de  $\xi$  a introducir en [48.12] no es  $\xi = 2$  (Fig. 48-7) sino  $\xi = 2 - \xi_1$ . Lo anterior es importante. Para  $t_1 = 3$  meses (un valor mínimo en la mayoría de los edificios para las cargas de tabiquería y solado) resulta  $\xi = 2 - 1 = 1$ , en lugar del valor 2<sup>1</sup>. En general, la flecha adicional diferida entre las edades  $t_1$  y  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) debe, por tanto, calcularse con el valor

$$\xi = \xi(t_2) - \xi(t_1) \quad [48.14]$$

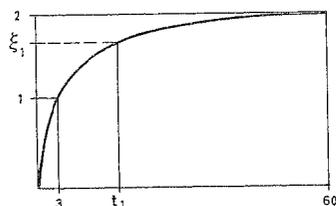


Figura 48-7

Para el caso habitual en que la carga total  $P$  se aplica por fracciones  $P_1, P_2, \dots, P_n$  a edades  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , puede aceptarse el tomar un valor medio ponderado equivalente,  $\xi_e$ .

$$\xi_e = \frac{\xi_1 \cdot P_1 + \xi_2 \cdot P_2 + \dots + \xi_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} \quad [48.15]$$

donde  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son los valores correspondientes a los tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  en la figura 48-6. Para el cálculo de la flecha diferida se tomará por tanto  $\xi = 2 - \xi_m$  en [48.12].

Calculado el valor  $\xi_e$  a él le corresponde en el gráfico de la figura 48-6 un tiempo equivalente  $t_e$ , en el que puede considerarse aplicado el conjunto de las cargas permanentes y en particular con él puede calcularse el valor de  $E'_{ci}$  para el cálculo de la flecha instantánea.

#### 48.6.1 CORRECCIONES ADICIONALES AL MÉTODO DE EHE EN FUNCIÓN DE LA HUMEDAD AMBIENTE Y DEL ESPESOR MEDIO DE LA PIEZA

El método de EHE, tomado como hemos dicho del ACI, buscando la simplicidad, no considera las variaciones de la humedad relativa del ambiente ni del espesor medio de la pieza. Ambas variables tienen influencia sobre la flecha diferida. La referencia (48.17) resume información diversa sobre el tema.

El método expuesto en 48.6 para el cálculo de la flecha diferida mediante el coeficiente  $\xi$  parte de que la pieza tiene un espesor medio de 150 mm y está situada en un ambiente con humedad relativa  $HR = 40\%$ .

<sup>1</sup> Aunque ACI 318 y EHE son excesivamente concisas en este punto, interpretar otra cosa conduciría a suponer que las deformaciones diferidas en un período  $\Delta$  inicial y en el mismo período cuando el hormigón tiene gran edad, son iguales, en clara oposición a lo visto en 48.4.

El coeficiente  $\xi$  puede ser multiplicado por los coeficientes  $k_f$ , función del espesor medio y  $k_h$ , función de la humedad relativa, de acuerdo con las tablas T-48.1 y T.48-2.

TABLA T-48.1

#### FACTOR CORRECTOR $k_h$ DEL COEFICIENTE $\xi$ EN FUNCIÓN DE LA HUMEDAD AMBIENTE

Humedad relativa %	40	50	60	70	80
$k_h$	1.00	0.94	0.87	0.80	0.73

TABLA T-48.2

#### FACTOR CORRECTOR $k_f$ DEL COEFICIENTE $\xi$ EN FUNCIÓN DEL ESPESOR MEDIO DE LA PIEZA

Espesor medio $\frac{2 \cdot A_c}{U}$ (mm)	50	75	100	150	200	250	300
$k_f$	1,30	1,17	1,11	1,00	0,96	0,91	0,86

El examen de las tablas anteriores permite evaluar las diferencias entre los valores estimados mediante el método del ACI y EHE y los valores reales probables de las flechas con la piezas en otras condiciones.

- Viga de espesor medio 150 mm y ambiente  $HR = 40\%$

$$k_h k_f = 1$$

- Forjado de espesor medio 75 mm y ambiente  $HR = 40\%$

$$k_h k_f = 1,30$$

- Viga de espesor medio 250 mm y ambiente  $HR = 80\%$

$$k_h k_f = 0,66$$

- Forjado de espesor medio 75 mm y ambiente  $HR = 80\%$

$$k_h k_f = 0,85$$

Obsérvese la fuerte influencia de ambas variables, y en particular del espesor medio y la trascendencia que ello tiene para el caso de forjados y losas.

## 48.7 CLASES DE FLECHAS A CONSIDERAR

Como norma general, en la mayoría de los casos de edificación puede ser necesario calcular tres tipos de flechas debidas a acciones verticales:

a) *Flechas instantáneas*

Han de basarse en el valor del módulo  $E'_{ci}$  dado por [28.12].

b) *Flecha total*

Su cálculo se realiza sumando a las instantáneas las diferidas calculadas por alguno de los métodos expuestos a continuación.

c) *Flecha activa*

En los casos en que interesa controlar el riesgo de daños producidos por la deformación de los elementos estructurales en partes no estructurales del edificio, tales como, por ejemplo, las tabiquerías y las fachadas, es necesario introducir este concepto.

Se entiende por flecha activa de un elemento estructural en relación con otro no estructural, aquella producida en el primero a partir de la construcción del segundo<sup>1</sup>.

En la práctica, la flecha activa cuyo cálculo es necesario con más frecuencia es la de los forjados en relación con la tabiquería. De acuerdo con lo anterior, dicha flecha activa estaría compuesta de los siguientes componentes:

*Instantáneas:*

- Flecha instantánea debida a las sobrecargas de uso.
- Flecha instantánea debida al solado<sup>2</sup>.
- Flecha instantánea debida a la tabiquería<sup>3</sup>.

*Diferidas:*

- Flecha diferida del peso propio del forjado, producida a partir de la flecha de construcción de la tabiquería.
- Flecha diferida debida a la carga de tabiquería.
- Flecha diferida debida a la carga de solado.
- Flecha diferida debida a la posible fracción de las sobrecargas de uso que pudiera ser considerada como de larga duración.

No entran, por tanto, en el cálculo de la flecha activa ni la instantánea de descimbrado, ni la diferida de peso propio del forjado desde el descimbrado hasta la construcción de la tabiquería.

- 1 La flecha activa se acerca más a la total cuanto más baja es la relación peso propio/carga total y cuanto más rápido es el proceso de construcción.
- 2 Se supone que, como es lo más frecuente, el solado se coloca después de construida la tabiquería.
- 3 Puede parecer extraño que se considere que su flecha instantánea puede producir daños, en la propia tabiquería. Téngase en cuenta que la rápida rigidización de los tabiques después de construidos hace que las cargas de los inmediatamente próximos a uno dado, construidos pocos días después, produzcan flechas instantáneas que puedan dañar al primero.

### Método general<sup>1</sup>

Para el caso más general, que es el de aplicación de la carga total de forjados en cuatro fracciones y en que se desea no hacer uso de la simplificación admitida por EHE de un  $\xi_e$  equivalente según [48.15], las cargas son:

- Peso propio.
- Tabiquería.
- Solado.
- Sobrecarga de uso.

La figura 48-8 indica el proceso de deformación:

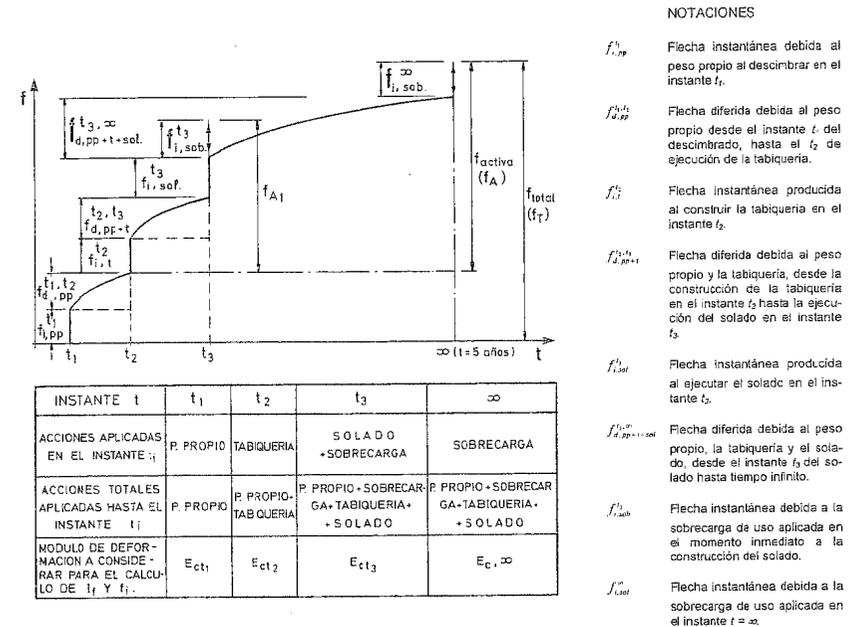


Figura 48-8

y los distintos componentes de la flecha, tanto total como activa.

De acuerdo con la figura 48-8, se tiene:

$$f_T = f_{i,pp}^{t_1} + f_{d,pp}^{t_2,t_1} + f_i^{t_2} + f_{d,pp+1}^{t_3,t_2} + f_{i,so}^{t_3} + f_{d,pp+so}^{t_3,t_3} + f_{i,so}^{t_3} \quad [48.16]$$

1 El libro citado en la referencia (48.3) contiene programas informáticos y tablas para el cálculo inmediato de todas las flechas. El cálculo manual, como se verá más adelante en los ejemplos, es trabajoso. En particular, puede tenerse en cuenta el proceso de cimbrado.

$$f_A = f_{i,t}^{t_2} + f_{i,pp+t}^{t_2,t_3} + f_{i,sol}^{t_3} + f_{i,pp+t+sol}^{t_3,\infty} + f_{i,sol}^{\infty} \quad [48.17]$$

En relación con el proceso, debe hacerse notar lo siguiente:

- Las flechas instantáneas en cada momento deben ser calculadas con el valor de  $E'_{ci}$  correspondiente a la edad  $t$ . Esto es factible en estudio de obras construidas, en que se puede generalmente conocer el historial de temperaturas y humedades, lo que hace posible una estimación adecuada de  $E'_{ci}$  en cada instante. Para proyectos, es difícil que en el momento de su redacción el proyectista pueda predecir este tipo de información. Suponer las condiciones normalizadas ( $t = 20^\circ \text{C}$ ,  $\text{HR} \geq 95\%$ ) no deja de ser meramente convencional y no está del lado de la seguridad.
- En cada caso, el momento de inercia equivalente,  $I_e$ , será el correspondiente a la totalidad de las cargas aplicadas. Recuérdese, como excepción, que si el forjado fue construido mediante el cimbrado de plantas consecutivas, habrá sufrido antes de descimbrar cargas equivalentes a 2,3 veces su peso propio, por lo que será el valor de  $I_e$  correspondiente a esa carga el que rija para calcular  $f_{i,pp}$  e incluso las flechas en estados más avanzados de cargas. Véase CALAVERA (48.22).
- El momento de inercia equivalente en cada instante  $t$ , se calcula tomando como valor de  $E'_{ci}$  para la homogeneización de armaduras en el cálculo de  $I_p$  el valor de  $E'_{ci}$  correspondiente a la edad  $t_p$ .
- Es en cambio puramente convencional el valor de  $f_{ct,flex}$  para el cálculo del momento de fisuración. En lo que sigue, adoptamos para valor de  $f_{ct,flex}$  el del momento de la puesta en carga, pero no más del correspondiente a la edad de 28 días y lo mantenemos constante para el resto de los incrementos de carga y por tanto de tensiones de flexotracción.
- El cálculo de incremento de flecha instantánea al aplicar la tabiquería se hace mediante la fórmula:

$$f_{i,t}^{t_2} = f_{i,pp+t}^{t_2} - f_{i,pp}^{t_1}$$

Obsérvese que el primero de los sumandos del segundo término se calcula con el valor  $E'_{ci}$  a la edad  $t_2$  y el segundo, a la edad  $t_1$ . Análogamente el primero se calcula con la inercia equivalente de su valor de carga de peso propio más tabiquería, y el segundo con la correspondiente al peso propio.

- Análogamente el cálculo del incremento de flecha instantánea debida a solado, se hace mediante la fórmula

$$f_{i,sol}^{t_2} = f_{i,pp+t+sol}^{t_2} - f_{i,pp+t}^{t_1}$$

con análogas consideraciones sobre  $E'_{ci}$  e  $I_e$  que en el párrafo anterior.

- Al ejecutar el solado es, aunque improbable, concebible que se aplique la sobrecarga de uso. Ello produciría una flecha activa, designada como  $f_{A1}$  en el instante  $t_3$ . Esta flecha es habitualmente inferior a la flecha activa  $f_A$  a plazo infinito a pesar de que la primera se produce con menor valor  $E'_{ci}$ , pues

normalmente la flecha diferida entre  $t_3$  e  $\infty$  es muy superior a esa diferencia de flechas instantáneas de sobrecarga a tales edades.

Sin embargo, la simple posibilidad de ocurrencia de la sobrecarga en el instante  $t_3$ , obliga a considerar su valor, por la importancia que tiene en la fisuración de la pieza en ese instante, que hace que el valor de  $I_e$  a considerar para el cálculo

$f_{i,sol}^{t_3}$  sea al debido a la totalidad de las cargas y no sólo a las permanentes. Esto no solamente es válido en lo referente al valor de  $f_{i,sol}^{t_3}$  sino también al de  $f_{i,pp+t+sol}^{t_3}$ .

#### Método simplificado

En el caso simplificado de que se considere, de acuerdo con [48.15] un valor  $\xi_e$ , el diagrama de la figura 48-9 se simplifica, adoptando la forma indicada en la figura 48-9.

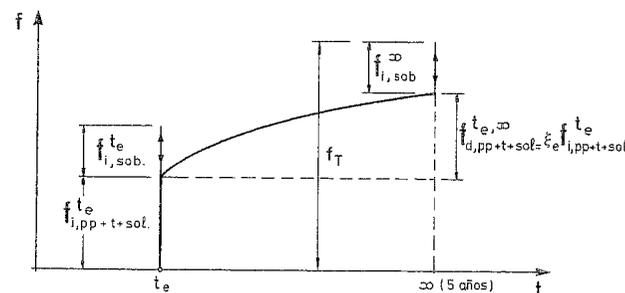


Figura 48-9

Debe observarse que el cálculo  $f_{i,pp+t+sol}$  y de  $f_{i,sol}^{\infty}$  exige estimar un tiempo equivalente de aplicación del conjunto de cargas, para evaluar el valor de  $E'_{ci}$  pudiendo adoptarse, como dijimos, el que corresponde a  $\xi_e$  en la figura 48-6.

Obsérvese que, con este procedimiento simplificado, no es posible el cálculo de la flecha activa, pues no es posible descontar de la total la instantánea de descimbrado del forjado y la diferida de peso propio del forjado desde su descimbrado hasta la construcción de la tabiquería.

### 48.8 INFLUENCIA DEL LÍMITE ELÁSTICO DEL ACERO EMPLEADO

Un punto que presenta interés es el de la influencia del límite elástico  $f_{yk}$  del acero sobre las flechas. En principio, al pasar de un acero ordinario a un acero B 400, los alargamientos en servicio son del orden del doble que al emplear el antiguo acero liso B 220. De esto no puede deducirse, sin embargo, que las flechas vayan a duplicarse, ya que la adherencia de las barras corrugadas es notablemente mejor que la de las barras lisas.

En el otro extremo, se maneja a veces el argumento de que la diferencia de flechas es acusada en estados de prerrotura, pero que, en servicio, los momentos de inercia no dependen casi de la cuantía de armadura y, por lo tanto, las flechas serán iguales con ambos aceros.

Esta consecuencia no es cierta, pues con los niveles actuales de seguridad, cuando se emplean cuantías altas y barras de alto límite elástico, la fisuración en servicio está controlada, pero es apreciable.

Los ensayos del autor en INTEMAC se recogen en la figura 48-10. Se ensayaron dos series gemelas de vigas, una armada con acero B 220 y otra con acero B 500, abarcando las cuantías mínima, media, crítica superior y una alta con armadura de compresión, de sección un tercio de la de tracción. Las vigas se mantuvieron cargadas a servicio en condiciones de intemperie durante un año.

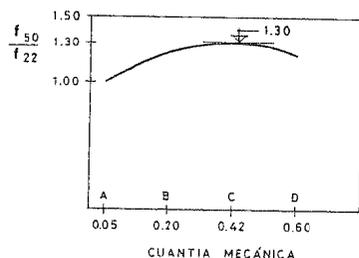


Figura 48-10

La relación de flechas al año se indica en la figura. Como se ve, la diferencia máxima es del orden del 30% para vigas con cuantía crítica superior. Para las cuantías habituales y también para piezas con armadura de compresión, las diferencias son escasamente importantes y pueden considerarse incluidas en el valor de  $I_e$  a través de la variación de cuantía.

## 48.9 CÁLCULO DE LA FLECHA DEBIDA A LA RETRACCIÓN

La retracción del hormigón, tal como vimos en 28.4.2, produce compresiones en la armadura y, correlativamente, tracciones en el hormigón. Como en el caso de piezas en flexión la armadura está distribuida asimétricamente, la retracción produce flechas del mismo signo que las producidas por las acciones exteriores.

Las flechas de retracción no son importantes en el conjunto de las flechas totales, y su cálculo, al depender de muchas variables y en particular de la fisuración, no puede ser realizado con gran precisión.

Por supuesto, la existencia de armadura de compresión reduce las flechas de retracción, como vimos que lo hacía también con las de fluencia.

Considerando una pieza de hormigón armado de sección cualquiera, la flecha de retracción para una pieza simplemente apoyada de luz  $L$  se obtiene como caso particular de la fórmula [48.18].

$$f_r = k \cdot \frac{S_s \cdot \varepsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2 \quad [48.18]$$

donde:

$S_s$  es el momento estático de las armaduras (de tracción y compresión) respecto al eje que pasa por el c.d.g. (atención a que el momento estático de la armadura comprimida entra con signo negativo en el cálculo de  $S_s$ . El valor positivo de  $f_r$  indica flechas en la dirección de la carga).

$\varepsilon_r$  es el valor de la retracción, que puede calcularse de acuerdo con 28.4.2 o bien basándose en la Tabla T-28.5.

$$m = \frac{E_s}{E'_{ci}} \quad 1$$

$I_c$  momento de inercia de la sección de hormigón.

Es inmediato calcular los valores de  $k$  a partir de [48.18] para las diversas condiciones de apoyo. (Véase, por ejemplo, BRANSON (48.17)).

*Voladizos*

$$f_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_s \cdot \varepsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2 \quad [48.19]$$

*Viga simplemente apoyada*

$$f_r = \frac{1}{8} \cdot \frac{S_s \cdot \varepsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2 \quad [48.20]$$

*Vigas continuas de dos vanos*

$$f_r = \frac{1}{12} \cdot \frac{S_s \cdot \varepsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2 \quad [48.21]$$

*Vano extremo de viga continua con tres o más vanos*

$$f_r = \frac{1}{11} \cdot \frac{S_s \cdot \varepsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2 \quad [48.22]$$

1 En la fórmula hay imprecisión respecto al eje para tomar el valor  $S_s$  y respecto a los valores de  $E'_{ci}$  e  $I_e$ , dada la influencia de la fisuración sobre ello. BRANSON, en (48.17) recomienda tomar para  $E'_{ci}$  la mitad del valor instantáneo y para  $I_e$  el de la sección bruta. El EUROCÓDIGO EC-2, aunque no lo indica explícitamente, parte de adoptar el valor de  $E_{c,ef}$  a todos los efectos. (Véanse ejemplos al final del Capítulo). La diferencia entre ambos criterios es apreciable, aunque en la flecha total tal diferencia no sea importante.

Véase más adelante, al tratar del método del EUROCÓDIGO EC-2, la estimación de  $I_e$ , a nuestro juicio preferible a la indicada por BRANSON.

$$f_r = \frac{1}{15} \cdot \frac{S_s \cdot \epsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2 \quad [48.23]$$

En el caso de vigas simplemente apoyadas los valores de  $S_s$  e  $I_e$  se refieren a la sección de máximo momento en vano. En voladizos, a la sección de arranque. En el caso de vigas continuas, el EUROCÓDIGO no indica nada. De nuevo BRANSON da una propuesta concreta en (48.17) recomendando se tomen los valores de la sección de máximo momento de vano.

La razón de tomar los valores de  $S_s$  e  $I_e$  correspondientes a la sección de máximo momento de vano en vigas continuas, reside en el hecho de que la cuantía de tracción en vano es, generalmente, del mismo orden que la diferencia de cuantías de tracción y compresión en los apoyos, por lo que las curvaturas son sensiblemente iguales. En ello se basa la deducción de las fórmulas [48.21], [48.22] y [48.23].

La retracción es especialmente importante en forjados aligerados, tanto unidireccionales como sin vigas, debido a la forma de la sección. GARDNER y SCALON, en la referencia (48.24), presentan resultados de medidas en edificios reales que resultaron muy superiores a las teóricamente previsibles.

### 48.10 MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE FLECHAS TOTALES DEL MODEL CODE<sup>1</sup>

Es un método extraordinariamente simple y de gran precisión. Su inconveniente principal es que en su estado actual no permite el cálculo de la flecha más que a plazo infinito, por lo que no permite el estudio de procesos de descimbrado, ni el estudio de flechas a otras edades, ni en particular la flecha activa.

La flecha total a largo plazo viene definida por las expresiones:

$$f_{i,\infty} = (1 + \phi) f_{i,b} \quad \text{para } M < M_f \quad [48.24]$$

$$f_{i,\infty} = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \eta (1 - 20 \rho_{cm}) f_{i,b} \quad \text{para } M \geq M_f \quad [48.25]$$

donde:

$f_{i,b}$  es la flecha instantánea calculada con el valor  $E'_{ci}$  y el de  $I_b$  de la sección bruta, sin considerar la armadura. (Aunque el MODEL CODE 90 no indica nada, se sobreentiende que  $E'_{ci}$  es el módulo de deformación instantáneo a la edad de aplicación de la carga).

$M$  momento aplicado en el punto medio de la luz de una viga o losa, o en el arranque de un voladizo, bajo las acciones frecuentes.

$M_f$  se definió ya en [48.9].

<sup>1</sup> El MODEL CODE 90 no da ningún procedimiento para el cálculo de la flecha instantánea. Se sugiere emplear el método de EHE.

$\phi$  coeficiente de fluencia, que puede calcularse de acuerdo con 28.4.1 o más simplemente tomado de la Tabla T-28.4.

Definimos como

$\rho_m$  la cuantía geométrica media de la armadura de tracción, calculada de acuerdo con la ecuación [48.26].

$\rho_{cm}$  la cuantía geométrica media de la armadura de compresión, calculada de acuerdo con la ecuación [48.26].

La cuantía media  $\rho_m$ , bien de la armadura de tracción bien de la de compresión, se determina con la fórmula:

$$\rho_m = \rho_a \frac{l_a}{l} + \rho_v \frac{l_o}{l} + \rho_b \frac{l_b}{l} \quad [48.26]$$

donde  $\rho_a$ ,  $\rho_v$  y  $\rho_b$  son las cuantías geométricas en porcentaje, de las armaduras de tracción o compresión, respectivamente, y  $l_a$ ,  $l_o$  y  $l_b$  las longitudes indicadas en la figura 48-11 que corresponde al caso más general en que todas las secciones tienen armaduras de compresión.

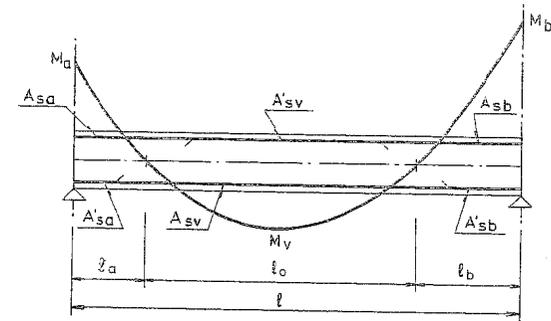


Figura 48-11

$\eta$  es un factor de corrección que tiene en cuenta los efectos de la fisuración y de la fluencia y se indica en la Tabla T-48.3.

TABLA T-48.3

VALORES DEL COEFICIENTE  $\eta$  PARA ESTIMACIÓN DE FLECHAS

$\rho_m$ (%)	0,15	0,20	0,30	0,50	0,75	1,00	1,50
$\eta$	10	8	6	4	3	2,5	2

Este método no recoge la influencia de la retracción en la flecha, que debe ser añadida, una vez calculada mediante lo expuesto en 48.9 ó 48.11.

## 48.11 MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE FLECHAS DEL EUROCÓDIGO EC-2

El EUROCÓDIGO parte de aceptar que en general los parámetros  $\alpha$ , relacionados con la deformación, como pueden ser las deformaciones unitarias, las curvaturas, rotaciones y, en particular, las propias flechas, vienen expresados con buena aproximación por la fórmula

$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad [48.27]$$

donde:

$\alpha_I$  y  $\alpha_{II}$  son, respectivamente, los valores del parámetro  $\alpha$ , calculado para sección sin fisurar y completamente fisurada.

$\zeta$  es un coeficiente de distribución dado por la expresión

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad ^1$$

$\beta_1 = 1$  para barras de alta adherencia

$\beta_1 = 0,5$  para barras lisas

$\beta_2 = 1$  para un solo ciclo de carga breve

$\beta_2 = 0,5$  para cargas permanentes o muchos ciclos repetidos de carga

$\sigma_s$  = Tensión en el acero en la sección fisurada. (Ver Capítulo 47).

$\sigma_{sr}$  = Tensión en el acero en la sección fisurada, bajo el valor de la carga que produce la fisuración. (Ver Capítulo 47).

El valor de  $\zeta$  se toma igual a cero para secciones no fisuradas.

Por sencillez,  $\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s}$  puede sustituirse por la expresión  $\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \approx \frac{M_f}{M_a}$ , como ya dijimos.

Por tanto, la flecha viene dada por la fórmula

$$f = \zeta f_{II} + (1 - \zeta) f_I \quad [48.28]$$

donde  $f_I$  y  $f_{II}$  son las flechas correspondientes a sección no fisurada y completamente fisurada, respectivamente. (Esto es válido también para la flecha de retracción calculada de acuerdo con 48.9).

El EUROCÓDIGO define un módulo de deformación efectivo,  $E_{c,ef}$ , que proporciona directamente la flecha total. (Instantánea más diferida).

$$E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \phi} \quad [48.29]$$

<sup>1</sup> Es, con otra notación, el coeficiente que empleamos en el Capítulo de Fisuración.

donde  $E_{cm}$  viene dado por la expresión [28.12] y los valores de  $\phi$  vienen dados en el Capítulo 28, aunque puede manejarse también la Tabla T-28.4.

Obsérvese que el módulo  $E_{c,ef} = \frac{E_{cm}}{1 + \phi}$ , en este método se emplea también para obtener el coeficiente  $m = \frac{E_s}{E_{c,ef}}$  de homogeneización de armaduras para hallar el momento de inercia y la flecha  $f_{II}$  correspondiente a sección totalmente fisurada.

El método no incluye la flecha debida a retracción, que debe añadirse calculándola de acuerdo con lo expuesto en 48.9.

Como el método del MODEL CODE 90, este método tampoco permite evaluar la flecha activa.

Debe llamarse la atención sobre el hecho de que en este método no se indica, para el caso de piezas hiperestáticas, cómo se calcula la inercia correspondiente. Sugerimos el empleo de las fórmulas [48.10] y [48.11].

## 48.12 DEFORMACIONES EN PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO<sup>1</sup>

El método expuesto en 48.6 y en particular la fórmula de BRANSON tal como se definió en [48.8] ni los métodos expuestos en 48.10 del MODEL CODE 90, en 48.11 del EUROCÓDIGO EC-2 son válidos para el cálculo de deformaciones en piezas de hormigón pretensado.

BRANSON en la referencia (48.17) expone una variante de su fórmula [48.8], válida para piezas pretensadas, tal como exponemos a continuación.

### a) PIEZAS NO FISURADAS

Si la pieza no está fisurada, para el cálculo de la flecha instantánea, basta tomar

$$I_e = I_h \quad [48.30]$$

donde  $I_h$  es la sección homogeneizada en acuerdo con lo visto en el Capítulo 31.

La flecha adicional diferida se calcula de acuerdo con lo expuesto en 48.6, con las correcciones indicadas en 48.6.1 si ha lugar.

### b) PIEZAS FISURADAS

BRANSON supone que, a partir del nivel de cero curvatura, la sección se comporta como una de hormigón armado. (Ver figura 48-12). (Se suponen acciones exteriores actuando en sentido de curvatura contraria al pretensado).

<sup>1</sup> El tema no es contemplado específicamente por EHE.

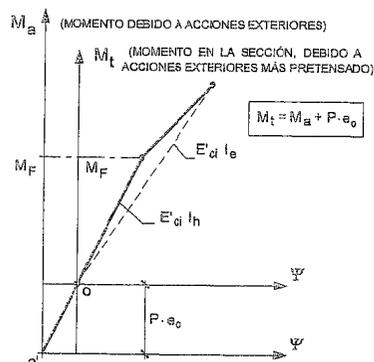


Figura 48-12

Si el momento aplicado  $M_a$  es menor que el momento de fisuración  $M_{f,a}$ , la curvatura instantánea debida a las acciones exteriores, considerando la contraflecha del pretensado, es:

$$\psi_c = \frac{M_a}{E'_{ci} I_h} \quad [48.31]$$

Si  $M_a > M_{f,a}$

$$\psi_a = \frac{M_a + P \cdot e_o}{E'_{ci} I_e} \quad [48.32]$$

El momento de fisuración  $M_{f,a}$ , producido por las acciones exteriores aplicadas hasta fisurar la pieza, habida cuenta del pretensado, será tal que:

$$f_{ck,flex} = \frac{M_{f,a}}{W_{lh}} + \frac{P}{A_{co}} + \frac{P \cdot e_o}{W_{l,o}} \quad [48.33]$$

donde:

- $M_t$  = Momento total aplicado a la sección.
- $M_a$  = Momento aplicado a la sección debido a las acciones exteriores.
- $E'_{ci}$  = Módulo instantáneo de deformación del hormigón.
- $\psi_a$  = Curvatura debida a las acciones exteriores.
- $A_{co}$  = Área de la sección neta de hormigón, sin fisurar.
- $I_h$  = Momento de inercia de la sección sin fisurar y homogeneizada.
- $I_e$  = Momento equivalente de inercia.

<sup>1</sup> Se presupone, como es usual, que en el momento de la aplicación del pretensado, no se ha producido fisuración apreciable.

$P$  = Valor de la fuerza de pretensado a la edad en que se calcula la flecha instantánea.

$e_h$  = Excentricidad de la fuerza de pretensado respecto al c.d.g. de la sección neta. (Positiva en el sentido de los ejes de referencia. Ver Capítulo 31).

$f_{ck,flex}$  = Resistencia característica del hormigón a flexotracción. Viene dada por

$$f_{ck,flex} = 0,37 (f_{ck})^{2/3}$$

$W_{l,o}$  = Módulo resistente de la sección neta correspondiente a la fibra más traccionada o menos comprimida del hormigón.

$W_{lh}$  = Módulo resistente de la sección homogeneizada de hormigón correspondiente a la fibra más traccionada o menos comprimida del hormigón.

Aceptando en [48.33]  $W_{l,o} \approx W_{lh}$  se tiene para el momento ( $M_{f,a}$ ) debido exclusivamente a las acciones exteriores, que fisura la pieza, habida cuenta del pretensado.

$$M_{f,a} = W_{lh} f_{ck,flex} - \frac{P W_{lh}}{A_{co}} - P \cdot e_o \quad [48.34]$$

El valor de  $I_e$  a considerar por tanto en [48.8] será:

$$I_e = \left( \frac{M_{f,a} + P \cdot e_o}{M_a + P \cdot e_o} \right)^3 \cdot I_h + \left[ 1 - \left( \frac{M_{f,a} + P \cdot e_o}{M_a + P \cdot e_o} \right)^3 \right] I_f \neq I_h \quad [48.35]$$

donde:

$I_h$  = Momento de inercia de la sección homogeneizada.

$I_f$  = Momento de inercia de la sección fisurada.

( $M_a$ , como se dijo, es el momento, debido a las acciones exteriores, actuantes en el instante en que se calcula la curvatura. **En sentido estricto, es el máximo que haya actuado de acuerdo con la historia de cargas.**)

El mismo BRANSON, con TROST, publicó en el ACI Journal en 1982 el artículo "Unified Procedures for Predictions the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Non Prestressed and Prestressed Concrete Members".

El Código ACI 318-95 sugiere el empleo de dicha fórmula.

El valor de  $P$  puede calcularse, para la edad en que se produce la flecha instantánea, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 26. Sin embargo, para la mayoría de los casos prácticos, el valor

$$P = 0,9 P_o \quad [48.36]$$

basado en suponer un 10% de pérdidas hasta la edad de cálculo de la flecha instantánea, es suficientemente aproximado.

La flecha adicional diferida se calcula de acuerdo con 48.6 con la fórmula del ACI, con las correcciones expuestas en 48.6.1. si ha lugar.

### 48.13 CÁLCULO DE LA CONTRAFLECHA EN SECCIONES PRETENSADAS

#### a) PIEZAS CON TENDONES RECTOS

Inmediatamente después de la aplicación de la fuerza de pretensado al hormigón, la pieza se encuentra sometida a un momento flector constante debido al pretensado. Para el caso de tendones rectos

$$M_p = P_{kt} e_o \quad [48.37]$$

Como habitualmente el valor de  $e_o$  es negativo,  $M_p$  produce una flecha ascendente denominada contraflecha que hace que la pieza se desprege del fondo del molde y se apoye sólo en sus extremos<sup>1</sup>. Su valor puede calcularse a partir de la expresión de la curvatura de acuerdo con la cual, para piezas de sección constante:

$$y'' = -\frac{P_{kt} e_o}{E'_{ci} I_o} \quad [48.38]$$

Integrando

$$y' = -\frac{P_{kt} e_o}{E'_{ci} I_o} x + C_1$$

Para  $x = \frac{L}{2}$  siendo  $L$  la luz total,  $y' = 0$ , luego:

$$C_1 = \frac{P_{kt} e_o L}{2 E'_{ci} I_o}$$

de donde:

$$y' = -\frac{P_{kt} e_o}{E'_{ci} I_o} x + \frac{P_{kt} e_o L}{E'_{ci} I_o} \frac{L}{2}$$

Integrando de nuevo:

$$y = -\frac{P_{kt} e_o}{E'_{ci} I_o} \frac{x^2}{2} + \frac{P_{kt} e_o L}{E'_{ci} I_o} \frac{L}{2} x + C_2$$

Con  $y = 0$  para  $x = 0$ , luego  $C_2 = 0$  y el valor de  $y_c$ , contraflecha en el centro, resulta:

$$y_c = \frac{P_{kt} e_o L^2}{8 E'_{ci} I_o} \quad [48.39]$$

<sup>1</sup> En el diseño de los moldes este hecho debe ser tenido muy en cuenta para que permitan a la pieza tomar su contraflecha, pues, de lo contrario, no se transmitiría el pretensado. En muchos casos se retiran algunas partes de los moldes antes de transferir.

Los valores negativos de  $y_c$  corresponden a contraflechas reales o sea flechas ascendentes.

El valor de  $I$  a tomar en [48.39] es el correspondiente a la sección neta y el valor de  $E'_{ci}$  es el correspondiente a carga instantánea para la contraflecha instantánea, a la edad de aplicación del pretensado.

La contraflecha, si no actúan otras acciones sobre la pieza, aumenta por efecto de las deformaciones diferidas. En ese caso, se debe considerar el decrecimiento con el tiempo del valor  $P_{kt}$  que en el instante inicial es  $P_{kt}$  y tiende a su valor permanente  $P_{kf}$  a causa de la reducción originada por la retracción, la fluencia y el relajamiento diferidos y la variación de  $E'_{ci}$  por el incremento de  $f_{cj}$ . En nuestra opinión es suficiente, dentro de la precisión que puede pretenderse, tomar para valores a largo plazo la media de ambos valores, con lo que se tiene:

*Contraflecha instantánea:*

$$y_{ci} = \frac{P_{kt} e_o L^2}{8 E'_{ci} I_o} \quad [48.40]$$

*Contraflecha adicional diferida:*

$$y_{cd} = \frac{(P_{kt} + P_{kf}) e_o L^2}{16 E_{cd} I_o} \quad [48.41]$$

$E'_{ci}$  debe calcularse a partir de la fórmula [28.11] y  $E_{cd}$  de acuerdo con el instante en que se calcule la contraflecha y el tipo de ambiente a que esté sometida.

Existen en principio dos razones para limitar las contraflechas: Una es de orden estético, pues, si bien la ausencia de contraflecha produce un efecto óptico de flecha, que resulta desagradable, también lo es una contraflecha excesiva.

El otro motivo es de orden constructivo (Fig. 48-13) y es que si la contraflecha es muy importante o bien la losa superior es de espesor constante, como la  $AB$ , en cuyo caso la cara superior no queda nivelada y es por otra parte de difícilísima ejecución, o bien se construye horizontal, como la  $A'B'$ , con lo cual aumenta el consumo de hormigón y el peso de la estructura pero se mantiene el espesor mínimo de la losa en el punto medio de la luz, o si se mantiene el espesor en apoyo, el espesor de losa en el punto medio es inferior al requerido.

Por todo ello se suele limitar la contraflecha. La Instrucción EHE, el MODEL CODE 90, el EUROCÓDIGO EC-2 y el ACI 318-95 no dicen nada al

respecto. Algunas Normas la limitan en  $\frac{L}{300}$ . En nuestra opinión este límite

es excesivo para la mayoría de los casos habituales de forjados de edificación y claramente peligroso en puentes de vigas prefabricadas.



Figura 48-13

Como al producirse la contraflecha la pieza queda apoyada por sus extremos, empieza a actuar inmediatamente el peso propio. En este sentido las medidas de control de contraflechas sobre piezas deben ser realizadas sobre piezas con su plano vertical de simetría situado en posición horizontal, pues, si no, la comparación con los valores [48.40] y [48.41] no sería correcta, siendo más importante la diferencia según lo sea la relación entre el momento de peso propio y el de pretensado.

Si se desea calcular la contraflecha óptica, es decir, la contraflecha menos la flecha de peso propio, las fórmulas serían:

$$y'_{ct} = \frac{P_{kt} e_o L^2}{8 E'_{ct} I_o} - \frac{5}{384} \frac{p L^4}{E'_{ct} I_h} \quad [48.42]$$

$$y'_{cd} = \frac{(P_{kt} + P_{kf}) e_o L^2}{16 E'_{cd} I_o} - \frac{5}{384} \frac{p L^4}{E'_{cd} I_h} \quad [48.43]$$

siendo  $p$  el peso de pieza por unidad de longitud.

La expresión [48.43] tiene poco interés, pues sólo es válida para piezas sobre las que nunca actúe otra carga que su peso propio.

#### b) CÁLCULO DE LA CONTRAFLECHA EN EL CASO DE TENDONES CURVOS

En este caso basta plantearse la fórmula

$$y'' = \frac{M}{E'_{ct} I_o} \quad [48.44]$$

con  $M_x = P \cdot e_{ox}$

( $e_{ox}$  es la excentricidad en el punto de abscisa  $x$ ).

Se obtiene, aplicando el 2º Teorema de MOHR [3.8] entre el apoyo y el centro del vano

$$y'_{c,l} = -\frac{P}{E'_{ct} I_o} \int_0^{l/2} x \cdot e_{ox} \quad [48.45]$$

válido para una pieza simétrica de sección constante.

Para piezas de sección variable y/o no simétrica, el procedimiento más práctico es la integración numérica de [48.44].

## 48.14 FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE FLECHAS

### 48.14.1. FÓRMULAS EXACTAS

#### a) Vanos

El caso general se indica en la figura 48-14 y corresponde al vano con carga  $p$  uniformemente repartida con momentos de empotramiento  $M_d, M_f$ <sup>1</sup>.

Con los signos de la figura, resulta:

$$M_s = -\frac{p}{2} x^2 + x \left[ \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right] - M_d$$

y como  $y'' = -\frac{M}{EI}$ , se tiene:

$$y'' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{px^2}{2} - x \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d \right]$$

e integrando dos veces:

$$y' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{px^3}{6} - \frac{x^2}{2} \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d x + C_1 \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{px^4}{24} - \frac{x^3}{6} \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right]$$

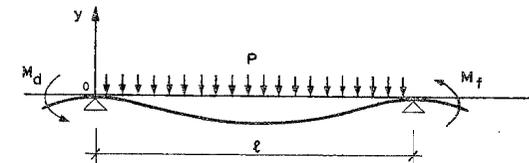


Figura 48-14

Con las condiciones  $y = 0$  para  $x = 0$  y  $x = l$ , se obtiene:

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{pl^3}{24} + \frac{l}{6} (M_f - 2 M_d)$$

<sup>1</sup> Los momentos  $M_d, M_f$  son acciones sobre los extremos de la pieza.  $M_d$  es, por tanto, igual en valor absoluto y de sentido contrario al momento flector en el apoyo dorsal.  $M_f$  coincide en valor y signo con el momento flector en el apoyo frontal.

y, por tanto, la abscisa  $x_m$  del punto de flecha máxima se obtiene anulando  $y'$ .

$$y' = \frac{1}{EI} \left[ \frac{px^3}{6} - \frac{x^2}{2} \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d x + \frac{pl^3}{24} + \frac{l}{6} (M_f - 2M_d) \right] \quad [48.46]$$

Obtenido  $x_m$  al anular [48.46] se sustituye en:

$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{px^4}{24} - \frac{x^3}{6} \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d \frac{x^2}{2} + \left[ \frac{pl^3}{24} + \frac{l}{6} (M_f - 2M_d) \right] x \right] \quad [48.47]$$

y se obtiene  $y_m$  que es la flecha máxima<sup>1</sup>.

Con independencia de que el cálculo de esfuerzos se haya hecho mediante el cálculo lineal o aceptando redistribución, los valores de  $M_d$  y  $M_f$  pueden ser los correspondientes al cálculo lineal. Por supuesto, si se emplean valores más reducidos por redistribución, los resultados en cuanto a flechas estarán del lado de la seguridad. En cualquier caso, la hipótesis pésima corresponde al vano considerado con carga permanente más sobrecarga y los contiguos sin sobrecarga.

b) Voladizos

Análogamente, se tiene (Fig. 48-15):

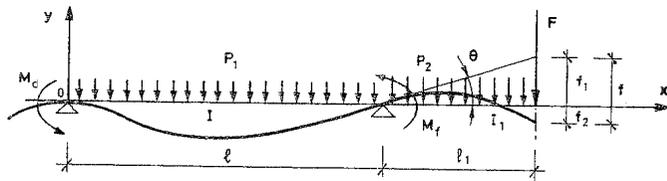


Figura 48-15

- a)  $M_d, M_f$  momentos de empotramiento actuantes sobre los extremos de la pieza.
- b) La carga  $p$  se considera positiva en el sentido negativo del eje  $oy$ .
- c) Las flechas se consideran positivas en el sentido negativo del eje  $oy$ .

Ángulo  $\theta$  de giro en el apoyo frontal

Viene dado por la fórmula

$$\theta = \frac{l}{3EI} \left[ -\frac{P_1 l^2}{8} + \frac{M_d}{2} + \frac{P_2 l_1^2}{2} + Fl_1 \right] \quad [48.48]$$

(Valores negativos de  $\theta$  corresponden a valores negativos de  $f_1$ ).

<sup>1</sup> Si no se dispone de un ordenador, la resolución manual es bastante trabajosa.

Flecha  $f_1$  (ver figura)

$$f_1 = \frac{ll_1}{3EI} \left[ -\frac{P_1 l^2}{8} + \frac{M_d}{2} + \frac{P_2 l_1^2}{2} + Fl_1 \right] \quad [48.49]$$

Flecha  $f$  (ver figura)

$$f = \frac{l_1^3}{EI_1} \left[ \frac{P_2 l_1}{8} + \frac{F}{3} \right] \quad [48.50]$$

Flecha óptica (ver figura)

$$f_2 = f + f_1 \quad [48.51]$$

#### 48.14.2 FÓRMULAS APROXIMADAS DEL ACI

Aunque las actuales facilidades de programación permiten el cálculo de las fórmulas exactas de manera muy simple, a continuación exponemos algunas fórmulas simplificadas<sup>1</sup>.

Para vano elásticamente empotrado en ambos extremos, puede aceptarse, si no hay grandes asimetrías de acciones, que la flecha en el punto medio de la luz es muy parecida a la máxima. En ese caso, la flecha en el punto medio viene dada por

$$f = k \frac{5}{48} \frac{Ml^2}{EI} \quad [48.52]$$

donde  $M$  es el momento flector en el arranque, cambiado de signo, para voladizos, y el momento, en la mitad de la luz, para vanos simplemente apoyados o continuos.

Los valores de  $k$  en [48.52] para cargas uniformemente repartidas son:

Voladizos

$$k = \frac{12}{5} \quad [48.53]$$

Vanos simplemente apoyados

$$k = 1 \quad [48.54]$$

Vanos continuos

$$k = 1,2 - 0,2 \frac{M_o}{M_m} \quad [48.55]$$

donde  $M_o$  es el momento flector isostático en el punto medio de la luz y  $M_m$  el momento flector en dicho punto.

<sup>1</sup> Proceden de los Comentarios a la revisión de 1989 del ACI 318.

En el caso de voladizos, el valor  $f$  dado por [48.52] da la flecha  $f$  en punta, según la figura 48-15. Para tener la flecha óptica  $f_2$  es necesario añadirle algebraicamente la  $f_1$  dada por [48.49].

Para el caso de cargas rectangulares, triangulares, puntuales, etc., los gráficos GT-147 y GT-148 tomados del formulario de INTEMAC, permiten reducirlas a cargas uniformes que producen la misma flecha en el punto medio de la luz en el caso de vanos biapoyados o en el vuelo en el caso de voladizos, con lo cual [48.52] puede aplicarse a la resolución de prácticamente cualquier caso de carga.

#### 48.14.3 LIMITACIÓN DE FLECHAS

##### Especificaciones españolas

EHE establece unas relaciones límites luz/canto útil, por debajo de las cuales no es necesaria la comprobación de la flecha. (La Instrucción EHE en los comentarios a este artículo establece como límite para "evitar la fisuración de tabiquerías" los valores

de  $\frac{L}{400}$  ó 10 mm que en nuestra opinión constituye una exigencia insuficiente para luces medias o grandes).

Los límites citados se recogen en la Tabla T-48.4.

**TABLA T-48.4**

**Relaciones  $L/d$  en elementos estructurales de hormigón armado sometidos a flexión simple**

SISTEMA ESTRUCTURAL	Elementos fuertemente armados ( $p = A_s/B_o d = 0,012$ )	Elementos débilmente armados ( $p = A_s/B_o d = 0,004$ )
Viga simplemente apoyada. Losa uni o bidireccional simplemente apoyada	14	20
Viga continua <sup>1</sup> en un extremo. Losa unidireccional continua <sup>1,2</sup> en un solo lado	18	24
Viga continua <sup>1</sup> en ambos extremos. Losa unidireccional continua <sup>1,2</sup>	20	30
Recuadros exteriores y de esquina en losa sobre apoyos aislados <sup>3</sup>	16	22
Recuadros interiores en losa sobre apoyos aislados <sup>3</sup>	17	25
Voladizo	6	9

1 Un extremo se considera continuo si el momento correspondiente es igual o superior al 85% del momento de empotramiento perfecto.

2 En losas unidireccionales, las esbelteces dadas se refieren a la luz menor.

3 En losas sobre apoyos aislados (pilares), las esbelteces dadas se refieren a la luz mayor.

Si se conocen las cuantías reales puede interpolarse entre las dos columnas.

La Instrucción EF contiene las especificaciones españolas para forjados<sup>1</sup>, que son las siguientes:

##### Limitaciones de flecha

a) Si el forjado sustenta, o descansa, en elementos no estructurales, la flecha activa no rebasará:

a-1) Para forjados en general, que sustentan tabiques y particiones con ladrillos cerámicos recibidos con morteros o pastas de yeso:

$$\frac{L}{400} \text{ ni } \frac{L}{800} + 0,6 \text{ cm} \quad [48.56]$$

(Lo que sea menor)<sup>2</sup>.

a-2) Si el forjado sustenta o descansa en otros elementos especialmente sensibles (tabiques muy rígidos, muros de cerramientos de fábrica, etc.).

$$\frac{L}{500} \text{ ni } \frac{L}{1.000} + 0,5 \text{ cm} \quad [48.57]$$

(Lo que sea menor).

b) Si el forjado no sustenta, ni descansa, en elementos constructivos diferentes de los estructurales, la flecha total a plazo infinito no superará

$$\frac{L}{250} \text{ ni } \frac{L}{500} + 1 \text{ cm} \quad [48.58]$$

En las expresiones anteriores,  $L$  es la luz del vano y, en el caso de voladizos, 1,6 veces el vuelo<sup>3</sup>.

#### 48.14.4 ESPECIFICACIONES DEL ACI 318-95

Dicha norma establece que no es necesario comprobar la flecha en vigas y forjados unidireccionales, cuyo canto no sea inferior a los valores recogidos en la Tabla T-48.5, válida siempre que la pieza no soporte ni se apoye en tabiques u otros elementos que puedan ser dañados por flechas excesivas.

Si estos cantos no son alcanzados, las flechas deben ser calculadas de acuerdo con lo expuesto anteriormente y deben cumplir las condiciones de la Tabla T-48.6.

La Norma ACI 435 "Allowable Deflections" (48.19) aconseja que, en el caso de elementos que soporten o se apoyen en tabiques o muros que puedan ser dañados por

- 1 Aunque EF se refiere a forjados unidireccionales, es evidente que estas limitaciones rigen para forjados sin vigas y para vigas planas.
- 2 Debe extenderse la especificación al caso de que el forjado sustente, o descansa, en tabiques, etc.
- 3 Para voladizo, el valor teórico, para igual flecha que en vano, es 1,76. Se adopta el valor citado como prudencia adicional.

flechas excesivas, la flecha activa se limite al menor de los valores

$$\left. \begin{array}{l} \frac{l}{600} \\ 7,5 \text{ mm} \end{array} \right\} [48.59]$$

que parece un límite más realista que el  $\frac{l}{480}$  de la Tabla T-48.6.

TABLA T-48.5

Tipo de pieza	Canto mínimo, <i>h</i>			
	Simplemente apoyada	Un extremo continuo y el otro apoyado	Ambos extremos continuos	Voladizo
Losa maciza	ℓ/20	ℓ/24	ℓ/28	ℓ/10
Vigas o forjados nervados	ℓ/16	ℓ/18,5	ℓ/21	ℓ/8

Si  $f_{yk} > 400 \text{ N/mm}^2$ , los valores de la tabla deben multiplicarse por  $0,4 + \frac{f_{yk}}{700}$  con  $f_{yk}$  en  $\text{N/mm}^2$ .

48.14.5 ESPECIFICACIONES DE LA NORMA FRANCESA BAEL-83 (48.25)

Establece para elementos cuya flecha excesiva pueda dañar muros o tabiques los límites siguientes para la flecha activa:

*Tramos con dos apoyos*

- Si  $l \leq 5 \text{ m}$   $f \leq \frac{l}{500}$

- Si  $l > 5 \text{ m}$   $f < 0,5 \text{ cm} + \frac{l}{1.000}$

TABLA T-48.6  
FLECHAS MÁXIMAS ADMISIBLES

Tipo de pieza	Flecha a considerar	Límite de flecha
Forjados de cubierta que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales que puedan ser dañados por flechas excesivas.	Flecha instantánea debida a la sobrecarga de uso.	$\frac{l}{180}^1$
Forjados de piso que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales que puedan ser dañados por flechas excesivas.	Flecha instantánea debida a la sobrecarga de uso.	$\frac{l}{360}$
Forjados de cubierta o piso que soportan o están unidos a elementos no estructurales que pueden ser dañados por flechas excesivas.	La parte de la flecha total que ocurra después de la construcción del elemento no estructural (suma de la flecha diferida de todas las cargas permanentes y de la instantánea debida a cualquier carga adicional de uso) <sup>2</sup> .	$\frac{l}{480}^3$
Forjados de cubierta o piso que soportan o están unidos a elementos no estructurales que no pueden ser dañados por flechas excesivas.		$\frac{l}{240}^4$

- 1 Esta limitación puede no ser suficiente en cubiertas casi horizontales que al deformarse puedan embalsar agua.
- 2 Puede deducirse la parte de flecha ocurrida antes de la construcción de los elementos no estructurales.
- 3 Puede excederse este límite si se toman medidas para que no resulten dañados los elementos no estructurales.
- 4 Este límite puede ser excedido si se da contraflecha de forma que la flecha total menos la contraflecha no exceda el límite.

*Voladizos*

Para  $l \leq 2 \text{ m}$

$$f \leq \frac{l}{250}$$

(No se dan reglas para voladizos con  $l > 2 \text{ m}$ ).

La Norma advierte que estas limitaciones no protegen de fisuras finas en las tabiquerías. Tan importante como la flecha en sí es la posición relativa de la tabiquería respecto al forjado y la posición de los tabiques en las distintas plantas.

La figura 48-16 resume las especificaciones de las Normas consideradas en lo que se refiere a flechas activas.

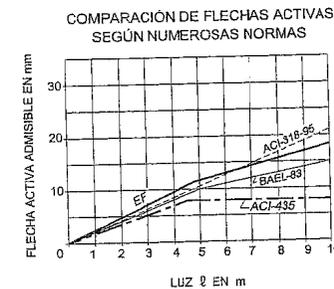


Figura 48-16

### EJEMPLO 48.1

Sea un vano interior de un dintel de un entramado de muchos vanos de luces iguales a 6,00 m, con sección de 250 · 500 mm, sometido a las acciones siguientes:

Peso propio = 3,50 kN/m<sup>2</sup> (Descimbrado a 28 días)

Tabiquería = 1,00 kN/m<sup>2</sup> (Construida a 60 días)

Solado = 1,00 kN/m<sup>2</sup> (Ejecutado a 120 días)

Sobrecarga = 2,00 kN/m<sup>2</sup>

La separación entre entramados es de 5 m.

Se adopta  $\gamma_{fs} = 1,35$ ;  $\gamma_{fg} = 1,5$ ;  $c = 1,5$ ;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $f_{ck} = 25$  MPa fabricado con cemento de endurecimiento normal. Acero B 400. Se supone un curado a 20°C y que la pieza está situada en ambiente húmedo (HR 80%). El diagrama de momentos característicos derivados del cálculo lineal es el indicado en la figura 48-17a).

La carga por metro lineal, despreciando el p.p. de la parte saliente de la viga, es 37,5 kN/m.

Redistribuyendo el 15% los momentos negativos, se obtienen los valores indicados en la figura 48-17b). Armando con estos valores se obtiene la distribución de armaduras de la figura 48-17c). Llamaremos  $t_1$  a la edad de descimbrado,  $t_2$  a la de construcción de la tabiquería y  $t_3$  a la de ejecución del solado.

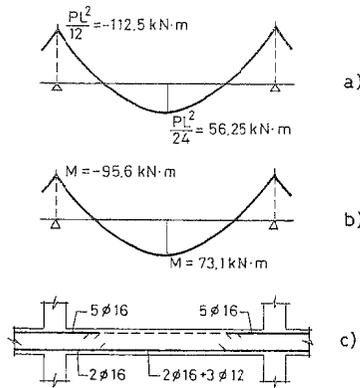


Figura 48-17

#### A) Cálculo de flechas según EHE

La tabla T-48.7 presenta los valores de  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , así como también la resistencia característica, el módulo de deformación y la inercia homogeneizada y fisurada de la sección en vano y en apoyos.

$E'_{ci}$  se calcula de acuerdo con [28.16] con  $s = 0,25$  dado el tipo de cemento.

TABLA T-48.7

$t$ (días)	$f_{ck}$ (MPa)	$E'_{ci}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$I_{h,vano}$ (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	$I_{h,apoyo}$ (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	$I_{f,vano}$ (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	$I_{f,apoyo}$ (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	$W_{th,vano}$ (mm <sup>3</sup> · 10 <sup>3</sup> )	$W_{2h,apoyo}$ (mm <sup>3</sup> · 10 <sup>3</sup> )
$t_1 = 28$	25,0	27.264	281.735	301.893	70.826	92.497	11.635	12.382
$t_2 = 60$	27,1	28.366	280.810	300.048	68.161	88.997	11.581	12.294
$t_3 = 120$	28,4	29.084	280.242	298.920	66.511	86.837	11.547	12.239
$t = \infty$	32,1	30.894	278.926	296.307	62.634	81.778	11.470	12.114

Además se tienen las siguientes cuantías geométricas ( $d = 467$  mm,  $d' = 33$  mm).

$\rho$  vano = 0,00635

$\rho$  apoyo = 0,00861

$\rho'$  apoyo = 0,00344

#### A-1 Procedimiento aplicando separadamente cada carga

##### A-1.1 Flecha instantánea debida al peso propio al descimbrar ( $t_1 = 28$ días)

$$f_{ct,flex} = 0,37 [25]^{2/3} = 3,16 \text{ MPa}$$

$$M_{f,vano} = 11.635 \cdot 10^3 \cdot 3,16 = 36,8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{f,apoyo} = 12.382 \cdot 10^3 \cdot 3,16 = 39,2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

En este momento solamente actúa el peso propio de la estructura. Por consiguiente la inercia efectiva será igual a la inercia homogeneizada en la sección de vano, según indica EHE.

$$M_a = 26,25 < 36,8 \text{ kN}\cdot\text{m. No hay fisuración.}$$

$$I_e = I_{e,vano} = I_h = 281.735 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{l,pp}^{28} = \frac{1}{384} \cdot \frac{17,5 \cdot 6^4}{27.264 \cdot 281.735} = 0,769 \text{ mm}$$

##### A-1.2 Flecha diferida debida al peso propio entre $t_1 = 28$ y $t_2 = 60$ días

$$\xi(28) = 0,66$$

$$\xi(60) = 0,88$$

$$\Delta \xi = 0,22$$

$$\rho'_m = 0\% \text{ (No hay armadura de compresión en centro de vano, salvo la armadura de montaje que se desprecia)}$$

$$\lambda = \frac{0,22}{1 + 50 \cdot 0,00} = 0,22$$

$$f_{d,pp}^{28,60} = 0,22 \cdot 0,769 = 0,169 \text{ mm}$$

La flecha total, inmediatamente antes de construir la tabiquería, es:

$$f_{i,pp}^{60} = 0,769 + 0,169 = 0,938 \text{ mm}$$

A-1.3 Flecha instantánea al construir la tabiquería a la edad  $t_2 = 60$  días

Se supone que actúa el peso propio más la tabiquería.

$$M_d = 33,75 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_t = 36,81 \text{ kN}\cdot\text{m}^1 \quad \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 > 1$$

$$I_{e,vano} = 280.810 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,pp+t}^{60} = \frac{1}{384} \cdot \frac{22,5 \cdot 6^4}{28.366 \cdot 280.810} = 0,953 \text{ mm}$$

El incremento de flecha al aplicar la tabiquería resulta por tanto:

$$f_{i,t}^{60} = f_{i,pp+t}^{60} - f_{i,pp}^{28} = 0,953 - 0,769 = 0,184 \text{ mm}$$

A-1.4 Flecha diferida debida a peso propio y tabiquería entre  $t_2 = 60$  días y  $t_3 = 120$  días

$$\xi(60) = 0,88$$

$$\xi(120) = 1,08$$

$$\Delta \xi = 0,20$$

$$f_{d,pp}^{28,60} = 0,20 \cdot 0,953 = 0,191 \text{ mm}$$

A-1.5 Flecha instantánea en  $t_3 = 120$  días debida a la ejecución del solado

Se supone que actúa, para efectos del cálculo de  $I_e$ , la carga total, es decir que se supone aplicada la sobrecarga de uso.

$$M_a = 56,25 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 = 0,280$$

$$I_e = I_{e,vano} = 280.242 \cdot 0,28 + 66511 (1 - 0,28) = 126.394 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

Retirada la sobrecarga, se tiene:

$$f_{i,pp+t+sol}^{120} = \frac{1}{384} \cdot \frac{27,5 \cdot 6^4}{29.084 \cdot 126.394} = 2,525 \text{ mm}$$

$$f_{i,sol}^{120} = f_{i,pp+t+sol}^{120} - f_{i,pp+t}^{60} = 2,525 - 0,953 = 1,571 \text{ mm}$$

1 Se ha supuesto el mismo momento de fisuración del comienzo del proceso de carga. El criterio adoptado consiste en tomar el momento de fisuración correspondiente a la edad de puesta en carga, salvo que ésta sea mayor que 28 días.

A-1.6 Flecha diferida debida al peso propio más tabiquería más solado desde 120 días a  $\infty$

$$\xi(120) = 1,08$$

$$\xi(\infty) = 2$$

$$\Delta \xi = 0,92$$

$$f_{d,pp+t+sol}^{120,\infty} = 0,92 \cdot 2,525 = 2,323 \text{ mm}$$

A-1.7 Flecha instantánea debida a sobrecarga en  $t = \infty$

$$\left( \frac{M_f}{M_a} \right)^3 = 0,280$$

$$I_e = I_{e,vano} = 278.926 \cdot 0,280 + 62.634 (1 - 0,28) = 123.235 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} = \frac{1}{384} \cdot \frac{37,5 \cdot 6^4}{30.894 \cdot 158.353} = 3,324 \text{ mm}$$

$$f_{i,sob}^{\infty} = f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} - f_{i,pp+t+sol}^{120} = 3,324 - 2,525 = 0,799 \text{ mm}$$

A-1.8 Flecha total en  $t = \infty$ , debida a todas las cargas

$$f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} = (0,769 + 0,184 + 1,571 + 0,799) + (0,169 + 0,191 + 2,323) = 3,324 + 2,683 = 6,007 \text{ mm}$$

donde el primer sumando es la componente de la flecha instantánea y el segundo la componente de la flecha diferida.

Como  $HR = 80 \%$ , en la tabla T-48.1 resulta  $k_H = 0,73$  y para  $\frac{2 A_c}{u} =$

$2 \cdot 250 \cdot 500 / 1500 = 167 \text{ mm}$ , de la tabla T-48.2 se obtiene  $k_f = 0,98$ , con lo cual la flecha total resulta:

$$f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} = 3,324 + 2,683 \cdot 0,73 \cdot 0,98 = 3,324 + 1,919 = 5,243 \text{ mm}$$

A-1.9 Flecha activa ( $f_A$ )

El valor de la flecha activa se obtiene restando a la flecha total la instantánea debida al peso propio al descimbrar y la diferida del peso propio entre 28 y 60 días.

$$f_A = 3,324 + 2,683 - 0,769 - 0,169 = 2,555 + 2,514 = 5,07 \text{ mm}$$

(De nuevo separamos la componente instantánea y la diferida)

Con  $k_H = 0,73$ ,  $k_f = 0,98$ , resulta

$$f_A = 2,555 + 0,73 \cdot 0,98 \cdot 2,514 = 4,35 \text{ mm}; \quad \frac{f}{L} = \frac{1}{1.378}$$

La flecha instantánea es  $1,919/(3,324 - 0,799) = 0,76$  veces la instantánea debida a carga permanente, y la flecha activa  $4,35/5,24 = 0,83$  veces la total. Obsérvese también que en estas condiciones de humedad, al aplicar las correcciones al método EHE ha supuesto reducir la flecha total de 6,01 mm a 5,24 mm (el 14%) y la activa de 5,07 a 4,35 mm (el 13%).

### A-2 Procedimiento simplificado

Calculando el valor de  $\xi_e$  se tiene:

Carga	Valor (kN/m <sup>2</sup> )	Edad de aplicación (días)	$\xi_i$
Peso propio	3,50	28	0,66
Tabiquería	1,00	60	0,88
Solado	1,00	120	1,08

$$\xi_e = \frac{3,5 \cdot 0,66 + 1,0 \cdot 0,88 + 1,0 \cdot 1,08}{3,5 + 1,0 + 1,0} = 0,78$$

En la curva de la figura 48.6 este valor corresponde a una edad equivalente igual a 40 días, luego el momento de inercia efectivo a utilizar se calcula con las propiedades geométricas a 40 días.

#### A-2.1 Cálculo de la flecha instantánea y la diferida producida por la carga permanente

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,28 \quad I_{e, vano} = 128.789 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$f_{i, pp+t+sol}^{60} = \frac{1}{384} \cdot 27,5 \cdot \frac{6^4}{27.826 \cdot 128.789} = 2,59 \text{ mm}$$

$$\Delta \xi = 2 - 0,8 = 1,2$$

$$f_{d, pp+t+sol}^{60} = 1,22 \cdot 2,59 = 3,17 \text{ mm}$$

La flecha instantánea de sobrecarga a tiempo infinito es, como en el caso anterior, 0,799 mm.

#### A-2.2 Flecha total

La flecha total será

$$f_{i, pp+t+sol+sob}^{\infty} = 2,59 + 3,17 + 0,799 = 6,558 \text{ mm}$$

Para  $k_H = 0,73$  y  $k_t = 0,98$ , se tiene

$$f_{i, pp+t+sol+sob}^{\infty} = 2,59 + 0,799 + 3,17 \cdot 0,73 \cdot 0,98 = 5,656 \text{ mm}$$

Como dijimos, este procedimiento simplificado no da lugar a descontar la flecha instantánea del peso propio al descimbrar, ni la diferida entre la edad de descimbrado y la construcción de la tabiquería, y, por lo tanto, no se puede calcular la flecha activa.

### B Cálculo de la flecha según el MODEL CODE 90

#### B-1 Flecha debida a peso propio más tabiquería más solado

Mediante el gráfico GT-3, se determina el punto de momento nulo, que está a 1,26 m del apoyo.

De acuerdo con [48.26]

$$\rho_m = \frac{0,0063 \cdot 3,48 + 0,00861 \cdot 2 \cdot 1,26}{6} = 0,0073$$

$$\rho_{cm} = \frac{0,0034 \cdot 1,26 \cdot 2}{6} = 0,0014$$

$$\eta = 3,08$$

$$E_c = 2,15 \cdot 10^4 \text{ MPa} \left[ \frac{25 + 8}{10} \right]^{1/3} = 32.009 \text{ MPa}$$

$$a_c = \frac{1}{384} \cdot \frac{27,5 \cdot 6^4}{32.009 \cdot 260.417} = 1,113 \text{ mm}$$

$$f_{i, pp+t+sol}^{\infty} = \left( \frac{500}{467} \right)^3 \cdot 3,08 \cdot (1 - 20 \cdot 0,0014) \cdot 1,113 = 4,087 \text{ mm}$$

#### B-2 Flecha debida a la sobrecarga

Se evalúa como en el caso A-1 y es, por tanto, 0,799 mm<sup>1</sup>

#### B-3 Flecha total (Sin incluir la flecha debida a retracción)

$$f_{i, pp+t+sol+sob}^{\infty} = 4,087 + 0,799 = 4,89 \text{ mm}$$

Como dijimos, el método no permite calcular flechas más que a tiempo infinito. En particular no permite calcular la flecha activa. Para estimar la flecha total falta la de retracción. (Véase el método siguiente, del EUROCÓDIGO). La flecha total más la retracción calculada por el EC-2 es igual:

$$f_{i, pp+t+sol+sob}^{\infty} = 4,89 + 1,26 = 6,15 \text{ mm}$$

2 El MC-90 no tiene un procedimiento explícito para el cálculo de la flecha instantánea.

C Cálculo de flechas según el EUROCÓDIGO EC-2

C-1 Flecha total debida a carga permanente (pp + t + soi)

Adoptamos un tiempo equivalente de aplicación de las cargas de

$$t_e = \frac{3,5 \cdot 28 + 1,0 \cdot 60 + 1,0 \cdot 120}{5,5} = 50,5 \text{ días}$$

Con un espesor medio de 167 mm, según 28.4.1 se tiene  $\phi = 1,71$ .

$$E_{c,eff} = 31.460 / (1 + 1,71) = 11.595 \text{ MPa}; \quad m = 2 \cdot 10^5 / 11.595 = 17,2$$

Las propiedades geométricas de la sección se indican en la tabla T-48-8.

**TABLA T-48.8**

$E_c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$I_{h,vano}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )	$I_{h,apoyo}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )	$I_{f,vano}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )	$I_{f,apoyo}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )
11.595	312.160	365.048	142.043	189.400
34.529 (*)	276.685	291.879	56.108	73.326

(\*) Módulo de deformación a  $t = \infty$

Estado I. (No fisurado)

$$I_h = 312.160 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{t,pp+t+soi}^{\infty} = \frac{1}{384} \cdot \frac{27,5 \cdot 6^4}{312.160 \cdot 11.595} = 2,564 \text{ mm}$$

Estado II (Fisurado)

$$I_f = 142.043 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{t,pp+t+soi,II}^{\infty} = \frac{1}{384} \cdot \frac{27,5 \cdot 6^4}{135.617 \cdot 12.386} = 5,635 \text{ mm}$$

Estado de fisuración. (Cálculo de  $\zeta$ )

$$f_{cr,flex} = 3,3 \text{ MPa} \quad M_f = 44,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\frac{M_f}{M_a} = \frac{44,6}{56,25} = 0,793; \quad \zeta_{vicio} = 1 - 0,5 (0,793)^2 = 0,685$$

$$\zeta = \zeta_{vicio} = 0,685$$

$$f_{t,pp+t+soi}^{\infty} = 0,685 \cdot 5,635 + (1 - 0,685) \cdot 2,564 = 4,669 \text{ mm}$$

C-2 Flecha debida a la retracción

La flecha debida a la retracción se calculará utilizando la fórmula [48.23]

$$f_r = \frac{1}{15} \cdot \frac{S_s \cdot \epsilon_r \cdot m}{I_e} \cdot L^2$$

Con las condiciones definidas anteriormente, obtenemos, para  $HR = 80\%$  y  $h = 167 \text{ mm}$ , según 28.4.2, el valor de  $\epsilon_r = 33,7 \cdot 10^{-5}$ .

La Tabla T-48.9 muestra los valores de los momentos estáticos de la armadura ( $S_s$ ) para la sección de vano, en la condición fisurada y sin fisurar<sup>1</sup>. Recuérdese que el momento estático aportado por la armadura en compresión es negativo, además de utilizar  $m = 17,2$  para homogeneizar la armadura y calcular el centro de gravedad de la sección. Los valores de  $S_s$ , sin embargo, son calculados con el área real, no homogeneizada, de las armaduras.

**TABLA T-48.9**

Sección	$S_{s,I}$ mm <sup>3</sup> 10 <sup>3</sup>	$S_{s,II}$ mm <sup>3</sup> 10 <sup>3</sup>
Vano	147	156

Estado I. (No fisurado)

$$S_{s,I} = 147 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_h = 312.160 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{r,I} = \frac{1}{15} \cdot \frac{147 \cdot 33,7 \cdot 10^{-5} \cdot 17,2 \cdot 6^2}{312.160} = 0,655 \text{ mm}$$

Estado II. (Fisurado)

$$S_{s,II} = 156 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_f = 142.043 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{r,II} = \frac{1}{15} \cdot \frac{156 \cdot 33,7 \cdot 10^{-5} \cdot 17,2 \cdot 6^2}{142.043} = 1,535 \text{ mm}$$

$$f_r = 0,685 \cdot 1,535 + (1 - 0,685) \cdot 0,655 = 1,258 \text{ mm}$$

<sup>1</sup> Se utilizan las propiedades geométricas de la sección de vano para el cálculo de la flecha de retracción.

C-3 Flecha debida a sobrecarga en  $t = \infty$

Los momentos de inercia aparecen en la Tabla T-48.8.

Estado I. (No fisurado)

$$I_h = 276.685 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,sob,I} = \frac{1}{384} \cdot \frac{1,0 \cdot 6^4}{276.685 \cdot 34.529} = 0,353 \text{ mm}$$

Estado II. (Fisurado)

$$I_f = 56.108 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,sob,II} = \frac{1}{384} \cdot \frac{1,0 \cdot 6^4}{56.108 \cdot 34.529} = 1,742 \text{ mm}$$

$$f_{i,sob}^{\infty} = 0,685 \cdot 1,742 + 0,353 (1 - 0,685) = 1,305 \text{ mm}$$

C-4 Flecha total

Es la suma de la flecha debida a la carga permanente más la debida a la retracción más la debida a la sobrecarga.

$$f_t = f_r + f_{t,pp+t+s} + f_{i,sob}^{\infty} = 4,669 + 1,305 + 1,258 = 7,232 \text{ mm}$$

Como comparación calcularemos la flecha de retracción con el método de BRANSON.

$$f_r = \frac{1}{15} \cdot \frac{S_s \cdot m \cdot L^2 \cdot \epsilon_c}{I_g} = \frac{S_s \cdot E_s \cdot L^2 \cdot \epsilon_r}{1/2 I_b E_c}$$

donde las propiedades geométricas se refieren al centro del vano.

Sección de vano:

$$S_{s,vano} = 7,41 \cdot (25 - 3,3) = 160,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_s = 160,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$f_r = \frac{1}{15} \cdot \frac{160,8 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 6^2 \cdot 33,7 \cdot 10^{-5}}{0,5 \cdot 30.472 \cdot 260.417} = 0,655 \text{ mm}$$

(Del orden del 52% de la del EUROCÓDIGO EC.2).

### EJEMPLO 48.2

Sea un vano extremo de un forjado de luces iguales a 5,20 m con la sección indicada en la figura 48-18a) y sometido a las acciones siguientes:

$$\text{Peso propio} = 2,5 \text{ kN/m}^2 \text{ (Descimbrado a 7 días)}$$

$$\text{Tabiquería} = 1,0 \text{ kN/m}^2 \text{ (Construida a 60 días)}$$

$$\text{Solado} = 1,0 \text{ kN/m}^2 \text{ (Ejecutado a 120 días)}$$

$$\text{Sobrecarga} = 2,0 \text{ kN/m}^2$$

Se adopta  $\gamma_{fg} = 1,35$ ;  $\gamma_{fj} = 1,5$ ;  $\gamma_c = 1,50$ ;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$  y acero B 400. Además se supone un curado a  $20^\circ \text{ C}$  con una humedad relativa del 50%. El espesor ficticio de la pieza se ha estimado en 93 mm. El recubrimiento medido a centro de barra es 25 mm.

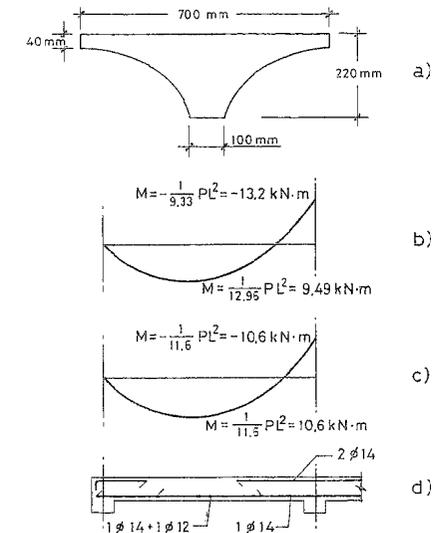


Figura 48-18

Para dimensionar la pieza se adopta el diagrama de momentos de la figura 48-18c), obtenido al igualar los momentos en vano y apoyo. Las armaduras se muestran en la figura 48-18d). Para calcular las flechas se adopta el diagrama de momentos de cálculo lineal de la figura 48-18b). Utilizando la fórmula [48.30] con  $M_f = 0$  y

$M_d = \frac{1}{9,33} p L^2$ , se obtiene la siguiente expresión para la flecha máxima:

$$f = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{p L^2}{EI}$$

Llamando  $t_1$  a la edad de descimbrado,  $t_2$  a la de construcción de la tabiquería y  $t_3$  a la de ejecución del solado, se calcula la Tabla T-48.10 con las propiedades de la sección.

TABLA T-48.10

t (días)	f <sub>ck</sub> (MPa)	E <sub>c</sub> (MPa)	I <sub>h,vano</sub> (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	I <sub>h,apoyo</sub> (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	I <sub>f,vano</sub> (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	I <sub>f,apoyo</sub> (mm <sup>4</sup> · 10 <sup>4</sup> )	W <sub>1h,vano</sub> (mm <sup>3</sup> · 10 <sup>3</sup> )	W <sub>2h,apoyo</sub> (mm <sup>3</sup> · 10 <sup>3</sup> )
t <sub>1</sub> = 7	19,5	24.060	27.168	26.572	5.935	4.885	1.902	3.574
t <sub>2</sub> = 60	27,1	28.366	26.698	26.194	5.000	4.196	1.862	3.526
t <sub>3</sub> = 120	28,4	29.084	26.633	26.142	4.868	4.099	1.857	3.520
t = ∞	32,1	30.894	26.482	26.022	4.562	3.873	1.844	3.504

Además se tienen las siguientes cuantías geométricas (d = 195 mm, d' = 25 mm).

$$\rho_{\text{vano}} = 0,00302$$

$$\rho_{\text{apoyo}} = 0,01579$$

$$\rho'_{\text{apoyo}} = 0,00789$$

A Cálculo de flechas según EHE

A-1 Procedimiento aplicando separadamente cada carga

A-1.1 Flecha instantánea debida al peso propio al descimbrar (t<sub>1</sub> = 7 días)

$$f_{ck}(7) = 19,5 \text{ MPa}; f_{ck,flex} = 0,37 (19,5)^{2/3} = 2,68 \text{ MPa}$$

Sólo actúa el peso propio.

Sección de vano:

$$M_a = \frac{1}{12,96} \cdot 1,75 \cdot 5,20^2 = 3,65 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_f = 1,902 \cdot 2,68 = 5,09 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 > 1 \text{ No se produce fisuración}$$

$$I_{c,vano} = I_{h,vano} = 27.168 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

Sección de apoyo:

$$M_a = \frac{1}{9,33} \cdot 1,75 \cdot 5,20^2 = 5,07 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_f = 3,574 \cdot 2,68 = 9,57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 > 1; I_{c,apoyo} = I_h = 26.572 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 27.168 \cdot 0,50 + 26.572 \cdot 0,50 = 26.870 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,pp}^7 = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{1,75 \cdot (5,20)^4}{26870 \cdot 24.060} = 1,25 \text{ mm}$$

A-1.2 Flecha diferida debida al peso propio entre t<sub>1</sub> = 7 y t<sub>2</sub> = 60 días

$$\xi(7) = 0,36$$

$$\xi(60) = 0,88$$

$$\Delta \xi = 0,52$$

ρ'<sub>m</sub> = 0 (No hay armadura de compresión en el vano)

$$\frac{1}{1 + 50 \rho'_m} = 1,00$$

$$f_{d,pp}^{7,60} = 1,00 \cdot 0,52 \cdot 1,25 = 0,65 \text{ mm}$$

$$f_{t,pp}^{60} = 0,65 + 1,25 = 1,90 \text{ mm}$$

A-1.3 Flecha instantánea al construir la tabiquería a la edad t<sub>2</sub> = 60 días

Actúan solamente las cargas de pp + t.

Sección de vano:

$$M_a = 5,11 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_f^1 = 5,09 \text{ kN} \cdot \text{m}; \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,989$$

$$I_{e,vano} = (1 - 0,989) 5.000 + 0,989 \cdot 26.698 = 26.460 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Sección de apoyo:

$$M_f = 9,57 \text{ kN} \cdot \text{m}; M_a = 7,10 \text{ kN} \cdot \text{m}; \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 > 1 \text{ No hay fisuración}$$

$$I_{e,apoyo} = I_{h,apoyo} = 26.194 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 0,50 \cdot 26.460 + 0,50 \cdot 26.194 = 26.327 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,pp+t}^{60} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{2,45 \cdot (5,20)^4}{26.366 \cdot 26.327} = 1,52 \text{ mm}$$

$$f_{i,t}^{60} = f_{i,pp+t}^{60} - f_{i,pp}^7 = 1,52 - 1,25 = 0,27 \text{ mm}$$

1 Se utiliza el mismo momento de fisuración que en la edad de puesta en carga. El criterio adoptado consiste en tomar el momento de fisuración correspondiente a la edad de puesta en carga, siempre que ésta no sea superior a 28 días.

A-1.4 Flecha diferida debida a peso propio y tabiquería entre  $t_2 = 60$  días y  $t_3 = 120$  días

$$\xi(60) = 0,88$$

$$\xi(120) = 1,08$$

$$\Delta \xi = 0,20$$

$$f_{d,pp+t}^{60,120} = 0,20 \cdot 1,00 \cdot 1,52 = 0,30 \text{ mm}$$

$$f_{t,pp+t}^{120} = 1,25 + 0,27 + 0,65 + 0,30 = 2,47 \text{ mm}$$

A-1.5 Flecha instantánea en  $t_3 = 120$  días debida a la ejecución del solado

Se supone que actúa la sobrecarga a efectos del cálculo del momento de inercia efectivo, es decir que se supone aplicada la sobrecarga de uso.

Sección de vano:

$$M_a = 9,49 \text{ kN}\cdot\text{m}; \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,154; I_{e,vano} = 8.229 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

Sección de apoyo:

$$M_a = 13,18 \text{ kN}\cdot\text{m}; \left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,382; I_{e,apoyo} = 12.529 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$I_e = 0,50 \cdot 8.229 + 0,50 \cdot 12.529 = 10.379 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Retirada la sobrecarga se tiene:

$$f_{i,pp+t+sol}^{120} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{3,15 \cdot (5,20)^4}{29.084 \cdot 10.379} = 4,83 \text{ mm}$$

$$f_{i,sol}^{120} = f_{i,pp+t+sol}^{120} - f_{i,pp+t}^{60} = 4,83 - 1,52 = 3,31 \text{ mm}$$

A-1.6 Flecha diferida debida al peso propio más tabiquería más solado desde 120 días a  $\infty$

$$\xi(120) = 1,08$$

$$\xi(\infty) = 2$$

$$\Delta \xi = 0,92$$

$$f_{d,pp+t+sol}^{120,\infty} = 0,92 \cdot 1,00 \cdot 4,83 = 4,44 \text{ mm}$$

$$f_{t,pp+t+sol}^{\infty} = 3,31 + 0,27 + 1,25 + 4,44 + 0,30 + 0,65 = 10,22 \text{ mm}$$

A-1.7 Flecha instantánea debida a sobrecarga en  $t = \infty$

Sección de vano:

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,154; I_{e,vano} = 7.946 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

Sección de apoyo:

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,382; I_{e,apoyo} = 12.343 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$I_e = 0,50 \cdot 7.946 + 0,50 \cdot 12.343 = 10.145 \cdot 10^4 \cdot \text{mm}^4$$

$$f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{4,55 \cdot 5,20^4}{10.145 \cdot 30.894} = 6,72 \text{ mm}$$

$$f_{i,sob}^{\infty} = f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} - f_{i,pp+t+sol}^{120} = 6,72 - 4,83 = 1,89 \text{ mm}$$

A-1.8 Flecha total en  $t = \infty$ , debida a todas las cargas

$$f_{d,pp+t+sol}^{\infty} = 4,44 + 0,30 + 0,65 = 5,40 \text{ mm} \quad (\text{No corregida})$$

$$f_{t,pp+t+sol+sob}^{\infty} = 6,72 + 5,40 = 12,11 \text{ mm}$$

Correcciones por humedad y espesor ficticio.

Con  $HR = 50\%$  se obtiene de la tabla T-48.1  $k_H = 0,94$ , y con  $h = 93$  mm se obtiene de la tabla T-48.2  $k_f = 1,13$ .

Utilizando las correcciones debidas a  $HR$  y al espesor ficticio.

$$f_{t,pp+t+sol+sob}^{\infty} = 6,72 + 5,40 \cdot 1,13 \cdot 0,94 = 12,45 \text{ mm}$$

A-1.9 Flecha activa ( $f_A$ )

Como se indicó en el Ejemplo 48.1, la flecha activa será:

$$f_A = f_{t,pp+t+sol+sob}^{\infty} - f_{t,pp}^{60} = 12,11 - 1,90 = 10,21 \text{ mm} \quad (\text{Sin corregir})$$

o

$$f_A = 12,45 - 1,25 - 0,65 \cdot 1,13 \cdot 0,94 = 10,51 \text{ mm} \quad (\text{Corregida})$$

La flecha activa cumple con 48.12.3, puesto que la máxima flecha activa admisible es

$$\frac{520}{800} + 6 = 12,5 \text{ mm}$$

TABLA T-48.11

Carga	Valor (kN/m <sup>2</sup> )	Edad de aplicación (días)	$\xi_i$
Peso propio	2,50	7	0,36
Tabiquería	1,00	60	0,88
Solado	1,00	120	1,08

$$\xi_e = \frac{2,5 \cdot 0,36 + 1,0 \cdot 0,88 + 1,0 \cdot 1,08}{4,5} = 0,636$$

En la curva de la figura 48.5 este valor corresponde a una edad equivalente igual a 25 días, luego por lo tanto las propiedades geométricas se deben calcular a la edad de 25 días.

Con un valor de  $\xi_e = 0,636$ ;  $\Delta \xi_e = 2 - 0,636 = 1,364$

$$f_{ck}(25) = 24,6 \text{ MPa}$$

$$E_c = 27.066 \text{ MPa}$$

Con este valor de  $E_c$  se calculan los momentos de inercia homogeneizados y fisurados, los cuales son  $I_{h,vano} = 26.825 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $I_{h,apoyo} = 26.296 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $I_{f,vano} = 5.254 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ ;  $I_{f,apoyo} = 4.381 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ .

A-2.1 Cálculo de la flecha instantánea y la diferida producida por la carga permanente

Sección de vano:

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,154$$

$$I_{e,vano} = 8.584 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Sección de apoyo:

$$\left(\frac{M_f}{M_a}\right)^3 = 0,382$$

$$I_{e,apoyo} = 12.761 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_e = 8.584 \cdot 0,50 + 12.761 \cdot 0,50 = 10.673 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,pp+t+sol}^{25} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{3,15 \cdot 5,20^4}{27.066 \cdot 10.673} = 5,05 \text{ mm}$$

$$f_{i,pp+t+sol}^{25,\infty} = 5,05 \cdot 1,364 \cdot 1,00 = 6,88 \text{ mm}$$

Correcciones por humedad y temperatura.

La flecha diferida corregida será:  $6,88 \cdot 1,13 \cdot 0,94 = 7,31 \text{ mm}$

A-2.2 Flecha total

La flecha instantánea a  $t = \infty$  debida a sobrecarga es, como en el caso anterior, 1,89 mm, luego la flecha total es:

$$f_{i,pp+sol+tab+sob}^{\infty} = 5,05 + 1,89 + 7,31 = 14,25 \text{ mm} \quad (\text{Corregida})$$

$$f_{i,pp+sol+tab+sob} = 5,05 + 1,89 + 6,88 = 13,82 \text{ mm} \quad (\text{Sin corregir})$$

B Cálculo de la flecha según el MODEL CODE 90

B-1 Flecha debida a peso propio más tabiquería más solado

Cuantías en vano:  $\rho = 0,00196$ ;  $\rho' = 0$

Cuantías en apoyo:  $\rho = 0,01579$ ;  $\rho' = 0,00789$

El punto de inflexión está localizado aproximadamente a 0,2 L del apoyo (ver GT-3), luego:

$$\rho_m = 0,00196 \cdot 0,8 + 0,01579 \cdot 0,2 = 0,0047$$

$$\rho_{cm} = 0,2 \cdot 0,00789 + 0,0 \cdot 0,8 = 0,0016$$

$$\eta = 4,33$$

$$E_c = 2,15 \cdot \left[\frac{25 + 8}{10}\right]^{1,3} = 32.009 \text{ MPa}$$

$$a_c = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{3,15 \cdot 5,20^4}{32.009 \cdot 24.384} = 1,87 \text{ mm}$$

$$f_{i,pp+t+sol}^{\infty} = \left(\frac{220}{195}\right)^3 \cdot 4,33 \cdot (1 - 20 \cdot 0,0016) \cdot 1,87 = 11,24 \text{ mm}$$

B-2 Flecha debida a la sobrecarga

Se utilizará la calculada en A-1.7, tal como se dijo.

$$f_{i,sob}^{\infty} = 1,89 \text{ mm}$$

B-3 Flecha total (Sin incluir la de retracción)

$$f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} = 1,89 + 11,24 = 13,13 \text{ mm} \quad (\text{Sin retracción})$$

Sumando la flecha de retracción obtenida en el método del EUROCÓDIGO EC-2, que sigue, resulta:

$$f_{i,pp+t+sol+sob}^{\infty} = 13,13 + 4,75 = 17,88 \text{ mm}$$

### C Cálculo de flechas según el EUROCÓDIGO EC-2

#### C-1 Flecha total debida a carga permanente (pp + t + sol)

$$t_e = \frac{2,5 \cdot 7 + 1,0 \cdot 60 + 1,0 \cdot 120}{4,5} = 44 \text{ días}$$

Para un tiempo equivalente de aplicación de la carga de 44 días, una humedad relativa de 50% y un espesor de 93 mm, según 28.4.1 se obtiene  $\phi = 2,77$ .

$$E_{c,eff} = \frac{30,472}{(1 + 2,77)} = 8,282 \text{ MPa} \quad m = 24,1$$

TABLA T-48.12

$E_c$ (MPa)	$I_{h,vano}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )	$I_{h,apoyo}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )	$I_{f,vano}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )	$I_{f,apoyo}$ (mm <sup>4</sup> ·10 <sup>4</sup> )
8.282	32.727	31.304	14.593	18.112
34.529 <sup>1</sup>	26.225	25.818	4.051	4.736

Estado I. (No fisurado)

$$I_h = 0,50 \cdot 32,727 + 0,50 \cdot 31,304 = 32,016 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,pp+t+sol,i}^{\infty} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{3,15 \cdot 5,20^4}{32,016 \cdot 8,282} = 5,50 \text{ mm}$$

Estado II (Fisurado)

$$I_f = 0,50 \cdot 14,593 + 0,50 \cdot 18,112 = 16,352 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,pp+t+sol,ii}^{\infty} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{3,15 \cdot 5,20^4}{16,352 \cdot 8,282} = 10,76 \text{ mm}$$

Estado de fisuración. (Cálculo de  $\zeta$ )

$$\zeta(\text{vano}) = 1 - 0,50 \left( \frac{7,84}{9,49} \right)^2 = 0,659$$

<sup>1</sup> Módulo de deformación a  $t = \infty$ .

La sección en apoyo no se fisura y se toma  $\zeta(\text{apoyo}) = 0$ .

$$\zeta = 0,50 \cdot 0,659 + 0,50 \cdot 0,00 = 0,329$$

$$f_{i,pp+t+sol}^{\infty} = 0,329 \cdot 10,76 + 5,50 (1 - 0,329) = 7,23 \text{ mm}$$

#### C-2 Flecha debida a la retracción

La flecha debida a la retracción se calculará de acuerdo con la expresión [48.22]

$$f_r = \frac{1}{11} \cdot \frac{S_s \cdot m \cdot \epsilon_r}{I_e} \cdot L^2$$

Los valores de  $S_s$  para el vano, en estado I y II, respectivamente, se muestran en la Tabla T-48.13.

TABLA T-48.13

Sección	$S_{s,I}$ (mm <sup>3</sup> ·10 <sup>3</sup> )	$S_{s,II}$ (mm <sup>3</sup> ·10 <sup>3</sup> )
Vano	29,79	31,75

Además con el valor de  $HR = 50\%$  y  $h = 93 \text{ mm}$ , según 28.4.2, se obtiene que  $\epsilon_r = 60 \cdot 10^{-5}$ .

Estado I. (No fisurado)

$$S_{s,I} = 29,79 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_h = 32,727 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{r,I} = \frac{1}{11} \cdot \frac{29,79 \cdot 24,1 \cdot 60 \cdot 10^{-5} \cdot 5,20^2}{32,727} = 3,26 \text{ mm}$$

Estado II. (Fisurado)

$$S_{s,II} = 31,75 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$I_f = 14,593 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{r,II} = \frac{1}{11} \cdot \frac{31,75 \cdot 60 \cdot 10^{-5} \cdot 5,20^2}{14,593} \cdot 24,1 = 7,80 \text{ mm}$$

$$f_r = 7,80 \cdot 0,329 + (1 - 0,329) \cdot 3,26 = 4,75 \text{ mm}$$

<sup>1</sup> Se utiliza la sección de vano para calcular las características geométricas en el cálculo de la flecha debida a la retracción.

C-3 Flecha debida a sobrecarga en  $t = \infty$

Estado I. (No fisurado)

$$I_h = 0,50 \cdot 26.225 + 0,50 \cdot 25.818 = 26.022 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,sob,I}^{\infty} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{1,4 \cdot 5,20^4}{34.529 \cdot 26.022} = 0,72 \text{ mm}$$

Estado II. (Fisurado)

$$I_f = 0,50 \cdot 4.051 + 0,50 \cdot 4.736 = 4.394 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_{i,sob,II}^{\infty} = \frac{2,43}{384} \cdot \frac{1,4 \cdot 5,20^4}{34.529 \cdot 4.394} = 4,27 \text{ mm}$$

$$f_{i,sob}^{\infty} = 4,27 \cdot 0,329 + (1 - 0,329) \cdot 0,72 = 1,89 \text{ mm}$$

C-4 Flecha total

De acuerdo con lo dicho en el Ejemplo anterior, ésta será:

$$f_i = 7,23 + 1,89 + 4,75 = 13,88 \text{ mm}$$

Como comparación se calculará la flecha de retracción de acuerdo con el método de BRANSON.

$$f_r = \frac{1}{11} \cdot \frac{S_s \cdot m \cdot L^2}{I_b} \cdot \varepsilon_r = \frac{1}{11} \cdot \frac{S_s \cdot E_s \cdot L^2 \cdot \varepsilon_r}{I_b \cdot E_c}$$

$S_s$  de acuerdo con BRANSON es el momento estático de las armaduras con respecto al eje neutro de la sección bruta de hormigón. La posición de la fibra neutra con respecto al borde inferior de la sección es  $Y_g = 151 \text{ mm}$ .

$$S_s = 2,67 \cdot 10^3 (151 - 25) = 32.311 \text{ mm}^3$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 30.472 = 15.326 \text{ MPa}$$

$$I_g = 24.384 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$f_r = \frac{32,3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5,20^2 \cdot 60 \cdot 10^{-5}}{15.326 \cdot 24.384} = 2,58 \text{ mm}$$

Resultando la flecha de retracción calculada por medio del procedimiento adoptado en el EC-2  $4,75/2,58 = 1,84$  veces la calculada con el método de BRANSON.

48.15 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS EXPUESTOS

Los ejemplos 48.1 y 48.2, que corresponden a situaciones frecuentes en la práctica, conducen a resultados cuya comparación se incluye en la Tabla T-48.14.

TABLA T-48.14  
RESUMEN COMPARATIVO DE LOS EJEMPLOS

EJEMPLO	PIEZA	AMBIENTE	FLECHAS (mm)				
			TOTALES				ACTIVA
			EHE.NC <sup>1</sup>	EHE.C <sup>1</sup>	EC-2	M.CODE 90	EHE.C <sup>1</sup>
48.1	Viga Vano interior	HR = 80% (Intemperie)	6,01	5,24	7,23	6,15	4,35
48.2	Forjado Vano exterior	HR = 50% (Interior con calefacción)	12,11	12,45	13,88	17,88	10,51

- En cuanto a flechas totales, en ambos casos el método de EHE (y de ACI 318) ha conducido a flechas similares a la del EC-2 y del orden de un 20/30% inferiores al método del MODEL CODE 90 en el caso del forjado. Debe tenerse en cuenta que el método del MC-90, válido para "estructuras de edificación", es poco apropiado para piezas de sección muy alejada de la rectangular, como es el caso de los forjados de vigueta y bovedilla.
- En cuanto a la flecha activa, no es posible hacer ninguna comparación, pues sólo es posible su cálculo con el método de EHE.
- La flecha activa, para los casos usuales de edificación de viviendas y oficinas, es del orden del 80/85% de la total.

BIBLIOGRAFÍA

- (48.1) CALAVERA, J. "Compatibility of structures with the other parts of buildings". IX Congress C.I.B. Stockholm. Agosto 1983.
- (48.2) GONZÁLEZ VALLE, E. "La flexibilidad de los forjados de hormigón armado en edificación. Evaluación de la situación actual". Informes de la Construcción n° 343. Septiembre 1982.

<sup>1</sup> NC: No corregida por humedad y espesor medio.  
C: Corregida por humedad y espesor medio.

- (48.3) CALAVERA, J., GARCÍA DUTARI, L. "Cálculo de flechas en estructuras de hormigón armado". INTEMAC. Madrid, 1992.
- (48.4) Manual C.E.B. "Fissuration et Deformations". Bulletin d'information n° 158. Octubre 1983.
- (48.5) FAVRE, R.; KOPRNA, M.; RADOJICIC, A. "Effects différents, fissuration et deformations des structures en béton". Georgi. Saint Saphorin, 1980.
- (48.6) GONZÁLEZ VALLE, E.; CALAVERA, J.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J. "Aspectos prácticos de la comprobación de flechas en forjados de edificación". Hormigón y Acero n° 167, 2° trimestre 1988.
- (48.7) MODEL CODE CEB-FIP 1990.
- (48.8) EUROCODE N° 2. "Design of concrete structures. Part 1. General rules and rules for buildings". Commission of the European Communities. 1989.
- (48.9) BERGSTROM, S.G. Betong. Tomo 38. 1953.
- (48.10) SAUL, A.G. Magazine of Concrete Research. Marzo 1951.
- (48.11) FERNÁNDEZ GÓMEZ, J. "Estudio experimental de la evolución de las características mecánicas del hormigón curado en diversas condiciones y su aplicación al cálculo de los procesos de descimbrado". Tesis doctoral bajo la dirección de J. CALAVERA. Escuela de Ingenieros de Caminos. Madrid. Marzo 1986.
- (48.12) CEB-FIP MODEL CODE FOR CONCRETE STRUCTURES. (1978).
- (48.13) RUSCH, H. "Hormigón armado y hormigón pretensado". C.E.C.S.A. 1975.
- (48.14) FAVRE, R.; KOPRNA, M.; RADOJICIC, A. "Effects différents, fissuration et deformation des structures en béton". École Polytechnique Fédérale de Lausanne. 1980.
- (48.15) ILLSTON, J.M. "The components of strain in concrete under sustained compressive stress". Magazine of Concrete Research. Marzo 1965.
- (48.16) ILLSTON, J.M. "The delayed elastic deformation of concrete as a composite material". The Structure of Concrete, Proceedings of an International Conference. London. September 1965.
- (48.17) BRANSON, D.E. "Deformation of concrete structures". Mc Graw Hill. New York, 1977.
- (48.18) ACI 318-95 "Building Code Requirements for structural concrete". Detroit, 1995.
- (48.19) ACI Committee 435 "Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members". Journal ACI. Junio 1966.
- (48.20) CALAVERA, J.; CORRES, H.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; LEÓN, J. "Estudio experimental sobre el comportamiento en servicio y agotamiento por flexión de forjados unidireccionales de hormigón armado". Trabajo presentado en COLLOQUIA 88. Madrid. Mayo 1988.
- (48.21) CALAVERA, J. "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". 4ª edición. INTEMAC. Madrid, 1988.
- (48.22) CALAVERA, J. "Fisuración de tabiquerías y cerramientos: Algunos aspectos de patología de proyecto en el cálculo de flechas de las losas". II Congreso

Iberoamericano de Patología de la Construcción CON.PAT 93. Volumen I. Barquisimeto (Venezuela).

- (48.23) GARDNER, N.J.; FU, H.C. "Effects of high construction loads on the long-term deflections of flat slabs". ACI Structural Journal. July-August 1987.
- (48.24) GARDNER, N.J.; SCANLON, A. "Long term deflections of two-way slabs". Concrete International. January 1990.
- (48.25) Règles Techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites". (BAEL-83). Eyrolles. Paris, 1984.
- (48.26) BRANSON, D.E.; TROST, H. "Unified Procedures for Predictions the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Non Prestressed and Prestressed Concrete Members". ACI Journal. March-April 1982.

## CAPÍTULO 49

### PIEZAS COMPUESTAS

#### 49.1 INTRODUCCIÓN

Se entiende por pieza compuesta aquella en cuya sección transversal existen los hormigones, en general de diferente edad y resistencia<sup>1</sup>.

La aplicación más frecuente es la de las piezas prefabricadas asociadas a hormigón "in situ".

#### 49.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO

##### 49.2.1 FLEXIÓN SIMPLE

Conviene distinguir los dos casos siguientes:

##### 49.2.1.1 Cálculo a flexión. Momentos positivos

Consideremos la sección compuesta indicada en la figura 49-1.

El cálculo se simplifica considerablemente en este tipo de tensiones empleando el diagrama rectangular de acuerdo con lo expuesto en 36.1.2.

<sup>1</sup> En español la terminología no ofrece dudas, pues a las piezas formadas por hormigón y perfiles metálicos se las designa como "piezas mixtas". En inglés la terminología no es a veces tan clara pues el término "composite sections" se aplica a veces a las piezas mixtas.

El equilibrio se establece, en el caso de secciones simples, entre un bloque comprimido, que eventualmente puede contener armaduras pasivas y/o activas y una armadura de tracción que puede estar compuesta, a su vez, por armaduras pasivas y/o activas (Fig. 49-1a)). Dentro de ello, pueden presentarse dos situaciones:

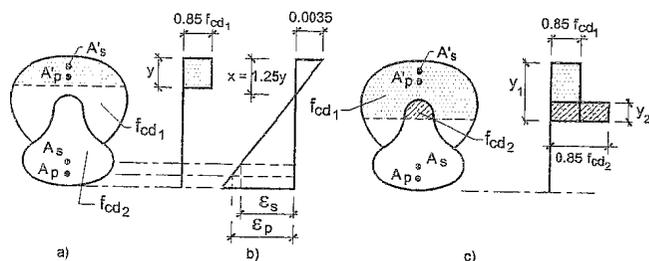


Figura 49-1

- Una (Fig. 49-1a)) es que el bloque comprimido ocupe una zona de la sección transversal correspondiente a un solo hormigón, de resistencia característica  $f_{ck1}$  y de cálculo  $f_{cd1}$ .
- La otra es que el bloque comprimido ocupe zonas de la sección transversal correspondientes a los dos hormigones, el segundo de resistencia característica  $f_{ck2}$  y de cálculo  $f_{cd2}$  (Fig. 49-1c)). En este caso, la única diferencia es que el bloque comprimido de hormigón esté formado por dos sumandos, uno resultante de extender la resistencia  $f_{cd1}$  a área de hormigón comprimido de resistencia  $f_{ck1}$ , y el otro de extender la resistencia  $f_{cd2}$  al área de hormigón de resistencia  $f_{ck2}$ .

Como antes se dijo, frecuentemente el hormigón de resistencia  $f_{ck1}$  corresponde a hormigón "in situ" y el de resistencia  $f_{ck2}$  a una pieza prefabricada.

El método general más útil, dado que estas secciones presentan frecuentemente formas de sección transversal que difiere mucho de la rectangular y frecuentemente están armadas con armaduras activas y pasivas, es el expuesto en 36.2.1.

#### 49.2.1.2 Cálculo a flexión. Momentos negativos

El caso es análogo, pudiendo presentarse también dos situaciones:

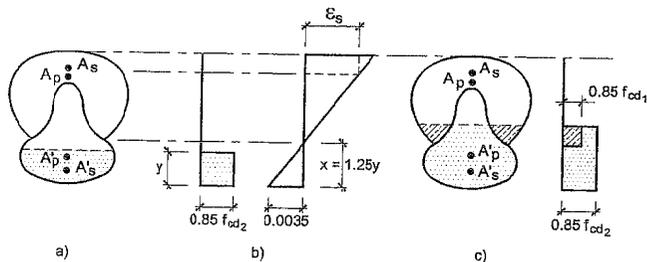


Figura 49-2

- Una es que el bloque comprimido de hormigón ocupe nada más una zona de la sección transversal correspondiente al hormigón de resistencia características  $f_{ck2}$  y de cálculo  $f_{cd2}$  (generalmente el prefabricado) (Fig. 49-2a)).

- La otra es que el bloque invada ambos hormigones (Fig. 49-2c)).

De nuevo el método más práctico de cálculo es el expuesto en 36.2.1.

#### 49.2.2 ESFUERZO CORTANTE

El tema fue expuesto en su totalidad en el Capítulo 39 de esfuerzo cortante y en particular en 39.2.13.

#### 49.2.3 ESFUERZO RASANTE

La garantía de la conexión entre ambos hormigones, como ya señalamos en el Capítulo 40, es la esencia de funcionamiento de la pieza compuesta.

En dicho Capítulo se expuso el tema de la comprobación a esfuerzo rasante en todas sus variantes.

#### 49.2.4 DEFORMACIONES

Vale íntegramente lo expuesto en el Capítulo 48, sin más variación que emplear el momento de inercia homogeneizado y el valor de  $E'_{ci}$  correspondiente al hormigón que se toma como base de la homogeneización.

### 49.3 PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

El caso más frecuente es el de piezas prefabricadas de hormigón pretensado, asociadas a hormigón armado "in situ".

El planteamiento es idéntico a los expuestos en 49.2.1.1 y 49.2.1.2, pero teniendo en cuenta lo expuesto para el caso de piezas con armaduras activas en 36.1.1 o activas y pasivas en 36.2.1.

La comprobación a corte de la pieza pretensada se realiza de acuerdo con 49.2.3 pero teniendo en cuenta en su caso lo expuesto en el Capítulo 39.

La comprobación a esfuerzo rasante no presenta diferencias con lo expuesto en el Capítulo 40.

## 49.4 EFECTOS DE LA RETRACCIÓN Y LA FLUENCIA EN PIEZAS COMPUESTAS

### 49.4.1 PIEZAS SIMPLEMENTE APOYADAS <sup>1</sup>

Cuando se vierte el hormigón "in situ", el de la pieza prefabricada ya está endurecido y ha sufrido una parte de la retracción. Por tanto, la retracción del hormigón "in situ" será mayor que la que le queda por tomar al de la pieza prefabricada y se verá coartada por la presencia de ésta, creándose un estado tensional en la pieza compuesta por tal motivo.

Las tensiones que la retracción diferencial entre ambos hormigones produce en la pieza prefabricada han de tener una resultante en equilibrio con la de las tensiones que la presencia de la pieza prefabricada induce en el hormigón "in situ". Al estar el sistema exterior en equilibrio, los efectos de la retracción no influyen en la capacidad de la pieza frente a estados límite últimos, pero sí puede influir en los de servicio, en especial en los de fisuración y deformaciones.

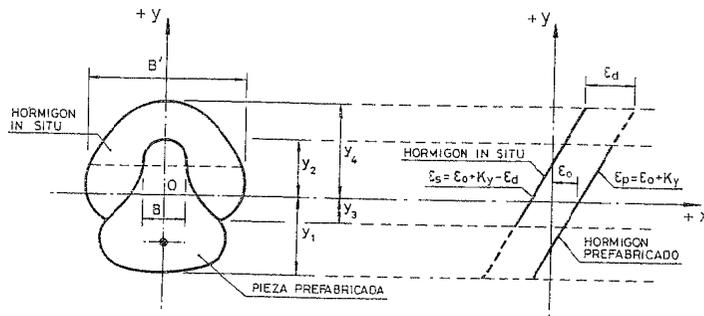


Figura 49-3

Sea una pieza simplemente apoyada cuya sección transversal es la indicada en la figura y llamemos  $\varepsilon_d$  a la retracción diferencial entre ambos hormigones.

Consideremos los sistemas de ejes indicados en la figura con centro en el centro de gravedad de la sección compuesta homogeneizada. La retracción diferencial producirá, en general, un estado de flexión en la pieza <sup>2</sup>, cuyas leyes de deformaciones serán de la forma:

- 1 El contenido de este Capítulo puede ampliarse en "Efectos de la retracción y fluencia diferenciales sobre las tensiones normales y esfuerzo rasante en piezas compuestas". Tesis Doctoral de F. HERNANDO, bajo la dirección de J. CALAVERA. Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid. Noviembre de 1990 (49.1).
- 2 Se exceptúa el caso en que los centros de gravedad de las áreas de hormigón "in situ" y prefabricado coincidan, en cuyo caso, cada área está sometida a solamente un esfuerzo axial, con distribución, por tanto, constante de tensiones y deformaciones.

Hormigón prefabricado:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_o + k y \quad [49.1]$$

Hormigón in situ:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_o + k y - \varepsilon_d \quad [49.2]$$

donde  $\varepsilon_o$  es la deformación del hormigón prefabricado a nivel del c.d.g. de la sección compuesta, valor que no conocemos.

Llamando  $n = \frac{E_{ck,s}}{E_{ck,p}}$ , relación de los módulos de deformación de ambos

hormigones, se tiene:

Equilibrio de fuerzas

$$E_{c,p} \int_{y_1}^{y_2} (\varepsilon_o + k y) B dy + E_{c,s} \int_{y_3}^{y_4} (\varepsilon_o + k y - \varepsilon_d) (B' - B) dy = 0$$

o bien

$$\int_{y_1}^{y_2} (\varepsilon_o + k y) B dy + n \int_{y_3}^{y_4} (\varepsilon_o + k y - \varepsilon_d) (B' - B) dy = 0 \quad [49.3]$$

que, operando, conduce a

$$\begin{aligned} \varepsilon_o \int_{y_1}^{y_2} B dy + k \int_{y_1}^{y_2} B y dy + n \varepsilon_o \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) dy + \\ + nk \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) y dy - n \varepsilon_d \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) dy = 0 \end{aligned} \quad [49.4]$$

Llamando:

$A_{c,s}$  = Área de la sección de hormigón "in situ".

$A_{c,p}$  = Área de la sección de hormigón prefabricado.

$M_{c,s}$  = Momento estático de la sección de hormigón "in situ".

$M_{c,p}$  = Momento estático de la sección de hormigón prefabricado.

$I_{c,s}$  = Momento de inercia de la sección de hormigón "in situ".

$I_{c,p}$  = Momento de inercia de la sección de hormigón prefabricado.

(Los momentos estáticos y de inercia están referidos a OX).

Se tiene, sustituyendo en [49.4]:

$$\varepsilon_o (A_{c,p} + n A_{c,s}) + k (M_{c,p} + n M_{c,s}) - n \varepsilon_d A_{c,s} = 0 \quad [49.5]$$

Equilibrio de momentos

$$E_{c,p} \int_{y_1}^{y_2} (\varepsilon_o + ky) B y \, dy + E_{c,s} \int_{y_3}^{y_4} (\varepsilon_o + ky - \varepsilon_d) (B' - B) y \, dy = 0$$

y operando

$$\int_{y_1}^{y_2} (\varepsilon_o + ky) B y \, dy + n \int_{y_3}^{y_4} (\varepsilon_o + ky - \varepsilon_d) (B' - B) y \, dy = 0 \quad [49.6]$$

Operando de nuevo

$$\begin{aligned} \varepsilon_o \int_{y_1}^{y_2} B y \, dy + k \int_{y_1}^{y_2} B y^2 \, dy + n \varepsilon_o \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) y \, dy + \\ + nk \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) y^2 \, dy - n \varepsilon_d \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) y \, dy = 0 \end{aligned} \quad [49.7]$$

y sustituyendo

$$\varepsilon_o (M_{c,p} + n M_{c,s}) + k (I_{c,p} + n I_{c,s}) - n \varepsilon_d M_{c,s} = 0 \quad [49.8]$$

Resolviendo el sistema formado por [49.5] y [49.8] y teniendo en cuenta que  $M_{c,p} = -n M_{c,s}$ , se obtiene:

$$\varepsilon_o = n \varepsilon_d \frac{A_{c,s}}{A_{c,p} + n A_{c,s}} \quad [49.9]$$

$$k = n \varepsilon_d \frac{M_{c,s}}{I_{c,p} + n I_{c,s}} \quad [49.10]$$

Obtenidos los valores de  $\varepsilon_o$  y  $k$ , se tienen directamente las tensiones en cualquier punto:

Hormigón prefabricado

$$\sigma_{c,p} = E_{c,p} [\varepsilon_o + ky] \quad [49.11]$$

Hormigón "in situ"

$$\sigma_{c,s} = E_{c,s} [\varepsilon_o + ky - \varepsilon_d] \quad [49.12]$$

siendo  $y$  la ordenada del punto considerado.

En general, la comprobación más importante es la correspondiente a la fibra inferior de la pieza prefabricada, ya que la retracción puede ocasionar tracciones apreciables en esa fibra, que comprometan su estado frente a fisuración.

El momento flector producido por la retracción, que llamaremos  $M_r$ , es de deducción inmediata.

$$M_r = \int_{y_3}^{y_4} E_{c,s} \cdot \varepsilon_d (B' - B) y \, dy = E_{c,s} \cdot \varepsilon_d \int_{y_3}^{y_4} (B' - B) y \, dy \quad [49.13]$$

y operando

$$M_r = E_{c,s} \cdot \varepsilon_d \cdot M_{c,s} \quad [49.14]$$

Este momento, constante a lo largo de la luz, produce una flecha

$$f_r = \frac{M_r L^2}{8 E_{c,p} \cdot I_h} \quad [49.15]$$

donde  $L$  es la luz de la pieza e  $I_h$  el momento homogeneizado con  $n = \frac{E_{c,s}}{E_{c,p}}$ .

Los valores de las tensiones proporcionadas por las fórmulas [49.11] y [49.12] y de la flecha, obtenido mediante la fórmula [49.15], se ven notablemente reducidos por la relajación de tensiones debida a la fluencia, en especial si la pieza prefabricada es pretensada. La experimentación disponible es escasa, pero es posible que las reducciones puedan alcanzar valores del 50%.

La retracción produce una fuerza rasante igual a la resultante de las tensiones sobre el hormigón prefabricado, igual y contraria, naturalmente, a la resultante de las tensiones sobre el hormigón "in situ". Llamando  $R_r$  a dicha fuerza rasante

$$R_r = E_{c,p} \int_{y_1}^{y_2} [\varepsilon_o + ky] B \, dy \quad [49.16]$$

y operando

$$R_r = E_{c,p} [\varepsilon_o A_{c,p} + k M_{c,p}] \quad [49.17]$$

Esta fuerza rasante se concentra en las extremidades de la pieza, con una distribución del tipo de la indicada en la figura 49-4.

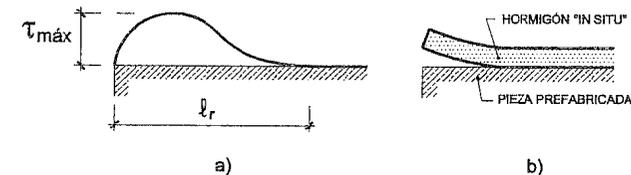


Figura 49-4

- 1 La fórmula puede deducirse del concepto de curvatura  $y'' = \frac{M_r}{E_{c,p} \cdot I_h} = k$ .
- 2 Para  $E_{c,p}$  debe tomarse el valor correspondiente a cargas de larga duración.

De acuerdo con JONASSON (49.2) puede aceptarse

$$l_r \approx 3 e_m \quad [49.18]$$

donde  $e_m$  es el espesor medio del hormigón "in situ"<sup>1</sup>.

El valor del esfuerzo rasante máximo,  $\tau_{máx}$ , puede estimarse mediante la fórmula

$$\tau_{max} = \frac{2 \eta R_r}{3 e_m p} \quad [49.19]$$

donde

$\eta$  = Coeficiente dependiente del de fluencia  $\phi$ ,  $\eta = \frac{1 - e^{-\phi}}{\phi}$ . Puede aceptarse

$\phi = 2$  para hormigones normales, con lo que  $\eta = 0,43$ . La fluencia, como dijimos, reduce naturalmente las tensiones rasantes, lo cual, en este caso, ya está considerado en la fórmula.

$p$  = Perímetro crítico a rasante.

(La fórmula parte de adoptar para  $\tau_{máx}$  un valor doble del medio).

La retracción produce una tendencia al levantamiento del hormigón "in situ" (Fig. 49-4), en los extremos de la pieza.

#### EJEMPLO 49.1

Calcular las tensiones producidas por la retracción diferencial, así como la flecha y las tensiones rasantes, en la sección compuesta de la figura 49-5. Luz = 4,5 m,  $f_{cs,k} = 25$  MPa,  $f_{cp,k} = 50$  MPa. Retracción diferencial,  $\epsilon_d = 1 \cdot 10^{-4}$ .

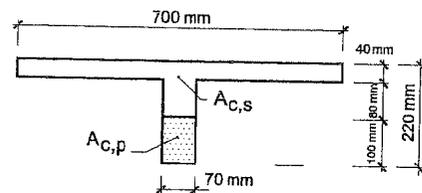


Figura 49-5

$$n = \frac{E_{c,s}}{E_{c,p}} = \frac{8500 (50)^{1/3}}{8500 (25)^{1/3}} = 0,79$$

1 Realmente, JONASSON estudió el problema para piezas con sección rectangular de hormigón "in situ", es decir con espesor constante.

2 Véase la referencia (49.3).

Las áreas respectivas de hormigón prefabricado e "in situ" son:

$$A_{c,p} = 7000 \text{ mm}^2; A_{c,s} = 33600 \text{ mm}^2$$

Los momentos de inercia de las áreas de hormigón prefabricado e "in situ", respecto al eje, pasando por sus centros de gravedad respectivos, valen:

$$I_{xc,p} = 583,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{xc,s} = 2.352,00 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Las alturas de los centros de gravedad correspondientes, respecto a la fibra inferior de la sección, son:

$$X_{c,p} = 50 \text{ mm}$$

$$X_{c,s} = 190 \text{ mm}$$

El centro de gravedad de la sección homogeneizada está a una altura  $X_{CGH} = 160,8 \text{ mm}$  y el momento de inercia de la sección homogeneizada es  $I_{x,h} = 13.303 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ .

Los momentos estáticos y los de inercia respecto al eje que pasa por el c.d.g. resultan ser:

$$I_{c,p} = 583,3 \cdot 10^4 + 7000 (160,8 - 50)^2 = 9,179 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{c,s} = 2352 \cdot 10^4 + 33600 (190 - 160,8)^2 = 5221 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$M_{c,s} = 33600 (190 - 160,8) = 981,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$M_{c,p} = 7000 (50 - 160,8) = -775,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

De acuerdo con las fórmulas [49.9] y [49.10]

$$\epsilon_o = n \epsilon_d \frac{A_{c,s}}{A_{c,p} + n A_{c,s}} = 0,79 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \frac{33600}{7000 + 0,79 \cdot 33600} = 7,9 \cdot 10^{-5}$$

$$k = n \epsilon_d \frac{M_{c,s}}{I_{c,p} + n I_{c,s}} = 0,79 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \frac{981,8 \cdot 10^3}{9179 \cdot 10^4 + 0,79 \cdot 5221 \cdot 10^4} = 5,83 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^{-1}$$

La tensión en la fibra inferior del hormigón prefabricado será, de acuerdo con la fórmula [49.11]

$$\sigma_{c,p,1} = E_{c,p} [\varepsilon_o + k y_1] = 8500 (50)^{1/3} (7,9 \cdot 10^{-5} - 5,83 \cdot 10^{-7} \cdot 160,8) = -0,46 \text{ N/mm}^2$$

En fibra superior del hormigón prefabricado:

$$\sigma_{c,p,2} = E_{c,p} [\varepsilon_o + k y_2] = 8500 (50)^{1/3} [7,9 \cdot 10^{-5} - 5,83 \cdot 10^{-7} \cdot (160,8 - 100)] = 1,36 \text{ N/mm}^2$$

En fibra inferior del hormigón "in situ", de acuerdo con [49.12]

$$\sigma_{c,s,3} = E_{c,s} [\varepsilon_o + k y_3 - \varepsilon_d] = 8500 (25)^{1/3} [7,9 \cdot 10^{-5} - 5,83 \cdot 10^{-7} (160,8 - 100) - 1 \cdot 10^{-4}] = -1,40 \text{ N/mm}^2$$

En fibra superior del hormigón "in situ":

$$\sigma_{c,s,4} = E_{c,s} [\varepsilon_o + k y_4 - \varepsilon_d] = 8500 (25)^{1/3} [7,9 \cdot 10^{-5} - 5,83 \cdot 10^{-7} (220 - 160,8) - 1 \cdot 10^{-4}] = 0,37 \text{ N/mm}^2$$

El momento que produce la retracción diferencial es constante a lo largo de la pieza y, de acuerdo con la fórmula [49.14], igual a:

$$M_r = 8500 (25)^{1/3} [981,8 \cdot 10^3 (7,9 \cdot 10^{-5} - 1 \cdot 10^{-4}) + 5,83 \cdot 10^{-7} 5221 \cdot 10^4] = 244,083 \text{ mmN}$$

$$M_r = 8500 (25)^{1/3} \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 981,8 \cdot 10^3 = 2,44 \cdot 10^6 \text{ mmN}$$

La flecha producida por la retracción es, de acuerdo con la fórmula [49.15]

$$f_r = \frac{2,44 \cdot 10^6 \cdot 4500^2}{8500 (50 + 8)^{1/3} \cdot 13303 \cdot 10^4} = 1,41 \text{ mm}$$

La fuerza rasante es, según la fórmula [49.17] igual a:

$$R_r = E_{c,p} [\varepsilon_o A_{c,p} + k M_{c,p}] = 8500 (50)^{1/3} [7,9 \cdot 10^{-5} \cdot 7000 + 5,83 \cdot 10^{-7} (-775,5 \cdot 10^3)] = 3,16 \text{ kN}$$

La tensión rasante máxima, de acuerdo con la fórmula [49.19] es:

$$\tau_{max} = \frac{2 \eta R_r}{3 e_m P} = \frac{2 \cdot 0,43 \cdot 3160}{3 \cdot 40 \cdot 70} = 0,27 \text{ N/mm}^2$$

$$(\text{se calcula con } \eta = 0,43 \text{ y } e_m = \frac{A_{c,s}}{700} = \frac{33600}{700} = 48 \text{ mm}).$$

#### 49.4.2 PIEZAS CONTINUAS

Supongamos el forjado de dos vanos de la figura 49-6.

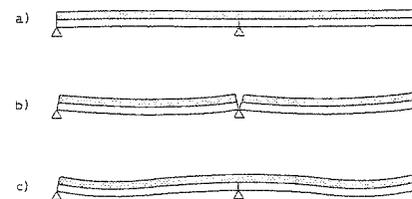


Figura 49-6

Si los tramos fueran independientes, funcionarían como simplemente apoyados y la retracción del hormigón "in situ" produciría una deformación como la indicada en b), según vimos en el apartado anterior.

Si, como es usual, se dispone armadura pasiva en la zona de momentos negativos, aparece una coacción al giro que produce un momento negativo sobre el apoyo intermedio, debido a la retracción diferencial.

El cálculo manual es muy laborioso. Puede verse una exposición general en (49.1) y (49.4) mediante programas informáticos.

#### 49.4.3. FLUENCIA EN PIEZAS PRETENSADAS CONTINUAS

En el caso frecuente de que las piezas prefabricadas sean pretensadas, la fluencia del hormigón bajo la acción del pretensado produce un incremento de contraflecha, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 48. Consideremos un forjado de dos vanos, tal como se indica en la figura 49-7.



Figura 49-7

Si no hubiera continuidad, la contraflecha aumentaría con el tiempo, tal como se indica en a), compensada en mayor o menor medida por la acción de las cargas actuantes. De hecho, la losa superior de hormigón "in situ", al establecer la continuidad, coarta esa deformación y produce un momento positivo en el apoyo intermedio, que reduce el momento de pretensado en vano. Esto está parcialmente compensado por los fenómenos de fluencia debidos al peso propio, que son de signo contrario, y también por los producidos por la retracción, como vimos en el apartado anterior.

En general, el fenómeno es de poca importancia en los forjados usuales, en los que la carga permanente descomprime fuertemente la pieza pretensada, pero puede no serlo en casos especiales, como en puentes prefabricados.

El cálculo manual es muy laborioso. Puede verse su tratamiento en (49.1). De nuevo, el cálculo con ordenador abre hoy caminos interesantes.

También los esfuerzos debidos a la fluencia, como los debidos a la retracción, influyen en las condiciones en servicio, pero no en la capacidad resistente última.

#### 49.5 CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN PIEZAS COMPUESTAS DE PIEZAS PREFABRICADAS PRETENSADAS ASOCIADAS CON HORMIGÓN "IN SITU"

##### a) Flechas instantáneas

El cálculo de las flechas instantáneas no ofrece dificultad pues basta operar con el mismo procedimiento expuesto en 48.12 referido a la sección homogénea.

##### b) Flechas diferidas

El tema es extraordinariamente complejo por la interacción de la retracción diferencial, la fluencia y la variación de la fuerza de pretensado, a lo largo del tiempo.

Un método disponible interesante ha sido elaborado por el P.C.I. (Prestressed Concrete Institute) en la referencia (49.5). El método es aplicable a piezas simples y compuestas.

Las flechas diferidas se calculan multiplicando las instantáneas por unos coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  que figuran en la Tabla T-49.1.

TABLA T-49.1

		Piezas simples	Piezas compuestas
AL EJECUTARSE LA PIEZA COMPUESTA	Coefficiente para el cálculo de la flecha total en ese momento, debida al peso propio a aplicar a la flecha instantánea de peso propio al transferir.	$K_1 = 1,85$	$K_1 = 1,85$
	Coefficiente para el cálculo de la contraflecha total en ese momento, a aplicar a la contraflecha instantánea al transferir.	$K_1 = 1,80$	$K_1 = 1,80$
EN EL ESTADO FINAL A LARGO PLAZO	Coefficiente para el cálculo de la flecha total en ese momento, debida al peso propio a aplicar a la flecha instantánea de peso propio al transferir.	$K_2 = 2,70$	$K_2 = 2,40$
	Coefficiente para el cálculo de la contraflecha total en ese momento, a aplicar a la contraflecha instantánea al transferir.	$K_2 = 2,45$	$K_2 = 2,20$
	Coefficiente para el cálculo de la flecha en ese momento debida a la totalidad de la carga permanente menos el peso propio y el peso del hormigón "in situ", a aplicar a la flecha instantánea debida a esa misma carga.	$K_2 = 3,00$	$K_2 = 3,00$
	Coefficiente para el cálculo de la flecha total en ese momento debida al peso del hormigón "in situ", a aplicar a la flecha instantánea debida a esa carga.	-	$K_2 = 2,30$

#### EJEMPLO 49.2

Sea una pieza pretensada que presenta las flechas instantáneas siguientes:

Contraflecha	4,41 mm
Flecha de peso propio	3,00 mm
Flecha del resto de la carga permanente	0,48 mm
Flecha de sobrecarga	2,38 mm

El cálculo de la flecha final se ordena en el cuadro siguiente, que proporciona toda la información necesaria. (Los signos negativos corresponden a flechas ascendentes).

ACCIÓN	FLECHAS INSTANTÁNEAS (mm)			FLECHAS FINALES (mm)	
	AL TRANS- FERIR	AL EJECUTAR LA PIEZA COMPUESTA		$K_2$	VALOR
		$K_1$	VALOR		
Contraflecha	- 4,41	1,80	- 7,94	2,45	- 10,80
Peso propio de la vigueta	3,00	1,85	5,55	2,70	8,10
Resto de la carga permanente			0,48	3,00	1,44
Sobrecarga (flecha instantánea)					2,38
FLECHAS TOTALES	- 1,41	- 1,91		1,12	

### BIBLIOGRAFÍA

- (49.1) HERNANDO, F. "Efectos de la retracción y la fluencia diferenciales sobre las tensiones normales y esfuerzo rasante en piezas compuestas". Tesis Doctoral en la Escuela de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid, bajo la dirección de J. CALAVERA. Madrid. 1990.
- (49.2) JONASSON, J.E. "Computer programs for non-linear analysis of concrete in view of shrinkage, creep and temperature". Cement and Concrete Research Institute. Stockholm. 1977.
- (49.3) "Shear at the interface of precast and in situ concrete". F.I.P. January 1982.
- (49.4) MATTOCK, A.H. "Precast-Prestressed concrete bridges 5. Creep and Shrinkage Studies". Journal of the P.C.A. May 1961.
- (49.5) PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. "Design Handbook". "Precast prestressed concrete", 2ª Edición. Chicago. 1978

## CAPÍTULO 50

### ELEMENTOS AUXILIARES DE LAS CONSTRUCCIONES DE HORMIGÓN. ELEMENTOS DE ATADO. SEPARADORES. MANGUITOS DE EMPALME. BANDAS DE ESTANQUIDAD. PERNOS DE ANCLAJE. ELEMENTOS DE SUSPENSIÓN. "INSERTS" DIVERSOS

#### 50.1 ATADO DE BARRAS<sup>1</sup>

El tema viene rigiéndose por normas de buena práctica. Recientemente se ha publicado en España la Norma UNE 36832 (50.1).

Un documento específico fue publicado por el C.E.B. en septiembre de 1990, titulado "Recommendations for Spacers, Chairs and Tying of Steel Reinforcement" (50.4). Recientemente (1992) se ha publicado una versión española por el GEHO, bajo el título "Recomendaciones para Separadores, Calzos y Atado de las Armaduras" (50.5).

##### a) FORMA DE ATADO

El atado de las armaduras se realiza siempre con alambre de acero templado, "alambre negro", generalmente de 1,6 mm de diámetro. Actualmente en España es una práctica general el utilizar alambre en rollo y realizar el atado con tenaza.

<sup>1</sup> La documentación que aquí se incluye procede del libro "MANUAL DE DETALLES CONSTRUCTIVOS EN OBRAS DE HORMIGÓN ARMADO (50.2) y del MANUAL DE FERRALLA (50.3). Las especificaciones que siguen son más amplias que las de EHE, aunque coinciden en los puntos comunes de especificación.

La práctica habitual en otros países es utilizar alambres preparados con ganchos (Fig. 50-1) que se fabrican en diferentes tamaños correspondientes a tres o cuatro grupos de diámetros. El atado se realiza con la herramienta



Figura 50-1

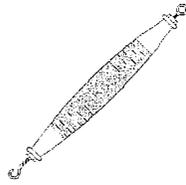


Figura 50-2

indicada en la Fig. 50-2, constituida por un husillo sin fin, que el ferrallista utiliza primero enganchando los dos lazos del alambre y después tirando hacia afuera de la herramienta, con lo que en uno o dos movimientos está atada la unión (Fig. 50-3). El uso de la tenaza conduce a atados como el de la figura 50-4 que frecuentemente se sueltan sobre todo si en lugar de tres vueltas de atado se dan sólo dos<sup>1</sup>. Una alternativa válida, en cambio, es el uso de atadoras mecánicas que realizan la operación con seguridad (Fig. 50-5).

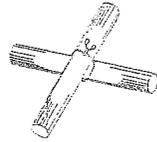


Figura 50-3

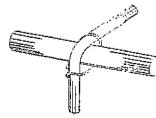


Figura 50-4

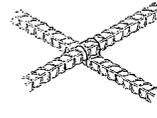


Figura 50-5

## b) PUNTOS DE ATADO

Se recomienda lo siguiente: (Ver 50.4)

- *Losas y placas.* Deben atarse todos los cruces de barras del perímetro del panel de armadura.

Para barras de diámetro no superior a 20 mm se sujetan en el resto del panel los cruces de barras de forma alternativa. Para diámetros a partir de 25 mm, los cruces atados no deben distanciarse más de 50 diámetros (Fig. 50-6).

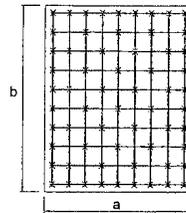


Figura 50-6

<sup>1</sup> En España, en los años 30, se utilizó la herramienta indicada. Su uso, desafortunadamente, se ha perdido.

- *Pilares y vigas.* Debe atarse cada cruce de esquina de los estribos con la armadura principal. Si se emplea malla electrosoldada para formar los estribos, la armadura principal debe atarse en las esquinas a una distancia no mayor de cincuenta veces el diámetro de la armadura principal.

Las otras barras diferentes de las de esquina de los estribos deben atarse a éstos a distancias no superiores a 50 veces el diámetro de la barra.

Los estribos múltiples deben atarse entre sí (Fig. 50-7).

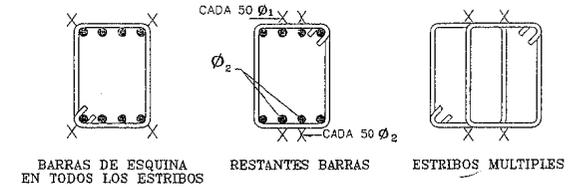


Figura 50-7

- *Muros.* Se atan las barras en intersecciones alternadas.

Los muros prefabricados, hormigonados con su plano medio en posición horizontal, se consideran, a efectos de atado, como losas.

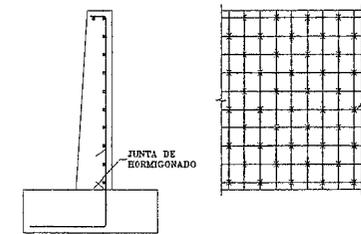


Figura 50-8

## 50.2 SEPARADORES Y CALZOS<sup>1</sup>

Son piezas de diversos materiales que se colocan para garantizar el recubrimiento o la posición de las barras. Más concretamente adoptaremos las definiciones siguientes (ver (50.4) y (50.5)).

### 50.2.1 TIPOS

a) *SEPARADORES.* Piezas de plástico, alambre o chapa de acero galvanizado, alambre o chapa de acero inoxidable o mortero, destinadas a garantizar los recubrimientos de las barras.

Existen tres tipos generales de separadores:

<sup>1</sup> Algunas de estas piezas, desafortunadamente, no se fabrican en España.

... con alambre, o como simple apoyo (Fig. 50-9). La figura 50-10 muestra un procedimiento manual para fabricar este tipo de separadores, en caso de urgencia. En muchos países está prohibido el uso de separadores fabricados a pie de obra.

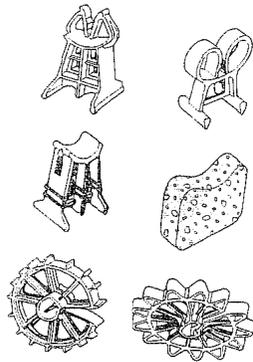


Figura 50-9

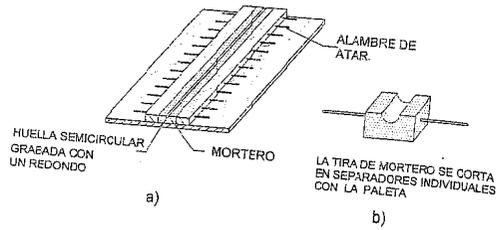


Figura 50-10

Los de tipo *lineal*, destinados a soportar la armadura inferior de vigas y losas, en los que es esencial su seguridad al vuelco (Fig. 50-11).

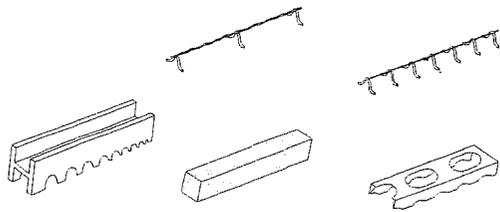


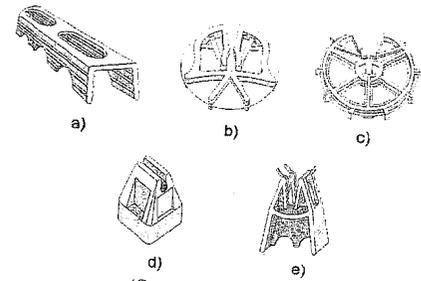
Figura 50-11

Los *separadores terminales o extremos*, (Fig. 50-12), que se colocan en las puntas de barras para garantizar su distancia al encofrado o al terreno.

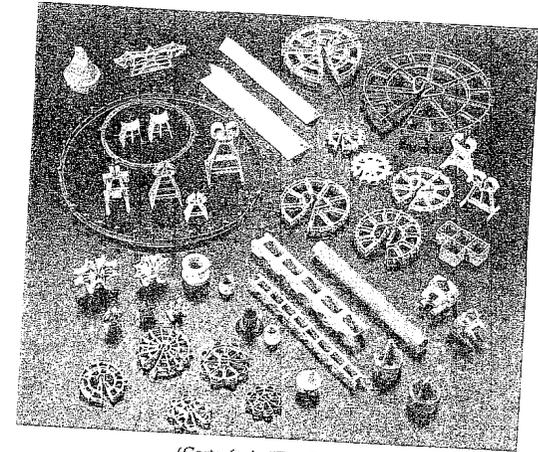


Figura 50-12

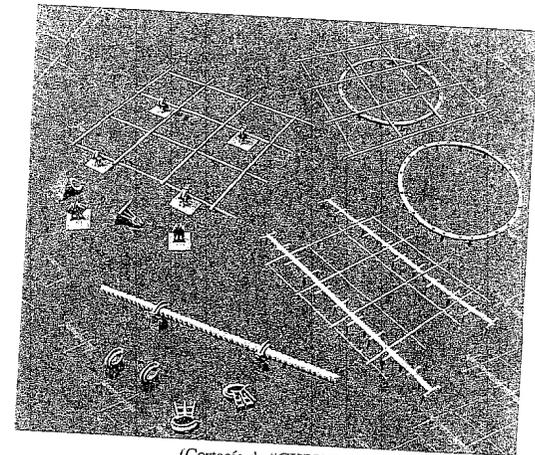
Las figuras 50-13, 50-14 y 50-15 muestran fotografías de productos reales.



(Cortesía de "BETOMAX")  
Figura 50-13



(Cortesía de "FOSROC")  
Figura 50-14



(Cortesía de "CHRYSO")  
Figura 50-15

b) CALZOS. Son normalmente de alambre de acero galvanizado o de acero inoxidable.

Los hay de tipo *individual*, por apoyo puntual de barras, y *continuos*, que ofrecen un apoyo continuo (Fig. 50-16).

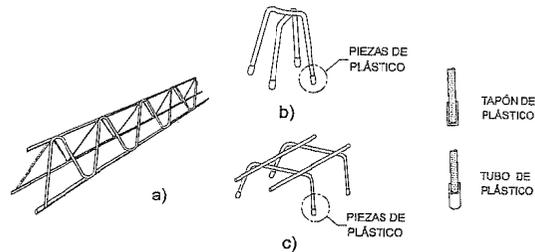


Figura 50-16

En ambos casos su misión es mantener la separación de armaduras superiores de losas respecto al encofrado o terreno, o mantener la separación entre emparrillados de armaduras de muros, etc.

Los separadores puntuales deben tener en las puntas de las patas tacos de plástico para evitar la corrosión, puesto que quedan en superficie de la pieza. Los lineales, para evitar la corrosión, deben a su vez apoyarse en separadores de tipo adecuado.

El segundo tipo es especialmente útil para mantener la posición de armaduras de pavimento. Si no se dispone de éstos, una solución es fabricarlos a partir de una malla electrosoldada (Fig. 50-17 a) y darles la forma b) acoplando las cotas A y B a las necesidades concretas (Fig. 50-17 b) y c)). Si se emplean para losas encofradas inferiormente, o para pavimentos que tienen hojas de plástico entre la losa y la subbase, es esencial colocar trozos de tubo de plástico, como se indica, para evitar manchas de óxido en cara inferior de la losa o que se perfora la hoja de plástico, respectivamente.

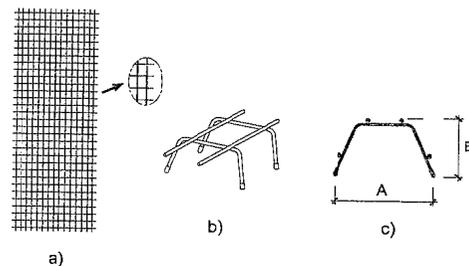


Figura 50-17

c) PIES DE PATO. Los tamaños en que se fabrican los calzos son limitados por razones económicas. Sin embargo, en el caso de losas de gran canto, muros de

gran espesor, etc., se necesitan piezas para asegurar la posición de las armaduras.

Se usan generalmente piezas hechas con despuntes de ferralla (Fig. 50-18 a)) que reciben el nombre de "pie de pato". Su diámetro y dimensiones deben ser acordes con el canto de la pieza y, en el caso de losas, con el peso del emparrillado de la armadura superior.

Si apoyan en el encofrado, deben hacerlo mediante separadores (Fig. 50-18 b)). Si existe emparrillado inferior, se ata a éste (Fig. 50-18 c)).

d) ABONO. El precio de los separadores, calzos y "pies de pato" normalmente está incluido en el del kg de armadura colocada. Su repercusión económica es débil pero, en grandes losas y placas, puede ser adecuada la estimación y abono independiente de los "pies de pato".

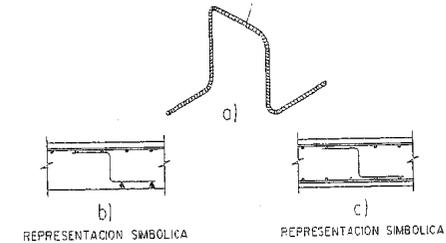


Figura 50-18

**NOTA IMPORTANTE.** Recuérdese que los separadores, calzos y pies de pato deben colocarse para mantener los recubrimientos y distancias nominales incrementados en 5 mm si el Control de Calidad de Ejecución es Intenso y en 10 mm si es Normal o Reducido. La razón de este incremento es dejar una tolerancia para la deformación de las barras entre los apoyos en los separadores, de forma que, en todo caso, el recubrimiento o distancia quede garantizado sin tolerancia en menos.

## 50.2.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Para indicar en los planos los separadores, calzos y pies de pato se emplean los símbolos siguientes (Fig. 50-19):

a) SEPARADOR DE TIPO BUECA O TACO	
VISTA LATERAL	
VISTA EN PLANTA	
b) SEPARADOR DE TIPO LINEAL	
VISTA LATERAL	
VISTA EN PLANTA	
c) SEPARADOR TERMINAL	
VISTA LATERAL	
VISTA EN PLANTA	
d) CALZO INDIVIDUAL	
VISTA LATERAL	
VISTA EN PLANTA	
e) CALZO CONTINUO	
VISTA LATERAL (PERFIL)	
VISTA EN PLANTA	
f) PIE DE PATO	
VISTA LATERAL (PERFIL)	
VISTA EN PLANTA	

Figura 50-19

### 50.2.3 REGLAS DE COLOCACIÓN

#### a) LOSAS, FORJADOS Y CIMENTACIONES

- Los emparrillados inferiores de armaduras deben apoyarse en separadores acoplados a la armadura inferior, colocados a distancias máximas de 50 veces el diámetro de la barra, sin rebasar 1000 mm (Fig. 50-20).

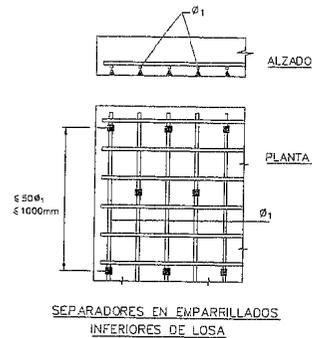


Figura 50-20

- Los emparrillados superiores de armaduras deben apoyarse en:

- Calzos continuos colocados bajo la armadura superior situados a distancias máximas de 50 veces el diámetro de la barra. Estos calzos continuos se apoyarán en el emparrillado inferior si existe (Fig. 50-21 a)) y, en otro caso, en calzos lineales separados entre sí, a no más de 500 mm (Fig. 50-21 b)).

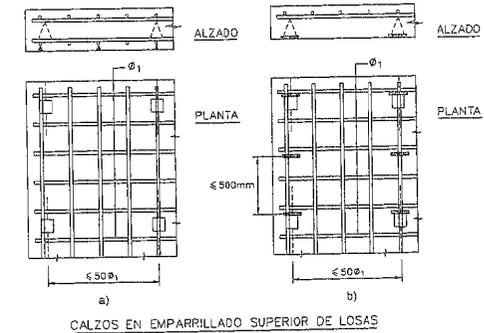


Figura 50-21

- Calzos individuales a una distancia entre sí, en ambas direcciones, que no rebase 50 veces el diámetro de la barra ni 500 mm (Fig. 50-22).
- "Pies de pato" a una distancia entre sí, en ambas direcciones, que no rebase 50 veces el diámetro de la barra (Fig. 50-23).

#### b) VIGAS

Los separadores deben colocarse en los estribos a distancia máxima de 1000 mm, en el sentido longitudinal de la pieza (Fig. 50-24), con un mínimo de tres planos de separadores por vano.

La colocación en la sección transversal se realiza de acuerdo con lo indicado en la figura 50-25.

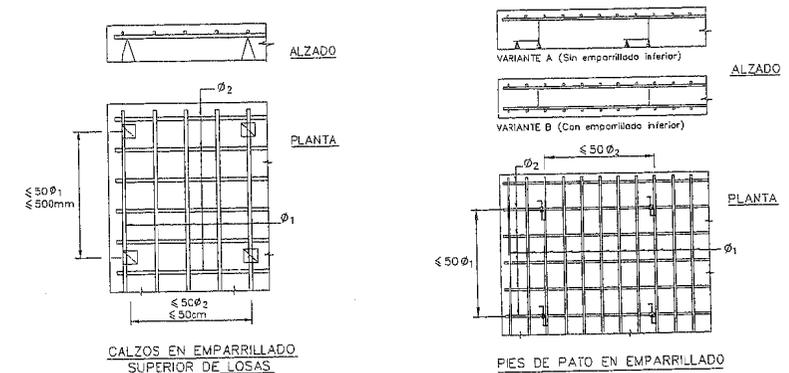


Figura 50-22

Figura 50-23

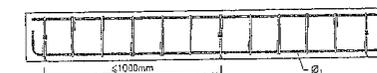


Figura 50-24

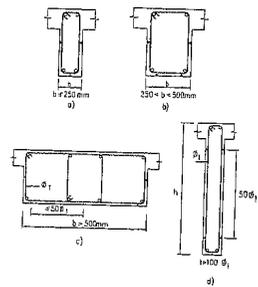


Figura 50-25

En los extremos encofrados de vigas resultan necesarios separadores terminales u ordinarios, según los casos (Fig. 50-26).

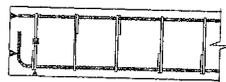


Figura 50-26

### c) PILARES

Los separadores deben colocarse en los estribos a distancia máxima de 100 veces el diámetro de la armadura principal, sin rebasar 2000 mm a lo largo de la pieza y con un mínimo de tres planos de separadores por pieza o tramo (Fig. 50-27).

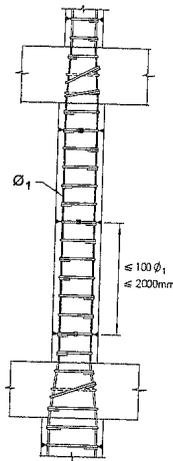


Figura 50-27

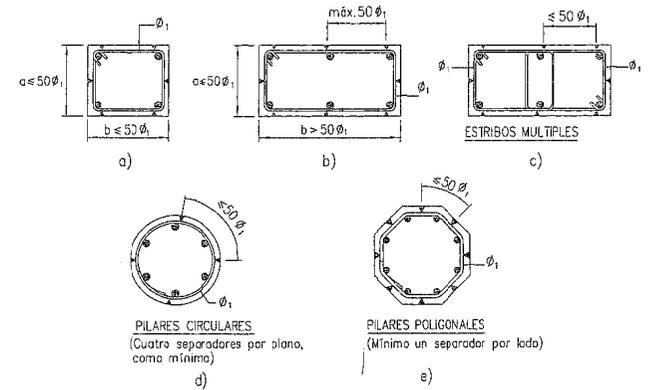


Figura 50-28

La colocación en la sección transversal, de acuerdo con lo indicado en la figura 50-28.

### d) MUROS

En cada emparillado se colocarán separadores en red ortogonal con separación no mayor de 50 veces el diámetro de la armadura, sin pasar de 500 mm. Los separadores de armaduras de caras opuestas se colocan a la misma altura. La separación entre emparillados de ambas caras se asegura mediante calzos continuos a separación no superior a 1000 mm. En grandes muros de contención, en lugar de calzos se emplearán pies de pato.

En los muros prefabricados hormigonados con su plano medio en posición horizontal, se colocarán los separadores de acuerdo con lo establecido para losas.

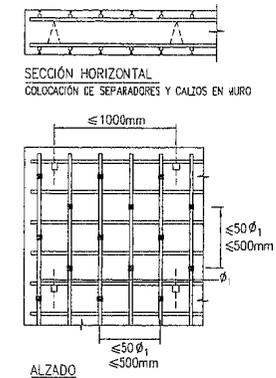


Figura 50-29

### 50.3 SOLDADURA DE BARRAS

La soldadura de barras es un sistema frecuente de unión, existiendo diversos procedimientos para su realización.

Como normativa española véase, aparte EHE, la Norma UNE 36832 (50.1). Una buena referencia es el documento (50.6).

#### 50.3.1 TIPOS DE UNIONES

Pueden clasificarse en dos tipos:

- a) Uniones resistentes
- b) Uniones de montaje

Además de esto, las uniones pueden clasificarse por su posición y por el procedimiento de soldadura empleado. Todo ello se resume en la Tabla T-50.1.

**TABLA T-50.1**  
**CLASIFICACIÓN DE UNIONES SOLDADAS**

TIPOS DE UNIÓN	PROCEDIMIENTO DE SOLDADURA	
	RESISTENTES	DE MONTAJE
A tope	x	
Por solape	x	x
En cruz	x	x
Uniones de barras a estructura metálica	x	

Las condiciones de soldabilidad de las barras vienen especificadas en (50.3) y (50.6). La primera de las referencias contiene especificaciones para el control de calidad que en la soldadura de barras debe ser especialmente estricto.

#### 50.3.2 DETALLES DE UNIONES

##### a) UNIONES A TOPE

Se realizan todas ellas con preparación de bordes de acuerdo con la figura 50-30.

##### b) UNIONES POR SOLAPE

No necesitan preparación y se realizan de acuerdo con la figura 50-31.

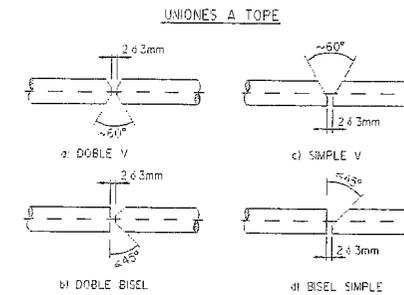


Figura 50-30

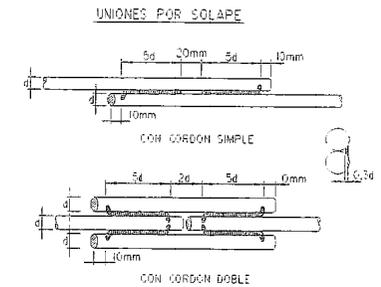


Figura 50-31

#### c) UNIONES EN CRUZ

Pueden ser realizadas por resistencia (con máquinas de características muy variables) o con electrodo. Este segundo procedimiento se indica en la figura 50-32.

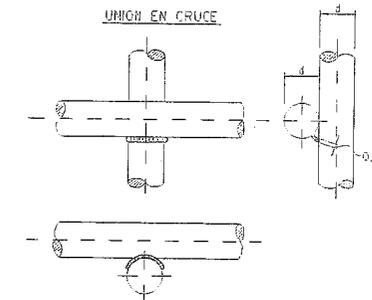


Figura 50-32

#### d) UNIONES DE BARRAS A ESTRUCTURA METÁLICA

Su uso es frecuente y los detalles más frecuentes se indican en la figura 50-33.

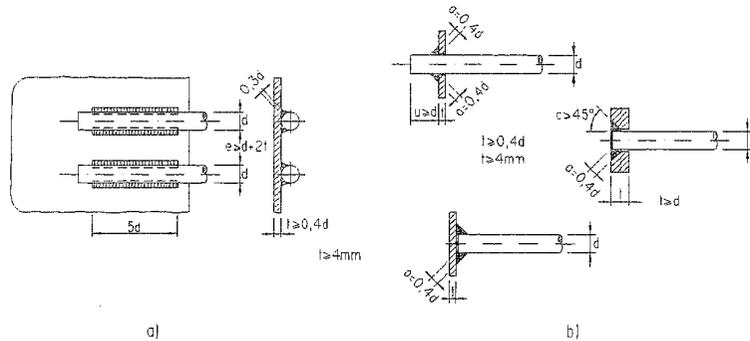


Figura 50-33

#### 50.4 MANGUITOS DE EMPALME<sup>1</sup>

Al no existir normativa española, seguimos las especificaciones del Manual nº 201 del CEB, traducido por el GEHO (50.7).

El empalme mediante manguitos es de aplicación directa en barras de grandes diámetros, dado que la normativa no permite los empalmes por solapo para  $\phi > 32$  mm. Además, puede ser una solución económica debido al ahorro de peso de acero y a la rapidez de ejecución en diámetros normales, dado que existen máquinas que automatizan el procedimiento empalmado de forma mecánica las barras, montando la ferralla con gran rapidez. Esta técnica se emplea en construcciones de difícil acceso para los operarios (grandes pilas de puentes, etc.), consiguiendo, además del ahorro de acero, una rapidez de montaje mucho mayor.

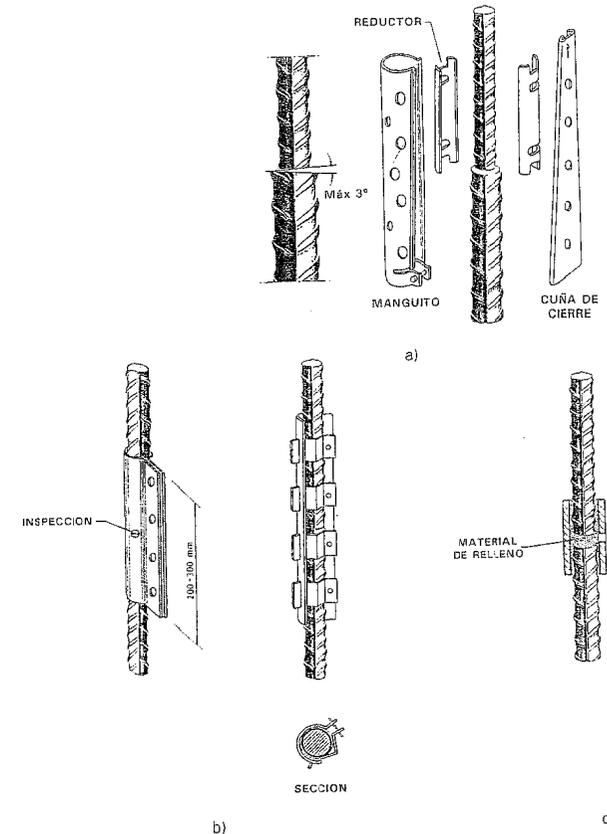
La existencia de manguitos de empalme en un elemento estructural, siempre que se sigan las reglas que más adelante se detallan, no afecta a la ductilidad de las piezas si el cálculo se ha realizado mediante procedimientos de cálculo lineal con o sin redistribución limitada.

Básicamente, y de acuerdo a su forma de trabajo, se distinguen dos tipos:

- a) **MANGUITOS DE COMPRESIÓN**, también llamados posicionadores, válidos únicamente para transmitir esfuerzos de compresión. Las barras deben tener superficies de contacto planas y perpendiculares a su eje, admitiéndose en el caso de acopladores de contacto directo un ángulo máximo de desviación entre las caras de  $3^\circ$ . Existen fundamentalmente tres tipos: acopladores apretados (figura 50-34 a)), atornillados (figura 50-34 b)) y con material de relleno de aleación fundida (figura 50-34 c)). En este último caso las barras no requieren precauciones especiales de corte, ni estar en contacto, aunque sus

<sup>1</sup> Sigo fundamentalmente la exposición del Manual de Ferralla de J. Calavera, E. González Valle, J. Fernández Gómez y F. Valenciano (50.3).

extremos deben estar limpios y secos. En la figura 50-34 pueden verse algunos ejemplos genéricos de los manguitos citados.



Acopladores de barras en compresión

Figura 50-34

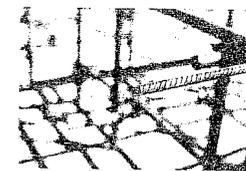
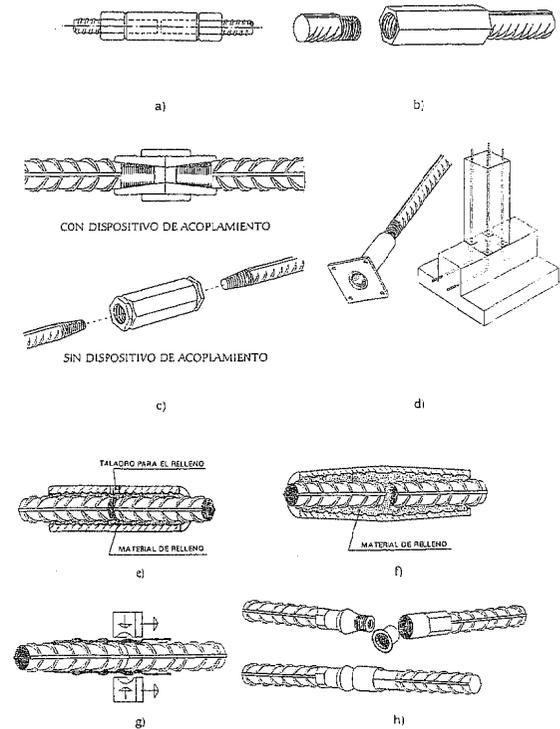
- b) **MANGUITOS DE TRACCIÓN-COMPRESIÓN**. El fabricante deberá acreditar el funcionamiento de los manguitos, poseyendo resultados de ensayo a tracción de las distintas combinaciones diámetro mínimo - diámetro máximo que puedan presentarse, así como sus especificaciones de utilización.

Básicamente pueden distinguirse los siguientes tipos:

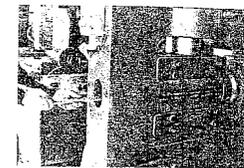
- b.1) **Manguitos roscados**. Existen dos variantes fundamentales. En una de ellas las corrugas de las barras (laminadas especialmente) permiten roscar las barras en el manguito con dos tuercas de ajuste, y el empalme

se produce como se representa en la figura 50-35 a). Las tuercas de ajuste necesitan ser apretadas con un determinado par de apriete, lo cual requiere el uso de una llave dinamométrica. Otro tipo de conectadores de rosca son los que se representan en las figuras 50-35 b) y 50-35 c). En este caso las barras se filetean en sus extremos para poder roscarse en un manguito que lleva dos roscas interiores de sentidos contrarios. Previamente los extremos de las barras se estampan para aumentar su sección y permitir el fileteado de la rosca sin pérdida de sección (ver proceso de fabricación en la figura 50-36). Un caso especial de este tipo de empalmes lo constituyen los manguitos de "armaduras en espera", diseñados especialmente para evitar esperas de elementos hormigonados, y que pueden fijarse a los encofrados mediante unas puntas (ver figura 50-35 d)).

- b.2) **Manguitos con relleno de aleación, mortero o resina.** En las figuras 50-35 e) y 50-35 f) se representan modelos genéricos de estos sistemas. Básicamente se trata de un cilindro en el que se acoplan las barras a unir, rellenando con una aleación metálica fundida, con un mortero sin retracción o con resina epoxi, según los casos. Las barras no necesitan estar en contacto, y el interior del manguito posee unas corrugas para mejorar la adherencia. Hasta el endurecimiento del relleno las barras deben mantenerse inmóviles, en especial en los rellenos con mortero.
- b.3) **Manguitos prensados.** Las barras se introducen en un manguito que posteriormente se prensa, conectando ambas barras. El prensado puede hacerse en frío o en caliente. Existe una variante en la cual se prensan en los extremos de las barras a unir dos elementos roscables, que posteriormente se conectan. En las figuras 50-35 g) y 50-35 h) se representan dos ejemplos de este tipo de manguitos.



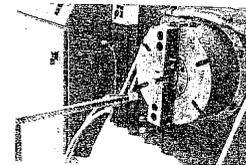
a) Corte de barra



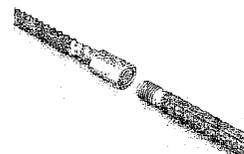
b) Estampado del extremo para aumentar la sección



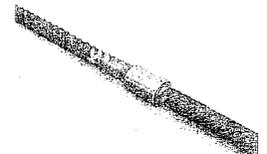
c) Extremo de barra estampado para proceder al fileteado de la rosca



d) Barra roscada



e) Ejecución del empalme



f) Barras empalmadas

(Sistema LENTON-ERICO)  
Figura 50-36

Figura 50-35

## 50.5 BANDAS DE ESTANQUIDAD

Se utilizan en disposiciones múltiples, pero muy en particular para garantizar la estanquidad de juntas de hormigonado o contracción en muros (véanse los Capítulos 64 y 65) y también en depósitos y piscinas (fig. 50-37).

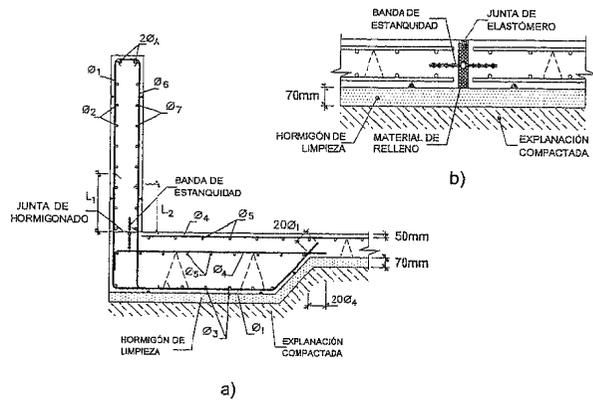
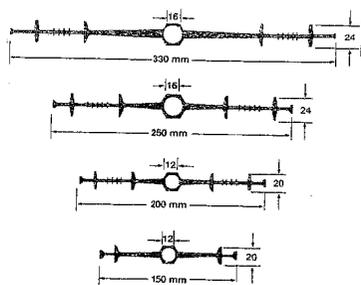


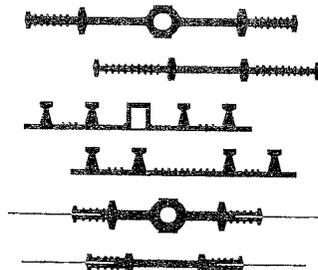
Figura 50-37

Están fabricadas en PVC o neopreno y se suministran en rollos. El empalme se realiza generalmente por soldadura térmica.

Las figuras 50-38 y 50-39 indican diversos productos concretos.



(Cortesía de "FOSROC")  
Figura 50-38



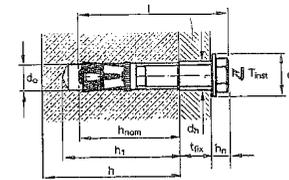
(Cortesía de "GUMBA")  
Figura 50-39

## 50.6 PERNOS DE ANCLAJE

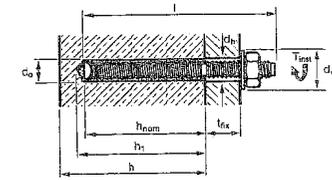
Son de uso múltiple en las construcciones de hormigón. Las cargas a aplicar a la estructura deben ser detalladamente previstas en posición y valor en el proyecto. Cualquier improvisación posterior en obra, debida a imprevisiones, redundará en mala calidad, tiempos perdidos y costes más elevados.

Existen sistemas de anclaje puramente mecánicos y otros que anclan mediante una inyección con resina.

Las figuras 50-40 y 50-41 representan productos reales.

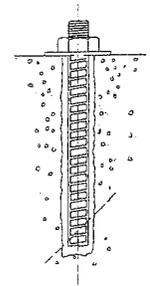


a). Anclaje HSL



b). Anclaje HVA

(Cortesía de "HILTI")  
Figura 50-40



(Cortesía de "FOSROC")  
Figura 50-41

## 50.7 ELEMENTOS DE SUSPENSIÓN

En las piezas prefabricadas estos elementos son imprescindibles. Las soluciones improvisadas como redondos anclados, Fig. 50-42 o la de cordones, nominalmente mejor,

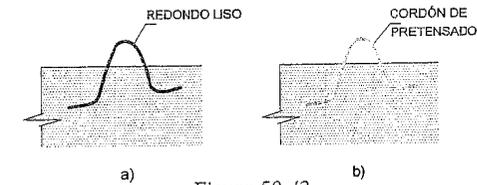
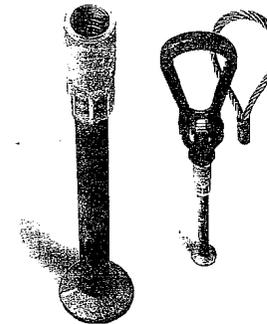


Figura 50-42

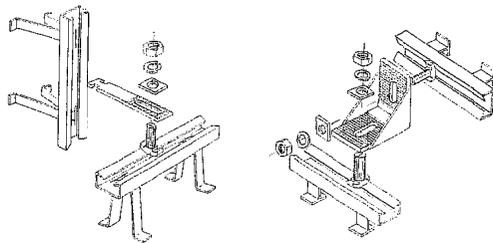
son peligrosas y en la mayor parte de los casos, al ser cortadas después de su utilización, son origen de problemas estéticos de manchas de óxido. Existen en el mercado diversas piezas específicas que permiten solucionar correctamente el problema.



(Cortesía de "DEHA")  
Figura 50-43

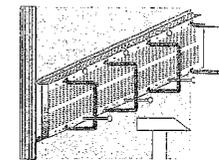
## 50.8 "INSERTS" DIVERSOS

Existen múltiples piezas que evitan la perforación y anclaje defectuoso de elementos a la estructura. La figura 50-44 indica una solución de carriles para fijación de cargas móviles en línea.



(Cortesía de "CHRYSO")

Figura 50-44



(Cortesía de "BETOMAX")

Figura 50-45

La figura 50-45 indica un elemento para resolver el enlace de las losas de piso a muros hormigonados con encofrado deslizante.

## BIBLIOGRAFÍA

- (50.1) UNE 36832 "Especificaciones para la ejecución de uniones soldadas de barras para hormigón estructural".
- (50.2) CALAVERA, J. "Manual de detalles constructivos en obras de hormigón armado". INTEMAC. Madrid. 1993.
- (50.3) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; VALENCIANO, F.; "Manual de ferralla". INTEMAC-ANIFER. 2ª Edición. Madrid. 1999.
- (50.4) "Recommendations for spacers, chairs and tying of steel reinforcement". CEB. 1990.
- (50.5) "Recomendaciones para separadores, calzos y atado de armaduras".
- (50.6) CEB. "Recommendations for welded splices in reinforcing bars". CEB Trask Group VII/4 "Welding of Reinforcing Bars" of Permanent Commission VII "Reinforcement: Technology and Quality Control".
- (50.7) CEB "Recommendations for mechanical splices of reinforcing bars". 1990. Traducción española del GEHO. Boletín nº 7. Marzo 1993.

## CAPÍTULO 51

### DETALLES CONSTRUCTIVOS VARIOS <sup>1</sup>

#### 51.1 INTRODUCCIÓN

Se resumen en este capítulo aquellos detalles de carácter general que son comunes a varios capítulos del libro, de forma que el incluirlos en todos ellos ocasionaría una frecuente repetición.

Sin embargo y como criterio general, los detalles constructivos específicos de cada elemento estructural se incluyen en su capítulo correspondiente.

#### 51.2 RADIOS DE DOBLADO DE LAS ARMADURAS

De acuerdo con la Instrucción EHE, los radios de doblado para barras en general se indican en la Tabla T-51.1.

**TABLA T-51-1**  
**DIÁMETRO MÍNIMO DE LOS MANDRILES**

Barras corrugadas	Ganchos, patillas y gancho en U		Barras dobladas y otras barras curvadas	
	Diámetro de la barra en mm		Diámetro de la barra en mm	
	$\phi < 20$	$\phi \geq 20$	$\phi \leq 25$	$\phi > 25$
B 400 S	4 $\phi$	7 $\phi$	10 $\phi$	12 $\phi$
B 500 S	4 $\phi$	7 $\phi$	12 $\phi$	14 $\phi$

<sup>1</sup> Sobre este tema, véase mi libro Detalles Constructivos en Obras de Hormigón Armado (INTEMAC. Madrid, 1993) (Contiene un paquete informático para el dibujo de los Detalles con Autocad) (51.1).

Para estribos, de diámetro no superior a 12 mm, sigue lo siguiente:

$$D \geq \begin{cases} -3\phi \\ -30\text{ mm} \end{cases}$$

Para mallas electrosoldadas rige lo anterior, siempre que el doblado se inicie a no menos de cuatro diámetros a contar del nudo soldado más próximo.

### 51.3 GANCHOS, PATILLAS Y ANCLAJES ESTÁNDAR

La Instrucción EHE especifica los indicados en la figura 51.1, para barras en general. No indica nada para el caso de estribos, que necesitan formas especiales. En la figura 51.2 se recogen las especificaciones de ACI 318-95 (51.4).

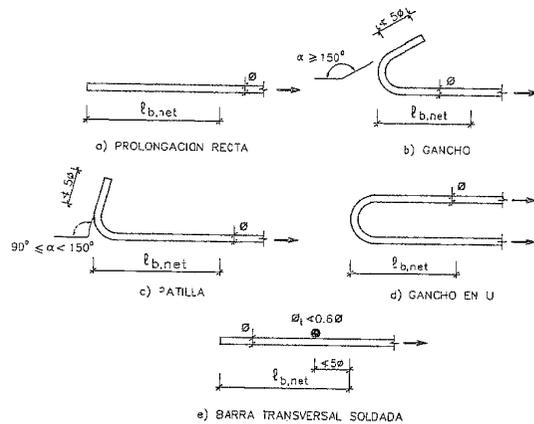


Figura 51-1

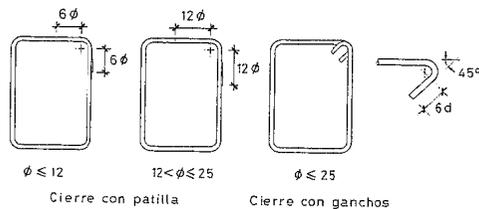


Figura 51-2

### 51.4 RECUBRIMIENTOS

Tanto para armaduras activas como pasivas se definieron ya en 30.4.2.1. y en particular en la Tabla T-30.4.

### 51.5 SEPARACIÓN ENTRE ARMADURAS

Tanto para activas como para pasivas se definieron ya en 32.4.2.2. a) y b).

### 51.6 RECUBRIMIENTOS SEGÚN EL MODEL CODE 90

La clasificación se realiza en función de cinco ambientes, de acuerdo con la Tabla T-51.2.

**TABLA T-51.2**  
**NIVELES DE EXPOSICIÓN EN RELACIÓN CON LAS CONDICIONES**  
**MEDIOAMBIENTALES SEGUN EL MODEL CODE 90**

NIVELES DE EXPOSICIÓN		CONDICIONES MEDIOAMBIENTALES
1 AMBIENTE SECO		Por ejemplo: - Interior de edificios de viviendas y oficinas <sup>1</sup> .
2 AMBIENTE HÚMEDO	a) SIN HELADAS	Por ejemplo: - Interior de edificios con humedad alta <sup>2</sup> . - Piezas en ambiente exterior. - Piezas en suelo y/o agua no agresivos.
	b) CON HELADAS	Por ejemplo: - Piezas en ambiente exterior expuestas a la helada. - Piezas en contacto con suelos y/o agua no agresivos pero expuestos a heladas. - Piezas en ambiente interior con humedad alta y expuestas a heladas.
3 AMBIENTE HÚMEDO CON HELADAS Y PRODUCTOS DESCONGELANTES		Por ejemplo: - Piezas en ambiente exterior o interior expuestas a heladas y productos descongelantes.
4 AMBIENTE MARINO	a) SIN HELADAS	Por ejemplo: - Piezas completa o parcialmente sumergidas en agua de mar o expuestas a salpicaduras de agua de mar. - Piezas en aire saturado de sal (zonas costeras).
	b) CON HELADAS	Por ejemplo: - Piezas parcialmente sumergidas en agua de mar o expuestas a salpicaduras de agua de mar y expuestas a heladas. - Piezas en aire saturado de sal (zonas costeras) y expuestas a heladas.
LOS SIGUIENTES NIVELES PUEDEN PRESENTARSE AISLADOS O EN COMBINACIÓN CON LOS NIVELES ANTERIORES		
5 AMBIENTES CON AGRESIVIDAD DEBIDA A PRODUCTOS QUÍMICOS <sup>3</sup>	a	- Ambientes con agresividad química ligera (gases, líquidos o sólidos). - Atmósfera industrial agresiva.
	b	- Ambiente con agresividad química moderada (gases, líquidos o sólidos).
	c	- Ambientes con agresividad química alta (gases, líquidos o sólidos).

- 1 Este nivel de exposición es válido solamente cuando, durante la construcción, las estructuras o algunas de sus piezas no estén expuestas a condiciones más severas durante un período de varios meses.
- 2 Por ejemplo, en lavanderías industriales.
- 3 Pueden presentarse solos o en combinación con los ambientes 1-4. (Para la clasificación de ambientes químicamente agresivos, véase el MODEL CODE-90).

De acuerdo con la clasificación anterior, el recubrimiento viene dado en función del ambiente y de la tolerancia geométrica con la misma fórmula de EHE expuesta en la fórmula [30.1]

**TABLA T-51.3**  
**RECUBRIMIENTOS NOMINALES ( $r_{nom} = r_{min} + \Delta r$ )<sup>(\*)</sup>**  
**(Valores del recubrimiento del separador)**

Nivel de exposición	Control de ejecución	
	Nivel normal	Nivel intenso
1	20	15
2	35	30
3	50	45
4	50	45
5	(*)	(*)

(\*) A estudiar en cada caso.

### 51.7 RECUBRIMIENTOS SEGÚN EL EUROCÓDIGO EC-2

Emplea la misma clasificación que el C.E.B. (Ver Tabla T-51.2) y sus especificaciones, básicamente coincidentes, se resumen en la Tabla T-51.4.

**TABLA T-51.4**  
**RECUBRIMIENTOS MÍNIMOS**

$(r_{nom.} = r_{min.} + \Delta r)$  <sup>(\*)</sup>

	NIVEL DE EXPOSICIÓN SEGÚN LA TABLA T-51.3								
	1	2a	2b	3	4a	4b	5a	5b	5c
Recubrimiento mínimo en mm	15	20	25	40	40	40	25	30	40

- (\*) - Recuérdese que  $\Delta r = 5$  mm si el control de ejecución es intenso y  $\Delta r = 10$  mm en otros casos.  
 - En losas, para niveles 2 a 5, pueden reducirse los valores indicados en 5 mm.  
 - Si se emplea hormigón de resistencia igual o superior a H-40, para niveles 2a a 5b pueden reducirse los recubrimientos en 5 mm.

### 51.8 ARMADURA DE ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

La disposición recomendable se indica en la figura 51.3.

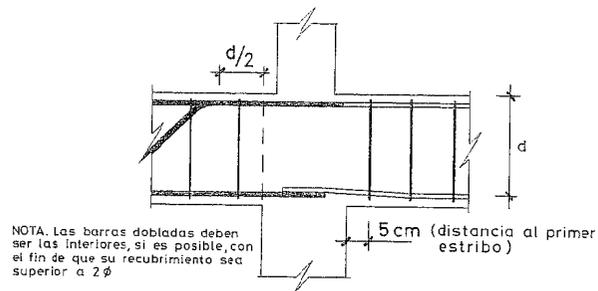
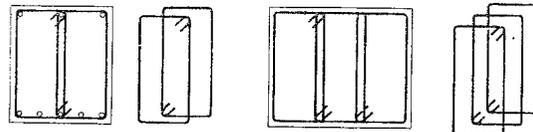


Figura 51.3

En el caso de vigas anchas en que se necesiten más de dos ramas de estribos las disposiciones de la figura 51.4 permiten emplear un solo tipo de estribos, simplificando la ferralla. Sin embargo, si las vigas están sometidas a flexión transversal, esta disposición impide utilizar las ramas horizontales de los estribos para dicha misión. En este caso, es preferible adoptar la disposición de la figura 51-8



NOTA: Si la pieza puede verse sometida a momentos torsores conviene siempre un estribo exterior.

Figura 51.4

(vigas planas, vigas de cimentación, etc.). Análogamente, si la pieza puede estar sometida a momentos torsores, debe siempre disponerse un estribo exterior.

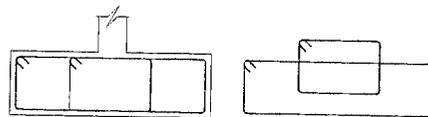


Figura 51.5

### 51.9 ARMADURA DE PIEL EN VIGAS

Por las razones expuestas en 47.7 e indicadas en la figura 47-7, si la viga tiene un canto apreciable, debe disponerse alguna armadura de alma. Conviene establecer esta necesidad para cantos iguales o superiores a 600 mm. El mejor procedimiento es el indicado en 47-7, mediante el gráfico de la figura 47-8 y las Tablas T-47.5 y T-47.6. En cualquier caso, el diámetro mínimo debe ser 8 mm y la separación máxima 300 mm. (fig. 51-6).

MÍNIMA ARMADURA DE ALMA

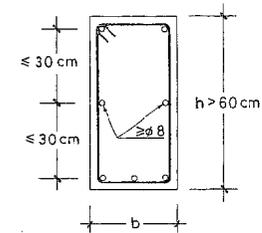


Figura 51-6

### 51.10 COLOCACIÓN DE ARMADURAS EN PILARES

La separación y disposición de cercos a lo largo de la directriz del pilar cumplirá lo indicado en la figura 51-7.

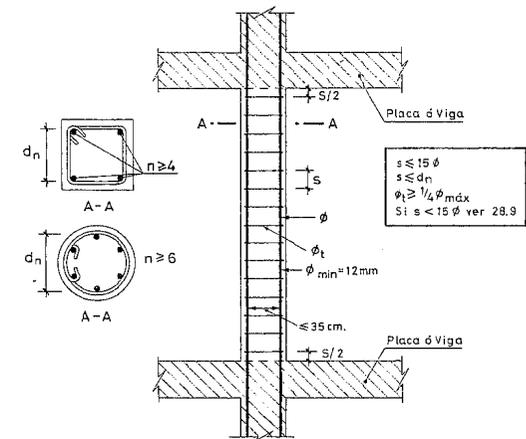


Figura 51-7

Los estribos arriostarán la armadura longitudinal con un ángulo  $\leq 135^\circ$ , pero pueden arriostar las barras longitudinales alternativamente si la separación entre éstas no es superior a 150 milímetros (fig. 51-8).

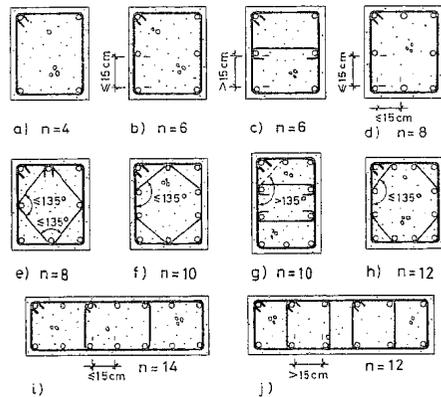


Figura 51-8

NOTAS:

1. Como principio general, debe emplearse el mínimo número de barras posible. (Si ello conduce a barras muy gruesas, ver nota 2). Esto permite un hormigonado correcto y cercos simples y conduce a una mejor resistencia del hormigón y de la pieza.
2. Ver, como alternativa, el empleo de grupos de barras en 51.13.
3. En pilares de sección muy alargada, tales como los i) y j) de la figura 51-8, es especialmente interesante el empleo de barras gruesas y conseguir la disposición i) mejor que la j), para no perturbar el hormigonado con un número excesivo de cercos.

51.11 COLOCACIÓN DE ARMADURAS EN VIGAS

Aquí también el empleo del mínimo número de barras del mayor diámetro posible, todo ello compatible con los requisitos planteados por el anclaje y la fisuración, son la mejor garantía de una ferralla simple y económica y de un correcto hormigonado (figs. 51-9 y 51-10).

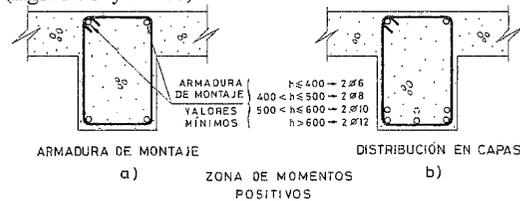


Figura 51-9

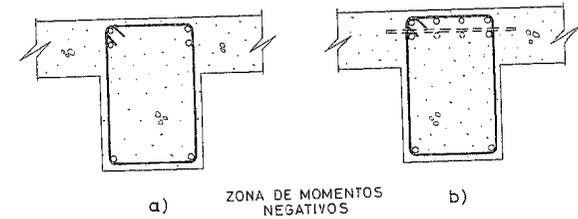


Figura 51-10

Es importante observar (fig. 51-10) que en piezas flectadas, *no sometidas a torsión*, ni principal ni secundaria (ver 42.1), los estribos pueden ser abiertos o cerrados (fig. 51-11 a) y b)). Si pueden existir esfuerzos de torsión de cualquier tipo, el estribo *debe ser cerrado* y cumplir las condiciones expuestas en el capítulo 42.

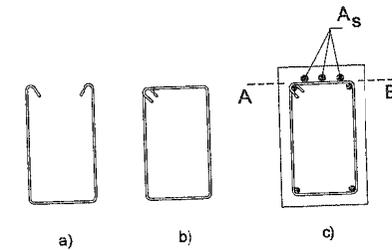


Figura 51-11

La armadura de tracción debe ir rodeada por estribos. Si se situara por fuerza, como se indica en la figura 51-11 c), correspondiente a una sección de momentos negativos de una viga continua, el esfuerzo rasante en un plano ideal pasando entre la armadura exterior A<sub>s</sub> y la rama horizontal del estribo, de acuerdo con lo visto en el capítulo 39, valdría

$$\tau_d = \frac{V_d}{bz}$$

es decir, la tensión rasante horizontal, igual a la tensión cortante vertical en la sección considerada, debería ser resistida por el hormigón. Por lo tanto, si eso se cumple, quiere decir que la viga no necesita estribos en esa zona, ya que el esfuerzo cortante puede ser resistido por el hormigón.

Sin embargo, aunque realmente el esfuerzo cortante pudiera ser resistido sólo por el hormigón, es decir, aunque no fueran necesarios los estribos, como vimos en el Capítulo 39 rigen unas disposiciones mínimas de estribos que impiden suprimirlos salvo que la solución propuesta fuera justificada para cada caso particular por ensayos directos en laboratorio.

NOTAS:

1. La disposición en capas es preferible, como se indica en la figura 51-9 b) y 51-10 b). El colocar barras no atadas al estribo, como las indicadas de puntos, exige disponer trozos de despunte para atar las barras.
2. Si resultan necesarias más de dos capas, estúdiense la alternativa de grupos de barras en 51.13.
3. El hormigonado fácil de las zonas de momentos negativos es especialmente importante, pues en ellas coinciden los máximos momentos flectores con los máximos cortantes y la mayor dificultad de hormigonado.

Para vigas con ancho  $b \geq 500 \text{ mm}$ , es conveniente el empleo de estribos múltiples.

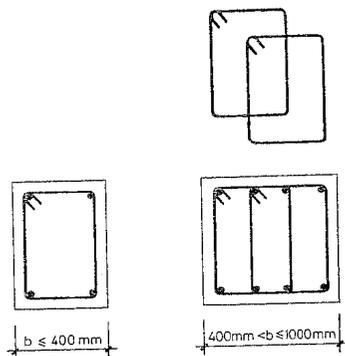


Figura 51-12

En general y en particular para vigas planas y vigas anchas de cimentación, recuérdese 51.8 y las figuras 51-4 y 51-5.

### 51.12 CUANTÍAS GEOMÉTRICAS MÍNIMAS

Las cuantías geométricas mínimas establecidas por EHE y consignadas en 36.1.8 se reiteran en la Tabla T-51-5. Estas cuantías mínimas están establecidas para controlar la fisuración debida a los efectos de la retracción y de las variaciones de temperatura. Se indican en el supuesto de que además se realiza un curado correcto y se disponen juntas de contracción. Sólo deben omitirse en casos particulares, previo un estudio específico.

TABLA T-51.5.-CUANTÍAS GEOMÉTRICAS MÍNIMAS REFERIDAS A LA SECCIÓN TOTAL DE HORMIGÓN (en ‰)

		B 400	B 500
SOPORTES (*)		4	4
LOSAS (**)		1,8	1,5
VIGAS (***)		3,3	2,8
MUROS (****) (Para muros portantes, véase el Capítulo 61)	HORIZONTAL	2	1,6
	VERTICAL	1,2	0,9

- (\*) Cuantía mínima de la armadura longitudinal.  
 (\*\*) Cuantía mínima de cada una de las armaduras, longitudinal y transversal. Las losas apoyadas sobre el terreno requieren estudio especial.  
 (\*\*\*) Cuantía mínima correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opuesta una armadura mínima igual al 30% de la consignada.  
 (\*\*\*\*) Cuantía mínima de la armadura total en la dirección considerada. Esta armadura total debe distribuirse entre las dos caras, de forma que ninguna de ellas tenga una cuantía inferior a un tercio de la indicada. Los muros que deban cumplir requisitos de estanquidad requieren estudio especial.

### 51.13 GRUPOS DE BARRAS

#### 51.13.1 GRUPOS DE BARRAS FRENTE A BARRAS DE GRAN DIÁMETRO

La serie de diámetros estándar de barras de gran diámetro ( $\phi \geq 32 \text{ mm}$ ) para hormigón armado contiene dos diámetros 40 y 50 mm en Europa y los números 11 ( $\phi 35 \text{ mm}$ ), 14 ( $\phi 44 \text{ mm}$ ) y 18 ( $\phi 57 \text{ mm}$ )<sup>1</sup> en los Estados Unidos. Estos diámetros presentan la ventaja de permitir distribuciones muy compactas de armaduras, pero presentan también dos inconvenientes. Por un lado, sus condiciones de anclaje necesitan siempre ser estudiadas con especial cuidado, debido a las fuertes transferencias de esfuerzo que se producen. Por otro lado, con tales diámetros no es aceptable el empalme de barras por solape, lo cual encarece y complica la construcción. Aún cuando el empalme por solape estuviera permitido, resultaría muy caro debido al elevado sobre coste de acero motivado por las grandes longitudes de solape que resultarían necesarias.

Existe una solución alternativa que es el empleo de grupos de barras en contacto, que presenta las ventajas de distribución compacta sin los inconvenientes apuntados.

<sup>1</sup> Las barras en Norteamérica se designan por un número que expresa el diámetro en octavos de pulgada.

### 51.13.2 GRUPOS DE POSIBLE EMPLEO<sup>1</sup>

Los grupos de posible empleo varían algo de unas normas a otras. A continuación, se resumen las especificaciones de la Instrucción EHE.

- En general tres barras, como máximo.
- En zonas de solape y en barras comprimidas de piezas hormigonadas verticalmente y que no necesiten empalmes, cuatro barras.
- El diámetro equivalente (correspondiente a la barra ideal que tiene la misma área que el grupo) no debe ser superior a 50 mm. En barras comprimidas de piezas hormigonadas verticalmente, el diámetro equivalente máximo se eleva a 70 mm.

El MODEL CODE-90 especifica lo siguiente:

Máximo agrupamiento:

- En general tres barras. En barras comprimidas y en zonas de solape, cuatro barras.
- El diámetro máximo equivalente es de 55 mm.

Las disposiciones admitidas por EHE y/o por el MODEL CODE se resumen en las Tablas T-51.6 y T-51.7.

### 51.13.3 DIÁMETROS EQUIVALENTES, ÁREAS Y CAPACIDADES MECÁNICAS

Las disposiciones admitidas en las Tablas T-51.6 y T-51.7 son equivalentes a barras de un diámetro equivalente  $\phi_e = \phi \sqrt{n}$ , siendo  $n$  el número de barras y  $\phi$  el diámetro de la barra individual (Tabla T-51.8).

#### GRUPOS MÁXIMOS

**TABLA T-51.7.- BARRAS COMPRIMIDAS DE PIEZAS HORMIGONADAS VERTICALMENTE Y ZONAS DE SOLAPE EN CUALQUIER CASO**

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	SI	SI	SI
3	SI	SI	SI
4	SI	SI	Sólo en solapes

**TABLA T-51.6.- EN GENERAL**

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	SI	SI	NO
3	SI	NO	NO
4	Sólo en solapes	NO	NO

<sup>1</sup> Como en general la tendencia hacia barras gruesas y grupos es mucho más fuerte en EE.UU. que en Europa, la Norma Norteamericana ACI 318-95 permite la formación de grupos con más barras y diámetros más gruesos (hasta 57 mm) de lo que aquí adoptamos.

**TABLA T-51.8.- DIÁMETROS EQUIVALENTES EN mm**

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	35	45	57
3	43	55	69
4	50	64	---

**TABLA T-51.9.- ÁREAS EN mm**

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	982	1608	2512
3	1473	2412	3768
4	1964	3216	---

Las áreas correspondientes se indican en la Tabla T-51.9.

Las capacidades mecánicas para aceros B 400 y B 500, con  $\gamma_s = 1,15$ , se indican en la Tabla T-51.10.

**TABLA T-51.10.-  $\gamma_s = 1,15$  CAPACIDADES MECÁNICAS EN kN CON ACERO B-400**

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	350,0	573,5	896,0
3	525,0	860,2	1344,1
4	700,0	1146,9	---

**TABLA T-51.11.-  $\gamma_s = 1,15$  CAPACIDADES MECÁNICAS EN kN CON ACERO B-500**

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	435,4	713,3	1114,6
3	653,1	1070,0	1671,9
4	870,8	1426,7	---

### 51.13.4 LA COLOCACIÓN DE GRUPOS EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL

Sólo deben usarse grupos en elementos cuyo espesor sea al menos  $15 \phi_e$ , siendo  $\phi_e$  el diámetro equivalente del grupo más grueso.

#### 51.13.4.1 Distancias entre grupos o entre grupos y barras

La distancia mínima ha de ser igual al diámetro equivalente  $\phi_e$ , cuyos valores se indican en la Tabla T-51.8. Debe observarse que la separación mínima entre grupos es la físicamente existente entre dos puntos del perímetro de las barras reales más próximas de cada grupo. Es necesario también que entre dos grupos exista siempre la separación necesaria para poder introducir el vibrador durante el hormigonado.

#### 51.13.4.2 Recubrimientos

El recubrimiento ha de ser igual al diámetro equivalente  $\phi_e$  medido a la barra real más próxima.

### 51.13.5 ARMADURA DE PIEL

Siempre que se emplean grupos es recomendable disponer una armadura de piel para control de la fisuración de acuerdo con el MODE CODE 90<sup>1</sup>, formando malla con separación de redondos no superior a 100 mm (fig. 51-13).

*Armadura longitudinal*

$$A_{sl} = 0,02 A_{ct} \quad [51.1]$$

$A_{sl}$  = Sección de armadura de piel en sentido longitudinal.

$A_{ct}$  = Área de la sección transversal del recubrimiento inferior y lateral de hormigón, correspondiente al perímetro de la sección que trabaje a tracción.

En la figura 51-13,  $x$  es la profundidad de fibra neutra en estado límite último.

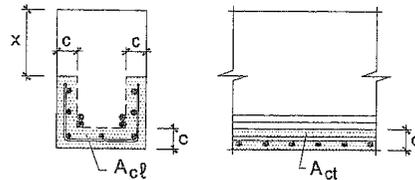


Figura 51-13

*Armadura transversal*

$$A_{st} = 0,01 A_{ct} \quad [51.2]$$

$A_{st}$  = Sección de armadura de piel en sentido transversal.

$A_{ct}$  = Área de la sección longitudinal del recubrimiento en la zona de tracción.

La armadura de piel, tanto en sentido transversal como longitudinal, se extiende a toda el área de recubrimiento que trabaje a tracción.

La sección de la armadura de piel puede ser considerada además como resistente a efectos de flexión, corte o torsión.

### 51.13.6 ESQUEMAS TÍPICOS DE DISPOSICIÓN DE GRUPOS

#### 51.13.6.1 Vigas

En la figura 51-14 se detallan algunas disposiciones corrientes en vigas. Cuando se emplean grupos de tres barras es preferible la disposición en triángulo con un vértice en la parte inferior, ya que mejora la adherencia del grupo. Sin embargo, en las figuras 51-14 c) y d) se ha preferido adoptar sistemas que faciliten la sujeción de los grupos a la armadura transversal, aunque ello conduzca en ocasiones a una posición diferente.

<sup>1</sup> El MODEL CODE 90 lo extiende a barras simples con  $\phi$  32 mm.

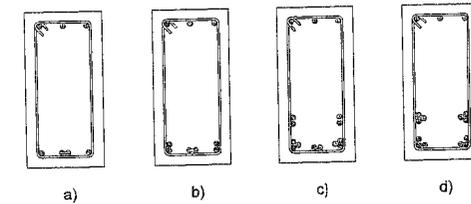


Figura 5-14

#### 51.13.6.2 Pilares

En la figura 51-15 se indican algunas disposiciones típicas. Los estribos indicados de puntos sólo son necesarios si las distancias entre grupos consecutivos superan los 150 mm.

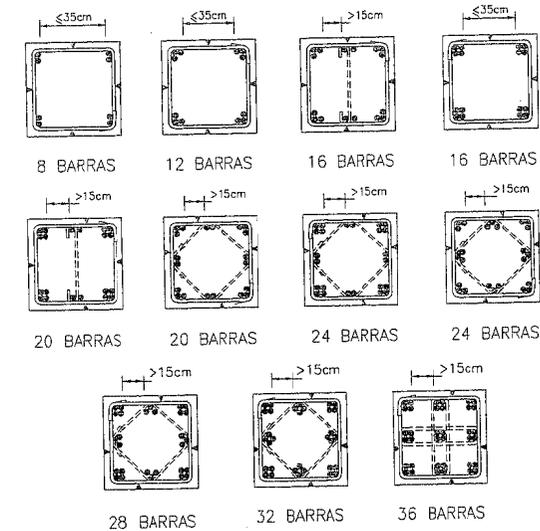


Figura 51-15

En el caso de pilares, cuando se emplean grupos de barras, el diámetro de los estribos debe ser igual o superior a  $\frac{1}{4} \phi_e$ , siendo  $\phi_e$  el diámetro equivalente del grupo más grueso.

La separación entre estribos no debe ser superior a quince veces el diámetro de la barra individual más fina empleada. La Tabla T-51.12 indica los diámetros correspondientes:

TABLA T-51.12.- DIÁMETRO DE ESTRIBOS EN mm

$n \backslash \phi$	25	32	40
2	10	12	2 $\phi$ 12
3	12	2 $\phi$ 12	2 $\phi$ 16
4	2 $\phi$ 12	2 $\phi$ 12	---

Cuando la Tabla indica 2  $\phi$  se entiende que se colocan estribos del diámetro indicado a la mitad de la separación teóricamente necesaria. Esto se hace para evitar el empleo de grandes diámetros en los estribos. Una alternativa es poner dos estribos en contacto manteniendo la separación necesaria completa. En el caso del grupo de 3  $\phi$  40, el diámetro 16 puede conducir a un radio de doblado del estribo no conveniente en algunos casos. Una alternativa es disponer estribos de 2  $\phi$  12 en contacto, a la misma separación de la teóricamente necesaria.

51.13.7 ANCLAJE DE GRUPOS (Véase 44.12)

51.13.8 COMPROBACIÓN DE ADHERENCIA (Véase 43.6)

51.13.9 SOLAPE DE LOS GRUPOS (Véase 44.18)

#### 51.14. REPRESENTACIÓN DE ARMADURAS

No existe normalización española sobre el asunto. Una norma sobre el tema es la ISO 3766-1977 (E) "Planos de edificación y obras públicas - Símbolos para armaduras de hormigón" (51.5).

#### 51.15 FORMAS DE ACOTAR LA FERRALLA

Las plantillas de la ferralla se acotan siempre "de fuera a fuera". Actualmente sobre esto existe la norma española UNE 36831. Puede consultarse la Norma ISO 4066-1977 (E) "Planos de edificación y obras públicas - Despiece de armaduras" (51.6). De ella están tomados los despieces de la figura 51-16, que indican la forma general de acotar barras. La norma UNE 36831 (51.15) cubre también este tema.

DIMENSIONES DE DOBLADO

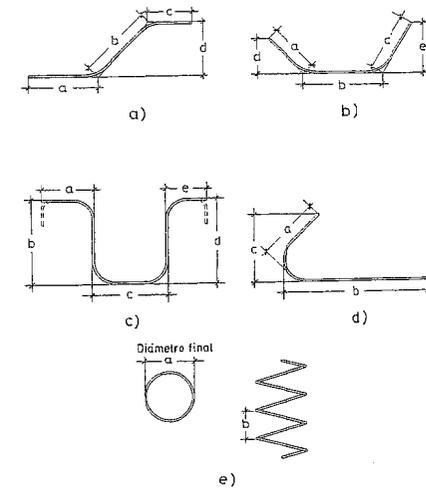


Figura 51-16

#### 51.16 FORMAS PREFERENCIALES DE ARMADO

En los últimos años se ha realizado un gran esfuerzo por racionalizar las formas de armado. También la Norma ISO 4066 contiene información sobre ello. La norma UNE 36831 contiene información sobre el tema que se explica en la figura 51-17.

La mayor parte de las estructuras de edificación pueden resolverse exclusivamente con las siete formas indicadas con asterisco.

FORMAS PREFERENTES DE ARMADO

CÓDIGO DE FORMA	FORMA	CLAVE (CÓDIGO - $\phi$ -a-b-c-d-e-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub> )
01		01- $\phi$ -a
02		02- $\phi$ -a-b-r <sub>1</sub>
03		03- $\phi$ -a-b-c-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub>
04		04- $\phi$ -a-b-c-r <sub>1</sub>
05		05- $\phi$ -a-b-c-r <sub>1</sub>
06		06- $\phi$ -a-b-c-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub>
07		07- $\phi$ -a-b-c-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub>
08		08- $\phi$ -a-b-c-d-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub>
09		09- $\phi$ -a-b-c-d-e-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub>
10		10- $\phi$ -a-b-c-d-e-f-g-r <sub>1</sub> -r <sub>2</sub> -r <sub>3</sub> -r <sub>4</sub>
11		11- $\phi$ -a-b
12		12- $\phi$ -a-b
13		13- $\phi$ -a-b-d
14		14- $\phi$ -a-b-c-d
15		15- $\phi$ -a-d
16		16- $\phi$ -d-n-p

(\*) LOS CÓDIGOS DE LAS CLAVES CORRESPONDEN AL TRATAMIENTO INFORMATIVO DE LOS DESPIECES.

Figura 51-17

51.17 MANUALES DE ARMADURAS

Existen varios manuales de este tipo, especialmente en Estados Unidos, Inglaterra, Holanda, Alemania y España. Véanse las referencias (51.7), (51.8), (51.9), (51.10) (51.11) y (51.12). Sobre industrialización de la ferralla, véase (51-13) y especialmente el "MANUAL DE FERRALLA" (51.14).

BIBLIOGRAFÍA

- (51.1) CALAVERA, J. "Manual de Detalles Constructivos en Obras de Hormigón Armado". Intemac. Madrid. 1993.
- (51.2) «SPACERS». Permanent Commission VII. C.E.B. Bulletin 201 (1991).
- (51.3) NORMA SISMORRESISTENTE P.D.S.-1 (1974). Parte A, Normativa. Separatas del "Boletín Oficial del Estado". Madrid. 1974.
- (51.4) "Building Code Requirements for Structural Concrete" ACI 318-95. American Concrete Institute. Detroit. 1989.
- (51.5) "Building and civil engineering drawings - Symbols for concrete reinforcement". ISO 3766-1977 (E).
- (51.6) "Building and civil engineering drawings - Bar scheduling". ISO 4066-1977 (E).
- (51.7) UNE 36831 "Armaduras pasivas para hormigón estructural -Corte, doblado y colocación de barras y mallas. Tolerancias. Formas preferentes de armado".
- (51.8) "CEB Manual on Concrete Reinforcement Technology". Georgi Publishing Company. Saint-Saphorin. 1983.
- (51.9) "Standard method of detailing reinforced concrete". The Concrete Society. The Institution of Structural Engineers. London. 1970.
- (51.10) WHITTLE, R. "Reinforcement Detailing Manual". A. Viewpoint Publication. London. 1981.
- (51.11) ACI DETAILING MANUAL - 1980. Publication SP-66. American Concrete Institute. Detroit. 1980.
- (51.12) C.U.R. Rapport 74. "Rationalisatie wapening". Oktober 1976. Holland.
- (51.13) C.E.B. Bulletin d'information n° 152 "Industrialization of Reinforcement in Reinforced Concrete Structures". Preliminary Edition. September 1983.
- (51.14) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; VALENCIANO, F. "Manual de Ferralla", coedición INTEMAC-ANIFER. 2ª Edición. Madrid 1999.
- (51.15) UNE 36831 "Armaduras pasivas para hormigón' corte, doblado y colocación de barras, alambres y mallas para estructuras de hormigón. Tolerancias. Formas recomendadas de armado". AENOR. Madrid.1996.

## CAPÍTULO 52

### FORJADOS UNIDIRECCIONALES <sup>1</sup>

#### 52.1 INTRODUCCIÓN

El proyecto de forjados de dimensiones habituales se rige por la Instrucción EF correspondiente.

La función esencial del forjado unidireccional es recibir las cargas verticales, transmitir las a las vigas, por éstas a los pilares y, por último, a la cimentación (fig.52-1).

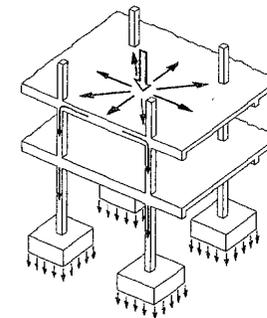


Figura 52-1

<sup>1</sup> Los temas de este capítulo pueden ampliarse en el libro "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación".

Sin embargo, además de ésta, el forjado cumple otras misiones también importantes, entre las que destacan:

- Dar rigidez transversal a las vigas.
- Incrementar su capacidad resistente a flexión y torsión.
- Solidarizar los entramados a nivel de cada planta.
- Funcionar como grandes vigas horizontales frente a acciones de viento y/o sismo (acción diagrama) (fig. 52-2).

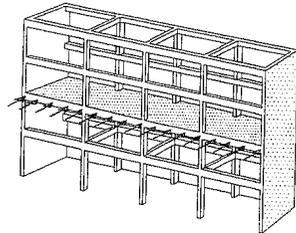


Figura 52-2

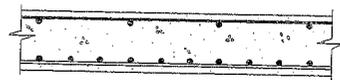
## 52.2 TIPOLOGÍA

Los forjados pueden, por su tipología, ser clasificados en dos grandes grupos:

- a) Forjados realizados íntegramente "in situ".
- b) Forjados total o parcialmente prefabricados.

a) Forjados "in situ"

El de uso más antiguo es la losa maciza de hormigón (fig. 52-3).



LOSA MACIZA

Figura 52-3

Su inconveniente fundamental es su elevado peso propio, que en especial en edificios de vivienda puede superar el 50% de la carga total. Tiene como ventajas fundamentales su sencillez de armado y la facilidad de encofrado. Actualmente, en países fuertemente desarrollados esta solución vuelve a ser usada con frecuencia, como consecuencia de la triple conjunción de empleo de procedimientos industrializados de encofrado y ferralla y del hormigonado con bomba. En edificios industriales con grandes sobrecargas su uso ha sido siempre frecuente.

Una evolución lógica del tipo anterior es el forjado nervado (fig. 52-4), en el que, mediante el uso de encofrados o de bovedillas de mortero o cerámica, se reduce el área de hormigón y se aligera el peso propio. Con esta modificación, la capacidad resistente a flexión del forjado es mucho mayor para momentos positivos que negativos.



LOSA ALIGERADA

Figura 52-4

b) Forjados total o parcialmente prefabricados

Entre los totalmente prefabricados, los más frecuentes son las piezas en

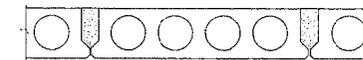
□, T y aligerados tubulares (fig. 52-5).



a)



b)



c)

Figura 52-5

El forjado indicado en la figura 52-5 c) está experimentando un gran auge en los últimos años en los países desarrollados, bajo la denominación de losas alveolares (Hollow-core).

Entre los parcialmente prefabricados, deben destacarse los de viguetas semi-resistentes, constituidos como piezas compuestas de una vigueta prefabricada y de una parte hormigonada "in situ", con la sección aligerada mediante bovedillas cerámicas o de mortero. Básicamente, las viguetas son de hormigón pretensado o de hormigón armado (fig. 52-6a) o piezas con una suela de hormigón y una celosía metálica que queda embebida en el hormigón "in situ" (fig. 52-6 b)).

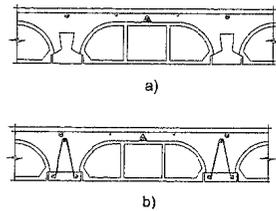


Figura 52-6

En los forjados de viguetas semi-resistentes, hasta el endurecimiento del hormigón "in situ", la pieza prefabricada debe resistir el peso propio del forjado más las eventuales sobrecargas de construcción. Ello exige, como norma general, la disposición de sopandas como apoyos provisionales. La secuencia de estados de funcionamiento se indica en la figura 52-7 para el caso de un edificio usual.

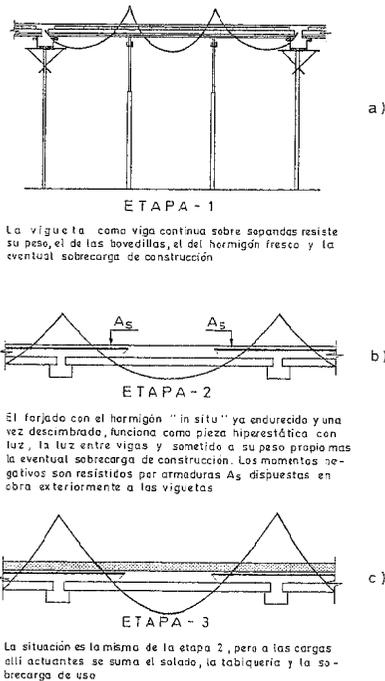


Figura 52-7

Desde un punto de vista general, el cálculo de forjados no plantea problemas nuevos y puede ser realizado, tanto por lo que se refiere al cálculo de esfuerzos como al dimensionamiento, de acuerdo con los métodos anteriormente explicados. Sin embargo, tanto el proceso constructivo como la forma particular de la sección plantean algunos problemas específicos que analizaremos a continuación.

## 52.3 FORJADOS DE LOSA MACIZA

### 52.3.1 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Pueden calcularse de acuerdo con los métodos explicados en el Capítulo 18, bien con los basados en el cálculo lineal, expuestos en 18.3, o bien con los basados en la redistribución plástica, expuestos en 18.4. Si las cargas permanentes son preponderantes, estos últimos son especialmente indicados. (Si se emplea el procedimiento de cimbrado de plantas consecutivas, véase 52.7).

### 52.3.2 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN

Todo lo dicho en el Capítulo 36 para sección rectangular es directamente aplicable.

De acuerdo con lo visto en 20.1, donde exista armadura de flexión longitudinal, bien sea de momentos positivos o negativos, debe disponerse una transversal que cubra un momento flector en esa dirección igual a  $\frac{1}{5}$  del momento flector

longitudinal. La armadura longitudinal se coloca normalmente en posición exterior a la transversal.

Recuérdese la necesidad de disponer las cuantías mínimas de retracción y temperatura previstas en el Capítulo 36 y que dichas cuantías pueden ser contadas simultáneamente para resistir los esfuerzos a flexión.

### 52.3.3 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE

Debe aplicarse lo expuesto para piezas sin armadura de corte en el Capítulo 39.

### 52.3.4 ANCLAJE

Resulta íntegramente aplicable todo lo expuesto en el Capítulo 44. En particular y por lo que se refiere al anclaje de las armaduras del forjado en las vigas, tenemos los casos siguientes:

#### a) Anclaje en viga de fachada

##### a-1) Armadura de momentos negativos

El anclaje se cuenta a partir del eje del apoyo (punto A), con una longitud

$$\ell = \ell_{b,net}$$

siendo  $\ell_{b,net}$  dado por [44.12] con  $k_{b2} = 1$ ,  $k_{b3} = 1$

$$\ell_{b,net} = \ell_b \cdot k_{b1}$$

( $\ell_b$  es la longitud correspondiente a Posición II de adherencia).

Llamando  $c$  al recubrimiento necesario, se tiene:

- Si  $\ell_{b,net} \leq \frac{b}{2} - c$ : Anclaje recto (Fig. 52-8a)). [52.1]

- Si  $0,7 \ell_{b,net} \leq \frac{b}{2} - c < \ell_{b,net}$ : Anclaje con patilla normalizada (Fig. 52-8b)). [52.2]

- Si  $0,7 \ell_{b,net} > \frac{b}{2} - c$ : Anclaje con prolongación vertical. (Fig. 52-8c)).

El radio  $r$  es el de doblado en el general, no el de patilla. La longitud  $\ell_1$ , de forma aproximada, vale:

$$\ell_1 = 0,7 \left( \ell_{b,net} - \frac{b}{2} + c \right) + 4\phi \quad [52.3]$$

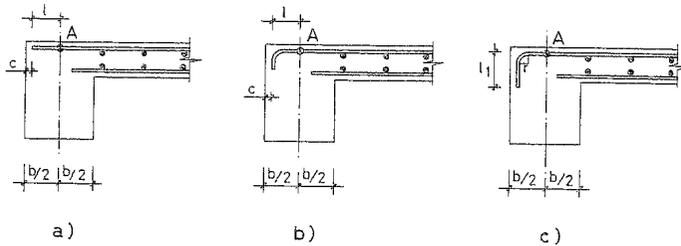


Figura 52-8

En el caso de empleo de mallas, véase el Capítulo 44. Para el valor  $\ell_{b,net}$  rigen los mínimos generales allí fijados.

a-2) Armadura de momentos positivos

La situación es un caso particular de 44.4.f). De acuerdo con lo expuesto en 18.4.3, despreciaremos la rigidez a torsión de la viga, lo que equivale, a efectos del anclaje de la armadura de vano, a suponer que el apoyo extremo es un simple apoyo (fig. 52-9).

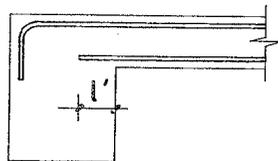


Figura 52-9

1 La expresión [52.3] se deriva directamente de [44.15].

El caso corresponde a la fórmula [44.17], de acuerdo con la cual el esfuerzo  $T_1$  a anclar es

$$T_1 = V_d \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \right] \quad [52.4]$$

donde  $\lambda = \frac{V_d - V_{cu}}{V_d} \leq 0$  [52.5]

Habitualmente,  $\lambda = 0$  y, por tanto,

$$T_1 = V_d$$

y de acuerdo con [44.20]

$$\ell' = \ell_{b,net} \cdot \frac{V_d \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right)}{A_s f_{yd}} \quad [52.6]$$

y si  $\lambda = 0$

$$\ell' = \ell_{b,net} \frac{V_d}{A_s f_{yd}} \quad 1,2 \quad [52.7]$$

Es aconsejable mantener para  $\ell'$  los valores mínimos

$$\ell' \geq 10 \phi$$

$$\ell' \geq 100 \text{ mm}$$

En el caso de emplear mallas, véase el Capítulo 44, para el valor de  $\ell_{b,net}$

b) Anclaje en vigas interiores o muros de hormigón

b-1) Armadura de momentos negativos

No existe anclaje por disponerse las armaduras pasantes (fig. 52-10).

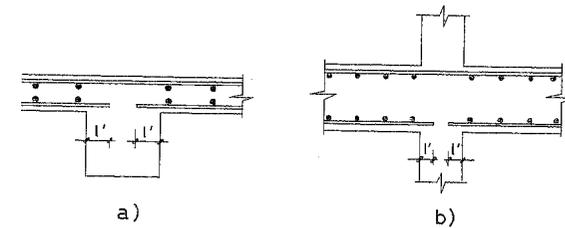


Figura 52-10

1 Recuérdese que  $A_s$  es el área realmente existente.

2 Si el anclaje se realiza en viga plana, véase el capítulo 59.

b-2) Armadura de momentos positivos

Estamos en un caso particular de 37.5.c). De acuerdo con la fórmula [44.24], siendo  $M_d$  el momento negativo en el apoyo, se tiene:

$$\ell' = \ell_b \cdot \frac{V_d - \frac{M_d}{0,9d}}{A_s f_{yd}} \quad [52.8]$$

Es recomendable que  $\ell'$  cumpla los mínimos

$$\ell' \geq 6 \phi$$

$$\ell' \geq 60 \text{ mm}$$

Las razones son múltiples, pues  $\ell'$  es en este caso usualmente negativa, pero una flecha excesiva de la viga de apoyo, un asiento de pilares, etc., pueden reducir mucho el valor  $M_d$ .

c) Anclaje en muro extremo de hormigón

c-1) Armadura de momentos negativos

El anclaje se realiza de acuerdo con lo previsto en a-1) (fig. 52-11 a)), si el muro continúa por encima del forjado considerado. Si el muro no continúa, la armadura del forjado debe solaparse con la del muro. Por supuesto, el muro puede tener, por razones varias, más armadura que la necesaria para cubrir el momento negativo (fig. 52-11 b)).

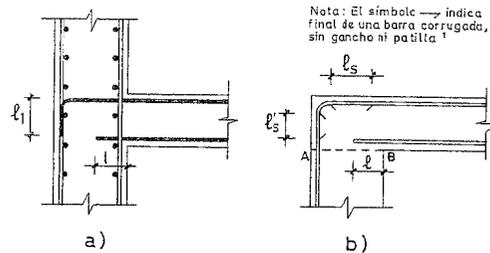


Figura 52-11

La longitud de solape es la correspondiente a Posición I de adherencia, si  $\ell_1$  permite su disposición por encima de la junta de hormigonado AB. Si la longitud  $\ell_2$  es tal que la armadura del forjado pasa por debajo de AB, es mejor disponer la longitud  $\ell_2$  correspondiente a Posición II, en horizontal. De otro modo, habría que colocar la armadura de momentos negativos del forjado antes de hormigonar el muro, lo cual complica la ejecución (fig. 52-11 b)).

<sup>1</sup> Este símbolo será empleado en adelante.

c-2) Armadura de momentos positivos

Como en este caso no se trata de un momento negativo procedente de una rigidez a torsión dudosa, sino del calculado de acuerdo con la rigidez a flexión del muro, el anclaje se calculará con las fórmulas del caso b), es decir, considerando el momento de continuidad.

52.3.5 FISURACIÓN

Las comprobaciones se realizan de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 47. Recuérdese que, al definir  $h_{ef}$  debe cumplirse  $h_{ef} \leq \frac{h-x}{2}$ , y en el cálculo de  $s_{m}$ , la separación  $s$  entre barras es la real, de acuerdo con lo allí expuesto.

52.3.6 DEFORMACIONES

El cálculo de flechas se realiza según lo expuesto en el Capítulo 48. Si se trata de un forjado de edificio y éste tiene tabiquería, debe comprobarse la limitación de la flecha activa, según allí se expuso.

El cálculo de flechas se hace normalmente con los momentos de servicio correspondientes al cálculo lineal, aunque el cálculo a flexión se haga con los métodos de readaptación plástica. Por supuesto, pueden calcularse las deformaciones con la distribución de momentos correspondiente a la readaptación plástica, pero ello conducirá a resultados conservadores.<sup>1</sup>

52.3.7 ESQUEMAS TÍPICOS DE ARMADO

Un esquema típico se indica en la figura 52-12. En las zonas centrales de los vanos normalmente no es necesaria la armadura por razones de flexión. Sin embargo, es siempre recomendable disponer un emparrillado por razones de retracción y temperatura. Su cuantía puede ser la mitad de la mínima especificada en el Capítulo 36.

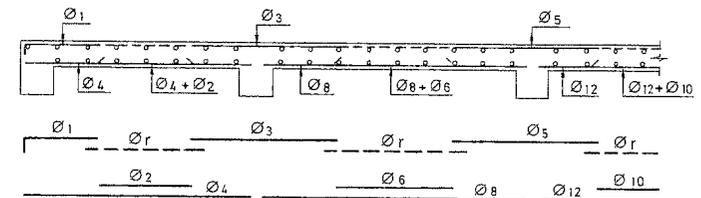


Figura 52-12

<sup>1</sup> Todas las experiencias realizadas indican que, aunque el forjado se arme para los momentos redistribuidos, en servicio su comportamiento es prácticamente el correspondiente al cálculo lineal.

La armadura de vano usualmente se organiza en dos series de distinta longitud para ahorrar acero. A veces, esto se hace también con la de momentos negativos.

El plano de forjados debe contener una planta general en la que figure la dirección de armado de los distintos forjados, como a título de ejemplo se indica en la figura 52-13.

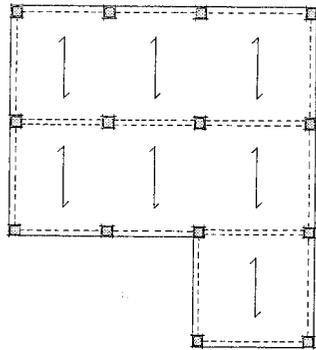


Figura 52-13

En dicho plano, se indicarán las secciones del tipo de la figura 52-12 necesarias para definir completamente los cantos y armaduras.

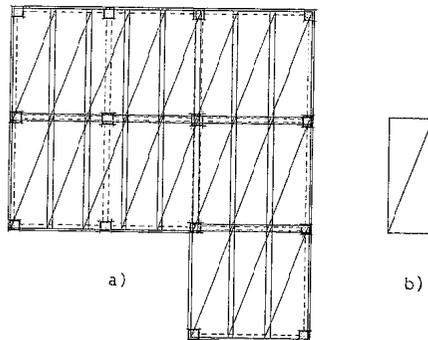
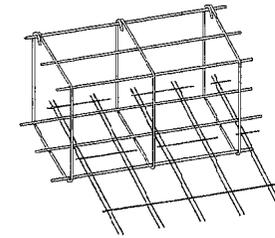


Figura 52-14

En el caso particular de empleo de mallas electrosoldadas, que constituyen una solución especialmente adecuada para este tipo de forjados, la representación se realiza de acuerdo con la figura 52-14a). Las dimensiones reales del panel son las de la figura 52-14b). En este caso es necesario dibujar dos planos de planta, uno para la armadura de la cara superior y otro para la armadura de la cara inferior. En el caso de empleo de mallas, el anclaje de las mallas de la capa inferior en las vigas exige cortar una barra transversal (fig. 52-15) para hacer posible la introducción.

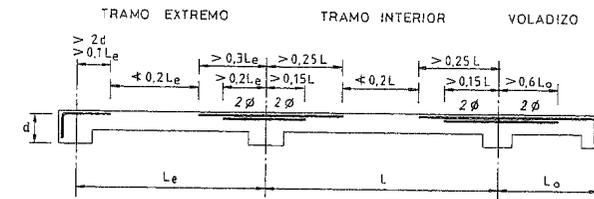


ESQUEMA DE CORTADO DE LA ARMADURA TRANSVERSAL DE LOS PANELES PARA SU CRUCE CON LA ARMADURA DE LA VIGA

Figura 52-15

### 52.3.8 ESQUEMA ESTÁNDAR DE ARMADO

Para el caso de forjados de sobrecarga de uso no superior a  $2 \text{ kN/m}^2$  ni a la tercera parte de la carga total, puede eliminarse la necesidad de dibujar los diagramas de momentos para determinar los puntos de corte de las armaduras, adoptando el esquema estándar indicado en la figura 52-16 <sup>1, 2</sup>



- Si la distancia entre extremos de barras en prolongación es inferior a  $0,2 L$ , los redondos se dispondrán continuos sobre el vano; además,
- Los redondos serán de igual longitud a ambos lados del apoyo.
- Si los redondos son de distinto diámetro, el de más longitud será el de mayor diámetro.
- Un tramo adyacente a un voladizo sólo puede considerarse interior si el mínimo momento flexionante en el empotramiento del voladizo supera al del tramo.
- Si el tramo adyacente a un voladizo no puede considerarse interior la armadura se dispondrá según b) y c).

Figura 52-16

### 52.3.9 REFUERZOS DE BORDE

Si el forjado tiene bordes libres, tales como los que ocurren en los voladizos, es conveniente siempre disponer armaduras en dichos bordes (fig. 52-17) que controlen la fisuración debida a los efectos de retracción y temperatura.

- El esquema indicado es, básicamente, debido al profesor J. LAHUERTA, de la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Navarra.
- Para el empotramiento en la viga de fachada parece preferible  $u = b + 0,15 l_v$ ; a  $u = b + 0,10 l_v$ .

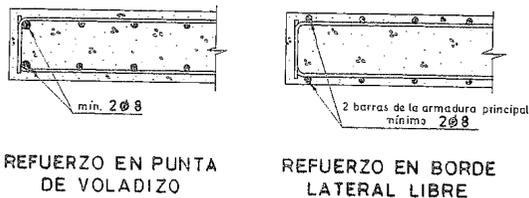


Figura 52-17

## 52.4 FORJADOS NERVADOS

Su tratamiento es idéntico al expuesto en 52.3, excepto en los puntos concretos que se citan a continuación.

### 52.4.1 SECCIÓN TRANSVERSAL

El perfil de la sección transversal deberá cumplir lo indicado en la figura 52-18<sup>1</sup>. Además, es recomendable que el ancho  $b$  de los nervios no sea inferior a 70 mm ni a la cuarta parte del canto total del forjado. En estos forjados deben estudiarse con especial cuidado los recubrimientos y colocación de armaduras.

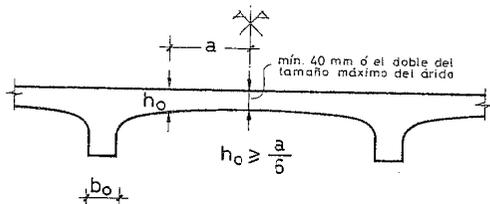


Figura 52-18

Se entiende que el espesor de la losa superior, teniendo en cuenta la armadura transversal que más adelante se indica, es suficiente para resistir la flexión transversal debida a las cargas actuantes. Esto deberá probarse, bien por un cálculo teórico o bien mediante ensayos.

### 52.4.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Dado que en este caso la capacidad resistente a flexión es mucho mayor a momentos positivos que a momentos negativos, resultan especialmente recomendables los métodos expuestos en 18.4. (Si se emplea el procedimiento de cimbrado de plantas consecutivas, véase 52.7.).

<sup>1</sup> Sería preferible un mínimo de 50 mm, dados los tamaños máximos usuales del árido y las inevitables desviaciones de construcción de la losa superior del forjado.

### 52.4.3 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN

Son aplicables los métodos del Capítulo 36, especialmente los referentes a la sección en T, incluso lo relativo al ancho eficaz de la cabeza de compresión.

Frecuentemente, el bloque comprimido en el estado límite último tiene una profundidad inferior al espesor mínimo de la losa superior y la sección puede ser calculada a momentos positivos y negativos como una sección rectangular de anchos  $b$  y  $b_p$ , respectivamente (fig. 52-19).

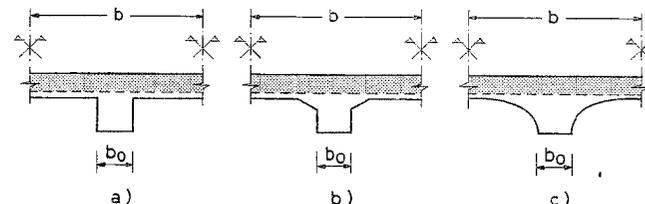


Figura 52-19

Sin embargo, en otros casos, la sección está más intensamente aprovechada a momentos positivos y el bloque comprimido afecta a una zona de definición geométrica más complicada (fig. 52-20).

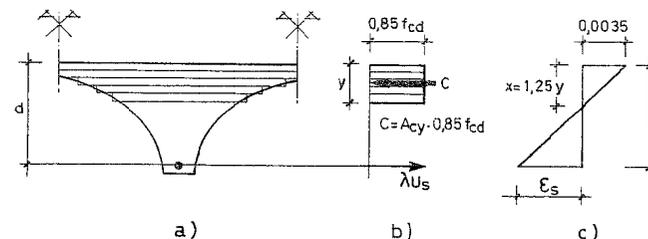


Figura 52-20

En ese caso, el procedimiento más práctico es el siguiente:

Se van eligiendo (fig. 52-20 a)), diferentes valores de  $y$ , variando por incrementos de centímetro en centímetro. De acuerdo con el método del diagrama rectangular, expuesto en 36.3, para cada valor de  $y$  se calcula el área comprimida  $A_{cy}$  y la profundidad  $x = 1,25y$  de la fibra neutra de deformaciones. Con la ecuación de compatibilidad se calcula  $\epsilon_s$  y  $\lambda$  de la Tabla T-36.1 y, con ello, la tensión  $\sigma_s$ , bien con  $\sigma_s = f_{yd}$ , si se trata de un acero con escalón de relajamiento, o por la expresión  $\sigma_s = \lambda f_{yd}$ , si el acero no tiene escalón de relajamiento. El c.d.g. del área  $A_{cy}$  se determina mediante la expresión

$$y_g = \frac{\sum_{i=1}^n b_{yi} y_i}{\sum_{i=1}^n b_{yi}} \quad [52.9]$$

donde  $b_{yi}$  es el ancho de la banda  $i$  e  $y_i$  la profundidad de su c.d.g. o sea de su centro.

El equilibrio de fuerzas conduce a

$$0,85 f_{cd} A_{cy} = A \lambda f_{yd} \quad [52.10]$$

y por tanto

$$U_s = \frac{0,85}{\lambda} A_{cy} f_{cd} \quad [52.11]$$

El equilibrio de momentos conduce a

$$M_d = \lambda U_s (d - y_g) \quad [52.12]$$

Con los pares de valores ( $U_s$ ,  $M_d$ ) obtenidos para cada profundidad  $y$ , se obtiene una curva como la indicada en la figura 52-21.

Normalmente, el punto final  $A$  corresponde al valor  $\epsilon_s = \epsilon_{s,lim}$ , tal como vimos en el Capítulo 36. Recuérdese la condición de cuantía mínima expuesta en dicho Capítulo.

El método expuesto es válido también para dimensionar o comprobar un caso aislado que requerirá, como máximo, tres tanteos de profundidad y de bloque comprimido, si no se tiene la curva, o el programa informático correspondiente.

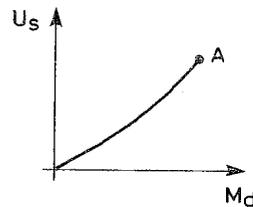


Figura 52-21

#### 52.4.4 ARMADURA DE LA LOSA SUPERIOR

Normalmente se establece con carácter obligatorio la disposición de una armadura en la losa superior, en sentido transversal a los nervios de área  $A_s$  en  $\text{cm}^2$  por metro de ancho de forjado.

$$A_s \geq \frac{500 e}{f_{yd}} \leq \frac{2.000}{f_{yd}} \quad [52.13]$$

donde  $e$  es el espesor mínimo de la losa en cm y  $f_{yd}$  el límite elástico de cálculo del acero. En sentido paralelo a los nervios debe disponerse un área mitad.

Los valores de  $A_s$  se indican en la Tabla T-52.1 para  $\gamma_s = 1,15$ .

TABLA T-52.1

Espesor $e$ en cm	Área $A_s$ en $\text{mm}^2/\text{m}$ con $\gamma_s = 1,15$	
	B-400	B-500
$\leq 4$	56	45
5	70	56
6	84	68
7	98	79
8	112	90
9	126	101
10	140	113

La importancia de esta armadura en la calidad del forjado es muy grande y en cambio su coste relativo muy escaso. Dicha armadura reduce la fisuración por contracción y temperatura, reparte las cargas puntuales, absorbe flexiones transversales imprevistas evitando la fisuración de los tendidos de yeso, solidariza las plantas frente a acciones horizontales, etc.<sup>1</sup>.

#### 52.4.5 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE

Para nervios de pequeño espesor y cantos moderados, se registra una hiperresistencia a corte, aún insuficientemente explicada. La fórmula prevista en EF-96 es la correspondiente a losas o la general de vigas, escogiéndose la que conduzca a un valor  $V_{cu}$  más alto. Si es necesaria armadura de corte, los nervios han de calcularse como vigas. En este caso, los estribos pueden adoptar las formas indicadas en la figura 52-22.

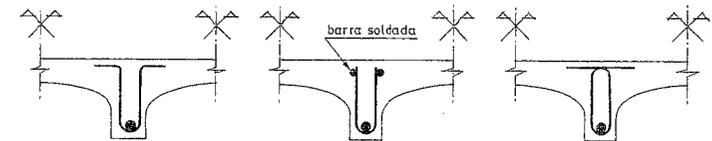


Figura 52-22

Los estribos deben atarse, en general, bien a la armadura de momentos negativos, si existe, o a la de la losa superior en otro caso.

En principio, debe comprobarse el esfuerzo cortante en las alas, de acuerdo con lo previsto en el Capítulo 39.

<sup>1</sup> Una solución práctica es la disposición de malla electrosoldada, que se fabrica con las cuantías requeridas en acero B 500 T.

#### 52.4.6 ANCLAJE

Se resuelve de manera idéntica a lo expuesto en 52.3.4.

#### 52.4.7 FISURACIÓN

Las comprobaciones se realizan de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 47.

#### 52.4.8 DEFORMACIONES

Vale íntegramente lo expuesto en 52.3.6.

#### 52.4.9 ESQUEMAS TÍPICOS DE ARMADO

En general, rige lo expuesto en 52.3.7, excepto que en este caso no es posible, naturalmente, el empleo de mallas como armadura de momentos positivos.

#### 52.4.10 ESQUEMA ESTÁNDAR DE ARMADO

Si se cumplen las condiciones fijadas en 52.3.8, el esquema allí indicado es también aplicable a los forjados nervados.

#### 52.4.11 REFUERZOS DE BORDE

En forma análoga a lo previsto en 52.3.9, también en este caso resultan necesarios. Su disposición se indica en la figura 52-23. En este caso el refuerzo en punta de voladizo es especialmente necesario para compatibilizar flechas en punta, permitir la fijación de barandillas, etc.

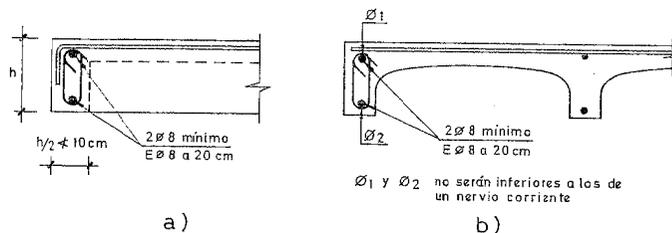


Figura 52-23

### 52.5 FORJADOS DE VIGUETAS SEMIRRESISTENTES

Como ya dijimos, son los constituidos por la asociación de una vigueta prefabricada con el hormigón vertido "in situ". Se fabrican como variantes de hormigón armado y de hormigón pretensado. En líneas generales son una derivación de los forjados nervados, pero presentan algunos aspectos particulares.

#### 52.5.1 SECCIÓN TRANSVERSAL

El perfil del hormigón "in situ" ha de cumplir las condiciones expuestas en 52.4.1, excepto en lo referente a la relación entre  $h_0$  y  $a$  que es  $h_0 \geq \frac{a}{8}$  en caso de emplear bovedillas resistentes.

Las bovedillas, sean aligerantes o resistentes, han de resistir una carga lineal, paralela a las viguetas y actuando en el centro de la bovedilla, de 1 kN por bovedilla.

#### 52.5.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Deben distinguirse dos etapas diferentes:

##### a) Esfuerzos durante el hormigonado

En esta fase, la vigueta prefabricada funciona como una viga continua, con luces las luces entre sopandas y carga la debida a su peso propio, bovedillas, hormigón fresco y eventual sobrecarga de construcción.

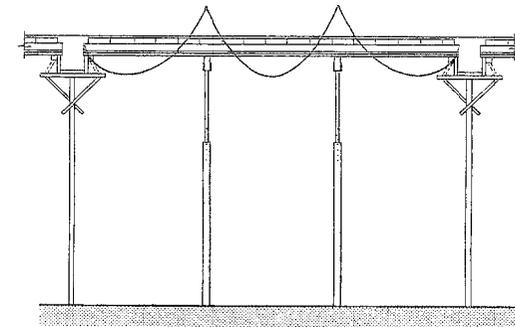


Figura 52-24

##### b) Esfuerzos una vez descimbrado el forjado

Son los debidos a su peso propio más las restantes cargas permanentes actuantes y las sobrecargas, trabajando ya el forjado como sección compuesta y con luces las luces entre vigas. (Si se emplea el procedimiento de cimbrado de plantas consecutivas, véase 52.7).

#### 52.5.3 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN

De nuevo son necesarios dos cálculos en dos etapas diferentes:

##### a) Cálculo en la etapa de construcción

Los esfuerzos calculados según 52.5.2.a) actúan sobre la vigueta aislada. El cálculo a momentos positivos no ofrece ningún carácter especial si la vigueta es de hormigón (fig. 52-25a)). Si la vigueta es de celosía, dada la incertidumbre del pandeo del cordón comprimido, el mejor camino es la determinación experimental del momento de agotamiento.

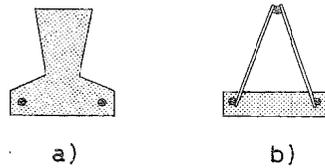


Figura 52-25

Para el cálculo a momentos negativos, si la vigüeta es del tipo de celosía indicado en la figura 52-25 a), usualmente no se dispone de armadura en la cara superior de la vigüeta, por lo que el cálculo suele hacerse como pieza de hormigón en masa, aceptando bajo el momento  $M_d$  una tensión de tracción por flexión

$$f_{ci, flex} = 0,37^3 \sqrt{f_{ck}} \quad [52.14]$$

La investigación experimental puede permitir elevar el valor [52.14].

En este caso, la vigüeta *debe ser siempre capaz* de resistir la carga de cálculo trabajando como simplemente apoyada entre sopandas, para evitar accidentes en obra.

b) *Cálculo una vez descimbrado el forjado*

El problema es idéntico al de los forjados nervados, tal como vimos en 52.4.3, por lo que se refiere a los momentos positivos.

En el cálculo a momentos negativos, puede ocurrir que el bloque afecte al hormigón prefabricado y al hormigón "in situ". Este caso fue estudiado ya en el Capítulo 49 de Piezas Compuestas.

#### 52.5.4 ARMADURA DE LA LOSA SUPERIOR

Rige íntegramente lo expuesto en 52.4.4.

#### 52.5.5 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE

La Instrucción EF-96 establece que para este tipo de forjados el cálculo a esfuerzo cortante se realice de acuerdo con la fórmula

$$V_d \leq V_u = 2 f_{cv} b_w d \quad [52.15]$$

Puede emplearse, previa justificación experimental, la fórmula

$$V_u = (1,6 - d) (1 + 50\rho) f_{cv} \cdot b_w \cdot d \quad [52.16]$$

con  $f_{cv} = 0,16 \sqrt{f_{cd}}$ , donde  $b_w$  es el ancho de la sección en el nivel de

comprobación y donde  $d$  se expresa en metros y  $\rho = \frac{A_s}{b_w d} \cdot \frac{f_{yk}}{400}$ .

El valor de  $(1 + 50\rho)$  no se tomará superior a 2.

La aplicabilidad de esta fórmula debería, en todo caso, ser contrastada por el fabricante del forjado mediante los correspondientes ensayos.

La comprobación en los diferentes niveles se realiza de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 49 para piezas compuestas.

En el caso particular de las viguetas de celosía (fig. 52.25 b)), el cálculo se realiza con las fórmulas correspondientes a vigas y teniendo en cuenta la armadura transversal, que suele ser sobrada a estos efectos.

#### 52.5.6 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO RASANTE

Es esencial en este tipo de piezas y se realiza aplicando directamente el método expuesto en el Capítulo 40.

#### 52.5.7 ANCLAJE

Se resuelve de manera idéntica a lo expuesto en 52.3.4, pero presenta algunos caracteres propios en lo que se refiere al anclaje de la armadura de momentos positivos. En la figura 52-26 a), se indica la modalidad más frecuente, que es la de introducción de la vigüeta en la viga la longitud especificada en 52.3.4. La vigüeta, en este caso, no necesita llevar armaduras salientes. La figura 52-26 b) indica otra modalidad, en la que la vigüeta no entra en la viga, pero sí lo hace la armadura saliente de la vigüeta.

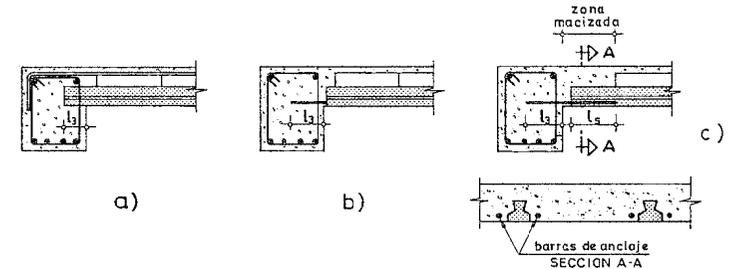


Figura 52-26

Finalmente, la solución indicada en la figura 52-26 c) es la adecuada si la vigüeta no lleva armaduras salientes y tampoco entra en la viga, bien porque se haya proyectado así o porque la vigüeta haya llegado corta a obra. La solución consiste en disponer barras suplementarias de anclaje, alojadas en una zona macizada, para lo que se suprimen en ella las bovedillas. Las barras deben ser del mismo o mayor diámetro que las de la vigüeta y, por un lado, se solapan con éstas y, por el otro, anclan en la viga.

### 52.5.8 FISURACIÓN

Se comprueba de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 47.

### 52.5.9 DEFORMACIONES

Como norma general, son necesarias dos comprobaciones:

#### a) Etapa de hormigonado

Debe comprobarse que la vigueta, apoyada en las sopandas, no toma flecha excesiva. Se sugiere el quinientosavo de la luz entre sopandas. La flecha a calcular es a un día de edad (por lo tanto, prácticamente la instantánea), pues a partir de ese momento comienza a existir la rigidez de la sección compuesta.

#### b) Etapa una vez descimbrado el forjado

La comprobación es la habitual con el momento de inercia correspondiente a la sección compuesta.

### 52.5.10 ESQUEMAS TÍPICOS DE ARMADO

Las viguetas usualmente llevan armadura constante a lo largo de la luz, y sólo si el número de barras o alambres es superior a dos se suele cortar alguno. Para la armadura de negativos, rige lo expuesto en 52.3.7.

### 52.5.11 ESQUEMA ESTÁNDAR DE ARMADO

Si se cumplen las condiciones fijadas en 52.3.8, el esquema allí indicado es también aplicable.

### 52.5.12 REFUERZOS DE BORDE

En forma análoga a lo previsto en 52.4.11, también en este caso resultan necesarios y por los mismos motivos. Su disposición se indica en la figura 52-27.

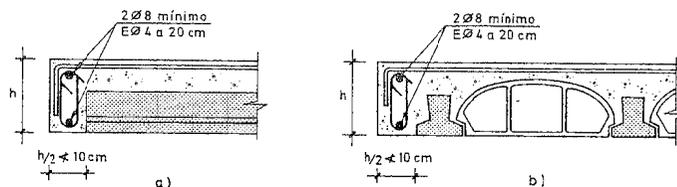


Figura 52-27

En ambos casos la armadura situada en la losa superior debe descender por el frente del borde.

### 52.6 AUTORIZACIÓN DE USO

Los forjados parcial o totalmente prefabricados deben poseer una Autorización de Uso, concedida por el Ministerio de Fomento.

### 52.7 ESFUERZOS DURANTE LA CONSTRUCCIÓN

Sea cualquiera el tipo de forjado, si en su construcción se emplea el sistema de cimbrado de plantas consecutivas, los esfuerzos durante la construcción pueden ser más desfavorables que los del servicio normal calculados de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 18.

El tema está expuesto en forma completa en el libro citado como referencia (52.1). Se resumen a continuación los puntos esenciales:

- a) Si se emplea el sistema de cimbrado de plantas consecutivas con  $n$  plantas cimbradas, el forjado durante la etapa de construcción se ve sometido a una carga  $k_n \cdot q$ , donde  $q$  es la suma de los pesos propios del forjado más sopandas y puntales y la eventual sobrecarga de construcción. Los valores de  $k_n$  son:

$n = n^\circ$ de plantas cimbradas	Valor de $k_n$
2	2,25
3	2,36
4	2,44

Como puede verse, aumentar el número de plantas cimbradas no mejora el problema.

- b) Si  $k_n \cdot q$  excede apreciablemente la carga característica total del forjado, prevista para su uso normal, lo anterior condiciona el cálculo.
- c) Entre las alternativas para solucionar este problema, una es la de utilizar la técnica de "recimbrado". Ver (52.1).

Un documento reciente sobre forjados es el de la FIB. (52.5).

### BIBLIOGRAFÍA

- (52.1) CALAVERA, J. "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación". 2ª Edición. INEMAC. Madrid. 1981.
- (52.2) LOZANO, G. "Forjados y Losas de Piso". 2 Tomos. Ediciones G.L.A. Oviedo. 1977.
- (52.3) CALAVERA, J. "Situaciones críticas en el proceso de cimbrado de plantas consecutivas de estructuras de edificación". I Congreso de Patología en la Edificación. Colegio Oficial de Arquitectos de Cataluña. Barcelona. 1985.
- (52.4) DEL CUVILLO, R.; ARENAS DE PABLO, J.J.; RIPOLL, J.B. "Forjados". Agrupación de Fabricantes de Cemento. Monografía n° 13.
- (52.5) FIB (CEB-FIP). "Composite floor structures". May 1998.

## CAPÍTULO 53

### PIEZAS PRETENSADAS HIPERESTÁTICAS

#### 53.1 PIEZAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN PRETENSADO

Hasta ahora hemos expuesto y estudiado con profusión las estructuras hiperestáticas de hormigón armado. Sin embargo, en el caso del hormigón pretensado nos hemos referido solamente, hasta ahora, a piezas isostáticas.

La razón, es que en las estructuras de hormigón armado el hiperestatismo prácticamente solo presenta ventajas. No es así en el caso del hormigón pretensado, como expondremos a continuación, ya que junto a las ventajas aparecen inconvenientes no desdeñables.

##### **Ventajas del hiperestatismo en el hormigón pretensado**

- Reducción de momentos flectores.
- Reducción de flechas.
- Posibilidades de redistribución en el cálculo.
- Mayor capacidad resistente frente a acciones imprevistas, debidas a las posibilidades de redistribución.
- Mayor rigidez frente a acciones laterales.
- Ahorro de anclajes.
- Reducción del número de tesados.
- Empleo de un mismo tendón para resistir momentos negativos y positivos.

### Inconvenientes del hiperestatismo en el hormigón pretensado

- Dificultades de colocación de los tendones con cambio de curvatura.
- Dificultades de inyección de los mismos.
- Incremento importante de las pérdidas por rozamiento.
- Mayor dificultad para la cobertura de momentos de signo contrario que en el caso del hormigón armado.

Sin embargo, en muchos casos el balance de las ventajas e inconvenientes apuntados, se inclina a favor de las soluciones hiperestáticas.

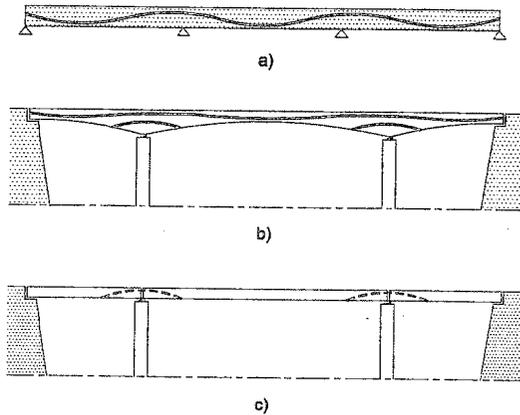


Figura 53-1

En la figura 53-1 se indican tres casos de empleo frecuente: El a) es de una viga continua con armaduras postesas. El b) un puente hiperestático de canto variable. La solución c) corresponde a un puente con piezas prefabricadas con armaduras postesas, en las que se establece la continuidad mediante armaduras postesas tesadas "in situ".

#### 53.1.1 MOMENTOS HIPERESTÁTICOS

Considerando de nuevo la viga continua de la figura 53-1, como un ejemplo genérico, supongamos tal como se indica en la figura 53-2 a), que sin actuar las acciones exteriores aplicamos la fuerza de pretensado. (Fig. 53-2 b)).

Los apoyos son en A, articulación y en los apoyos restantes éstos pueden experimentar corrimientos en la dirección de la directriz de la pieza, pero no en la dirección perpendicular. La aplicación de la fuerza de pretensado crea reacciones hiperestáticas en los apoyos interiores B y C de valores  $Y_1, Y_2$ . En la práctica, el sistema funciona como una viga de luz AD sometida a las acciones  $Y_1, Y_2$  de los apoyos sobre la pieza (Fig. 53-2 c)), las cuales engendrarán una ley lineal de momentos como la indicada en la fig. 53-2 d).

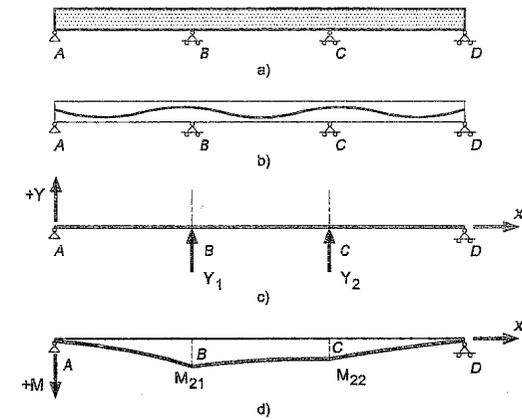


Figura 53-2

#### 53.1.2 LÍNEA DE PRESIONES

En una pieza pretensada isostática, tal como la indicada en la figura 53-3, la ley de presiones en cada sección referida al sistema de ejes  $ox$  y indicados, viene definida, en ausencia



Figura 53-3

de acciones exteriores (línea de presiones para carga nula) por la función

$$y = e_h(x) \quad [53.1]$$

donde  $e_h(x)$  es la excentricidad de la fuerza  $P$  de pretensado en la sección de abscisa  $x$ , correspondiente a la sección homogeneizada. (Véanse los Capítulos 29 y 31) referida a su c.d.g. El momento actuante en una sección será:

$$M_1(x) = P e_h(x) \quad [53.2]$$

Si la pieza isostática está sometida a unas acciones exteriores, éstas crearán en cada sección un momento flector

$$M = M_2(x) \quad [53.3]$$

En cada sección de la pieza, actúa por tanto la componente de la fuerza de pretensado paralela a su directriz,  $P(x)$  y el momento  $M_2(x)$ . El conjunto de ambas sollicitaciones puede ser reducido a una única fuerza,  $P(x)$ , actuante con una excentricidad

$$e_r(x) = e_h(x) + \frac{M_2(x)}{P(x)} \quad [53.4]$$

La línea de ecuación

$$y = e_r(x) \quad [53.5]$$

se define como línea de presiones para el sistema de fuerzas de pretensado y acciones exteriores aplicado.

La expresión del momento [53.3] en cada sección se transforma ahora en

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) = P(x)e_h(x) + M_2(x) \quad [53.6]$$

Sin embargo lo anterior no es cierto para una pieza hiperestática. Consideremos de nuevo la viga continua de la figura 53-4. Si actúa solamente el efecto del pretensado, es decir sin aplicar las acciones exteriores, como aparecen las reacciones  $Y_i$ , éstas generan una ley de momentos secundarios.

$$M(x) = M_s(x) \quad [53.7]$$

La palabra **secundario** se emplea aquí en el sentido de que son consecutivos a la aparición de la fuerza de pretensado y en absoluto en el sentido de que su valor sea despreciable pues como veremos pueden ser muy importantes<sup>1</sup>.

La expresión del momento [53.6] se transforma ahora en

$$M(x) = P(x)e_h(x) + M_2(x) + M_s(x) \quad [53.8]$$

Si se calcula directamente la expresión de  $M_s(x)$ , entonces se obtiene

$$M_s(x) = M(x) - P(x)e_h(x) - M_2(x) \quad [53.9]$$

Obsérvese que si actúa sólo el pretensado, es decir, no hay acciones exteriores aplicadas, la ley de momentos es

$$M(x) = P(x)e_h(x) + M_s(x) \quad [53.10]$$

siendo entonces

$$e_r(x) = \frac{M(x)}{P(x)} = e_h(x) + \frac{M_s(x)}{P(x)} \quad [53.11]$$

<sup>1</sup> Se designan también a veces como momentos parásitos y momentos hiperestáticos. Esta última expresión se presta a confusiones.

y esta ecuación, que es la de la línea de presiones de la pieza hiperestática para carga nula, indica que ésta no coincide con la línea del tendón resultante del pretensado. (Cuando la línea de presiones coincide con la del tendón resultante, el tendón se denomina **concordante**).

Si además actúan las acciones exteriores

$$e_r = e_h(x) + \frac{M_s(x) + M_1(x)}{P(x)} \quad [53.12]$$

El conjunto de reacciones secundarias, al no ser debidas a acciones exteriores, han de estar en equilibrio. La variación entre cada dos apoyos consecutivos, de la ley de momentos secundarios es lineal.

### 53.1.3 CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS TOTALES

Consideremos, como un ejemplo útil para la explicación del método general, el caso indicado en la figura 53-4, de una viga continua de dos vanos de igual luz (fig. 53-4 a)).

Supongamos que la pieza se pretensa con un tendón recto con excentricidad  $-e_h$ . La ley de momentos  $M_1(x)$  tiene el valor  $M_1(x) = -Pe_h$  con valor constante (Fig. 53.4 b)).

Naturalmente la acción del pretensado al impedir la contraflecha creará una reacción secundaria  $Y_B$ . La flecha de la viga AC de luz  $2l$ , sometida a la carga  $Y_B$  es

$$f_{Y_B} = \frac{Y_B(2l)^3}{48EI}$$

siendo  $E$  el módulo de deformación del hormigón e  $I$  el momento de inercia de la sección.

La contraflecha coartada de la viga de luz  $2l$  (véase el capítulo 48) es

$$f_c = \frac{Pe_h(2l)^2}{8EI}$$

y como

$$f_{Y_B} + f_c = 0$$

$$Y_B = \frac{3Pe_h}{1}$$

(Como  $e_h$  es negativa,  $Y_B$  resulta naturalmente de signo contrario al indicado en la figura 53-4 c)).

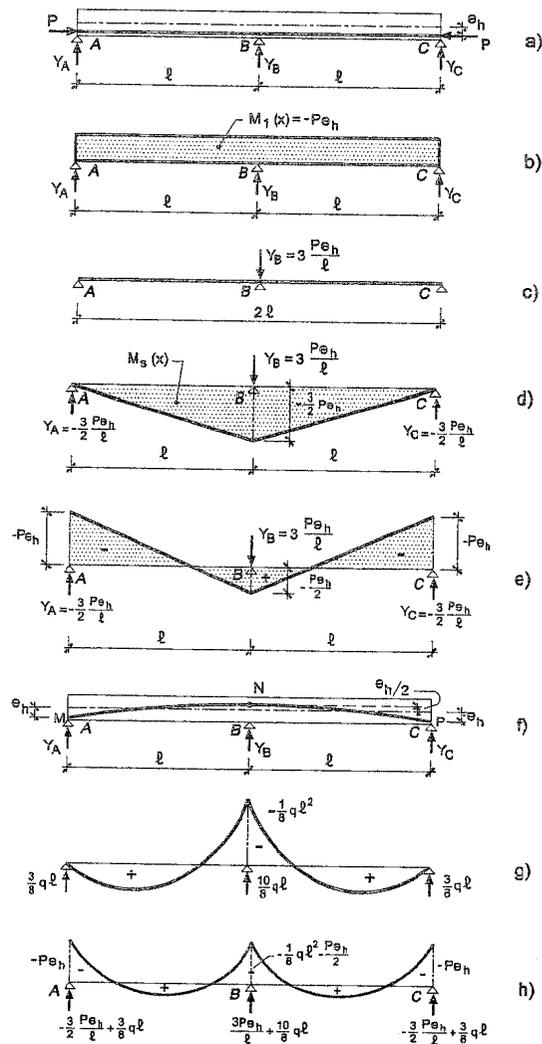


Figura 53-4

La ley de momentos

$$M(x) = M_s(x)$$

es la indicada en la figura 53-4 d).

En ausencia de acciones exteriores

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x)$$

que se indica en la fig. 53-4 e).

La excentricidad de la línea de presiones resultante es  $-e_h$  en los extremos, pero resulta  $\frac{e_h}{2}$  en el apoyo B con lo que resulta la línea  $MNP$  (Fig. 53-4 f)), muy distinta de la  $ABC$  de la figura 53-4 a).

Si aplicamos ahora las acciones exteriores (incluido por supuesto el peso propio de la viga), por ejemplo de valor  $q$  por unidad de longitud, el diagrama de momentos y las reacciones se indican en la figura 53-4 g).

El estado final de la pieza se indica en la figura 53-4 h).

#### 53.1.4 TRANSFORMACIONES LINEALES DE LA LÍNEA DE PRESIONES EN PIEZAS HIPERESTÁTICAS. TEOREMA DE GUYON

Suponiendo de nuevo a título de ejemplo, una viga continua, en cuyos apoyos interiores el pretensado produce unos momentos secundarios  $M_B, M_C, \dots$ , el momento total debido al pretensado, si es  $P$  la fuerza de pretensado y  $e_B, e_C, \dots$  la excentricidad del tendón resultante en los apoyos B, C... será  $P e_B + M_B, P e_C + M_C, \dots$ , o lo que es lo mismo  $P \left( e_B + \frac{M_B}{P} \right), P \left( e_C + \frac{M_C}{P} \right), \dots$

Por lo tanto, el resultado del pretensado es el mismo que si aplicara a la fuerza  $P$  con excentricidades  $e_B + \frac{M_B}{P}, e_C + \frac{M_C}{P}$  etc.. Es decir que el efecto de los momentos secundarios es desplazar la línea de presiones en la longitud  $\frac{M_B}{P}$  en el apoyo B, en la longitud  $\frac{M_C}{P}$  en el apoyo C, etc..

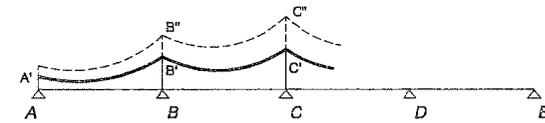


Figura 53-5

En la figura 53-5,  $A'B'C'$  es la línea del tendón resultante. Si en los apoyos que presentan momentos secundarios alteramos linealmente (proporcionalmente) los valores  $BB', CC', \dots$  es decir si  $\frac{B''B}{B'B} = \frac{C''C}{C'C} = \dots$  la línea de presiones, sigue siendo la misma.

Es decir, la línea de presiones no se modifica por tanto si se aplica una transformación lineal a la línea del tendón resultante. (Véase (53.1)).

#### 53.1.5 CARGAS EQUIVALENTES

Tal como ya apuntamos en la acción del tendón de pretensado sobre la pieza, ésta puede ser considerada como una carga y por tanto reemplazada por esa carga equivalente.

Las cargas equivalentes pueden ser puntuales, repartidas, transversales al tendón, etc..

La tabla de la figura 53-6 contiene resueltos los casos más corrientes de relación entre la forma del tendón y la carga equivalente.

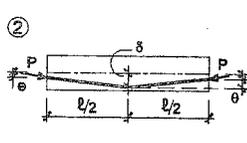
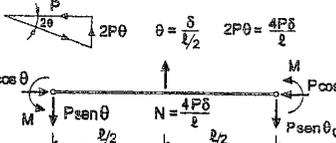
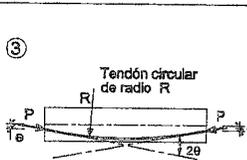
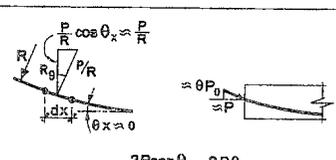
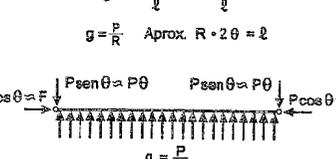
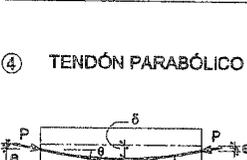
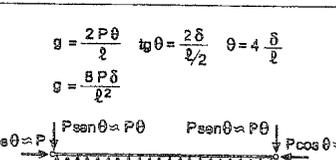
TRAZADO DEL TENDÓN	CARGA EQUIVALENTE
	 $M = P \cdot e$
	 $\theta = \frac{\delta}{l/2} \quad 2P\theta = \frac{4P\delta}{l}$
	 $g = \frac{2P\theta}{l} \approx \frac{2P\theta}{l}$ $g = \frac{P}{R} \quad \text{Aprox. } R \cdot 2\theta = l$
	 $g = \frac{2P\theta}{l} \quad \text{tg } \theta = \frac{2\delta}{l/2} \quad \theta = 4 \frac{\delta}{l}$ $g = \frac{8P\delta}{l^2}$
	 $P \cos \theta \approx P \quad g = \frac{P \sin \theta}{l_1}$ $g = \frac{P\theta}{l_1} \quad \text{tg } \theta = \theta = \frac{2\delta}{l_1}$ $g = \frac{2P\delta}{l_1^2}$

Figura 53-6

Nótese que aun siendo constante la fuerza en el tendón (frecuentemente se hace abstracción en este método de las diferencias de tensión debidas a las pérdidas) la carga equivalente puede ser diferente de unas zonas a otras si en ellas son diferentes las curvaturas (Fig. 53-7).

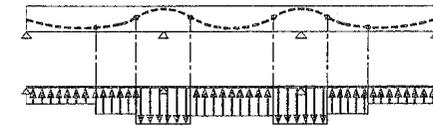


Figura 53-7

### 53.1.6 MÉTODO DEL EQUILIBRIO DE CARGAS

Con base en el concepto de carga equivalente T.Y. LIN desarrolla un método muy intuitivo y útil, generalmente conocido como el método del equilibrio de cargas (53.2).

Aunque expondremos su aplicación a estructuras más complejas en el Capítulo 55, elijamos ahora para centrar las ideas el caso de una viga simplemente apoyada. (Fig. 53-8)

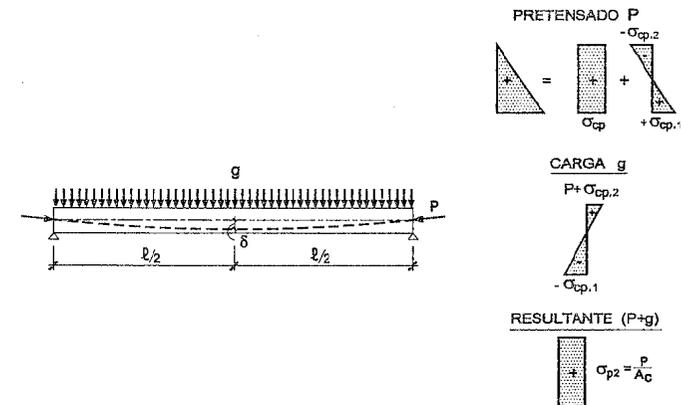


Figura 53-8

sometida exclusivamente a una carga permanente  $g$ . En ese caso, de acuerdo con el caso ④ de la figura 53-6 la carga equivalente equilibrante es

$$w = \frac{8P\delta}{l^2}$$

de donde haciendo  $w = g$  y adoptando  $\delta$  de acuerdo con el canto que se desee para la pieza

$$P = \frac{gl^2}{8\delta}$$

En los extremos de la pieza adoptamos  $e = 0$  y con ello se tienen los estados indicados en la figura 53-8, es decir, el estado final de la pieza es de compresión uniforme. No toma por tanto flechas ni contraflechas y si se tratara de una pieza hiperestática no aparecerían momentos secundarios.

En la práctica, una compensación tan completa casi nunca es posible.

Consideremos de nuevo la pieza de la figura 53-8 pero supongamos que actúa una sobrecarga  $q$  de carácter variable entre 0 y  $q$ , además de la carga permanente  $g$ .

Las soluciones en este caso (Fig. 53-9) pueden ser múltiples.

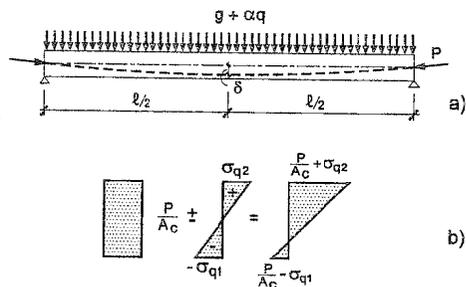


Figura 53-9

Una sería, por ejemplo, introducir un pretensado que equilibrase la carga permanente y no compensar la sobrecarga, lo cual sería admisible si  $P/A_c + \sigma_{q2}$  y  $P/A_c - \sigma_{q1}$  son admisibles. Con esta solución la pieza no tendría flechas, contraflechas ni momentos secundarios bajo peso propio, pero sí al actuar las sobrecargas.

Existen muchas soluciones, tales como introducir un pretensado que produzca una carga equivalente que en el límite agote la máxima tracción en fibra superior, equilibrando parte de las sobrecargas y que bajo la totalidad de éstas no se rebase la máxima tracción en fibra inferior. Esta solución no elimina las flechas, contraflechas ni momentos parásitos pero los reduce considerablemente.

Debe destacarse que si se procede, bien a un tesado progresivo de los diferentes tendones, bien a un retesado de los mismos, con este método puede compensarse la totalidad de la carga permanente y no sólo el peso propio.

#### BIBLIOGRAFÍA

- (53.1) GUYON, Y. "Constructions en béton précontraint. Classes - états limites". Tomo 1 Étude de la section. Éditions Eyrolles. París, 1966.
- (53.2) LIN, T.Y. "Load balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures". Journal of the American Concrete Structures. Junio 1963.

## CAPÍTULO 54

### FORJADOS SIN VIGAS. SOLUCIONES EN HORMIGÓN ARMADO

#### 54.1 INTRODUCCIÓN

Este sistema estructural fue ya tratado en el capítulo 19, donde se expusieron no solamente los métodos para el cálculo de esfuerzos, sino también múltiples requisitos de índole general y en particular los dimensionales, establecidos por la Instrucción EHE, así como requisitos complementarios impuestos por ACI-318-95.

Coexisten en uso tres variantes de este sistema:

- Los forjados de placa maciza.
- Los forjados de placa aligerada con bovedillas, generalmente sin función resistente.
- Los forjados de placa aligerada con moldes recuperables, de plástico, acero, etc.

A continuación se exponen los métodos de dimensionamiento para todos ellos.

#### 54.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Los métodos se expusieron en el capítulo 19, tanto para el método simplificado (19.4.1) como para el método general de los pórticos virtuales (19.4.2).

Si se emplea el procedimiento de cimbrado de plantas consecutivas, de nuevo en este caso los esfuerzos durante la construcción pueden superar a los previstos en el servicio normal. Véase 52.7.

### 54.3 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN

Con los momentos flectores calculados, según sea el caso, por uno de los métodos expuestos en 19.4.1 ó 19.4.2 el dimensionamiento de armaduras es inmediato y según se trate de placa maciza o aligerada se emplearán los métodos expuestos en 52.3 ó 52.4, respectivamente.

Téngase en cuenta que en este caso, al existir armadura en dos direcciones ortogonales, éstas deben disponerse forzosamente en dos niveles, con lo que varían los cantos útiles en cada dirección. El mayor debe reservarse para la luz mayor del recuadro.

Aparte de lo anterior, los forjados sin vigas tienen algunos requisitos especiales de armado que se exponen a continuación:

- La separación entre ejes de nervios no superará los 1000 mm y el espesor de la losa superior será como mínimo de 50 mm y deberá disponerse armadura de reparto en malla.
- En el caso de placas macizas, la separación entre armaduras en cada dirección no será superior al doble del canto total de la placa ni a 250 mm.
- El diámetro de las armaduras en mm no superará el canto de la placa en cm<sup>1</sup>
- La armadura en la dirección menos solicitada (tanto en cara superior como inferior) será como mínimo el 25 % de la análoga en la dirección más solicitada.
- En las *bandas centrales* la armadura se distribuirá uniformemente en su ancho, tanto para momentos positivos como negativos.
- En las *bandas de pilares*, la armadura de momentos positivos se distribuirá también uniformemente.

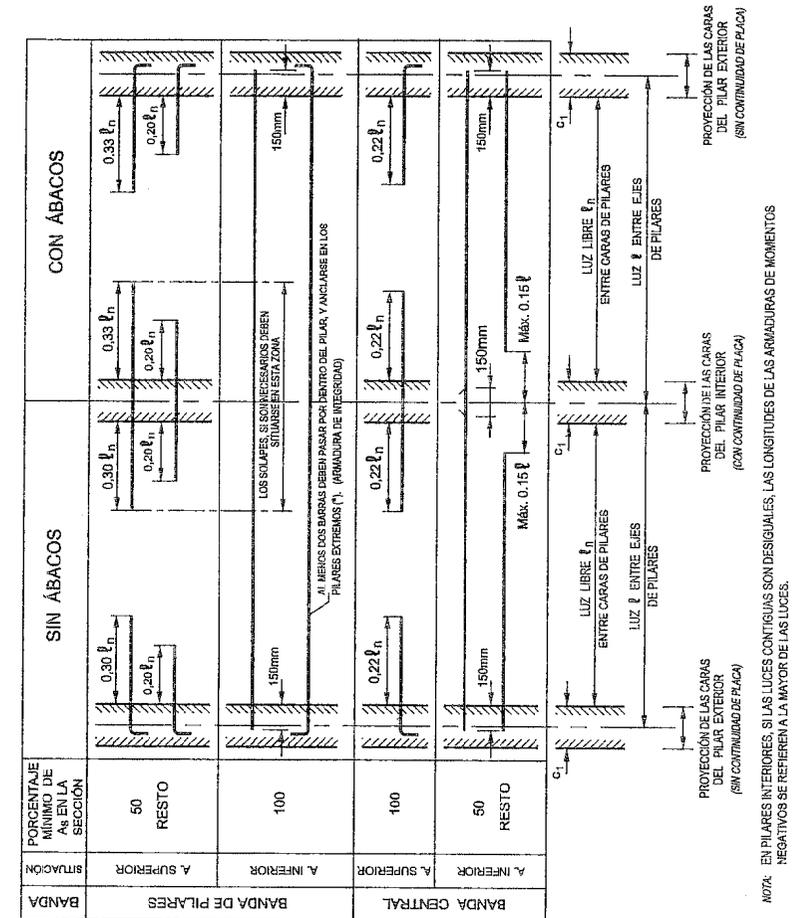
La de *momentos negativos* se distribuye de la siguiente forma:

- La correspondiente al momento  $M'_d = \lambda M_d$ , (Ver 19.4.6.) transmitido por flexión a los pilares, se distribuirá en una banda centrada con la línea de pilares y de ancho igual al del pilar (o capitel si existe) más  $1,5 h$  a cada lado, siendo  $h$  el canto total de la placa.  $M_d$  es el momento negativo transmitido por la placa al pilar. (Pilar superior y pilar inferior).
  - La armadura correspondiente al momento diferencia  $M''_d = (1 - \lambda) M_d$ , que es transmitido al pilar por tensiones tangenciales, se reparte uniformemente en el resto del ancho de la banda de pilares.
- Si se emplean ábacos para reducir la armadura de momentos negativos, en cualquier sección del ábaco no se supondrá en el cálculo un canto mayor que el de la placa más un cuarto de la distancia desde el borde del ábaco al del pilar o capitel. Esto no rige para los forjados aligerados con ábacos embebidos en el canto de la placa<sup>2</sup>.

1 Es una recomendación de carácter personal para controlar la fisuración de la placa.

2 Recuérdese que, de acuerdo con 19.3, el ábaco es obligatorio en placas aligeradas.

- En el caso particular de las placas aligeradas, si no llevan vigas de borde se dispondrán en todos los bordes libres, incluso en los de voladizos, nervios especiales de borde con un ancho no menor que el canto  $d$ , que llevarán estribos a separación no superior a la mitad del canto. (Atención al cierre con solape adecuado de los estribos.) (Véase el Capítulo 42).
- Si los esfuerzos se han calculado por el método simplificado (20.4.1), el despiece de armaduras se hará de acuerdo con la figura 54-1. Si el cálculo de esfuerzos se ha hecho con el método general (19.4.2), el despiece se hará de acuerdo con los procedimientos generales expuestos en los capítulos anteriores, pero en todo caso se respetarán los mínimos indicados en la figura 54-1.



PUNTOS DE CORTE Y DOBLADO DE LA ARMADURA

Figura 54-1

- j) Deben mantenerse las cuantías mínimas reglamentarias. En la zona de la cara superior que no necesita armadura de flexión, se debe disponer un emparrillado de armaduras por los motivos y en la cantidad que se indicaron en 52.4.4 para la dirección transversal a los nervios.
- k) En este tipo de forjados deben cuidarse especialmente los aspectos relacionados con recubrimientos y separación de barras, con el fin de permitir un correcto hormigonado de los nervios.

#### 54.4 DIMENSIONAMIENTO A PUNZONAMIENTO

A este tema se dedicó íntegra y específicamente el capítulo 41. Para los casos en que el punzonamiento exija armadura transversal, en el citado capítulo se indicaron las disposiciones adecuadas.

#### 54.5 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE

Aunque habitualmente es más severa la comprobación a punzonamiento, en algunos casos, como vimos en 19.4.1.d, puede ser necesaria la comprobación a cortante junto a vigas de borde.

En el caso de placas aligeradas, una sección que siempre debe comprobarse es la situada a medio canto de la cara del ábaco. El esfuerzo cortante correspondiente a cada nervio puede, como simplificación, calcularse a partir del valor [19.18], obtenido en el capítulo 19 para el esfuerzo axil en el pilar, tenidos en cuenta los esfuerzos hiperestáticos, dividiéndolo por el número de nervios que arrancan del ábaco y realizando el dimensionamiento a esfuerzo cortante de acuerdo con el Capítulo 39.

#### 54.6 DIMENSIONAMIENTO A TORSIÓN

Los momentos torsores expuestos en 19.4.6 y dados por las fórmulas [20.26] y [20.27] deben ser comprobados, *especialmente en placas sin vigas de borde*, dimensionando la armadura correspondiente.

#### 54.7 ANCLAJE

Con carácter general, rige lo dispuesto en el capítulo 44, excepto en lo que resulta modificado por lo dispuesto en la figura 54-1.

#### 54.8 FISURACIÓN

La comprobación a fisuración es obligatoria por tratarse de piezas superficiales. La regla expuesta en 54.3.b) es una norma práctica que se ha mostrado útil. De todas formas, la comprobación debe realizarse mediante los métodos expuestos en el capítulo 47.

#### 54.9 DEFORMACIONES

El tema se expuso en detalle en el Capítulo 19.

## CAPÍTULO 55

### FORJADOS SIN VIGAS. SOLUCIONES EN HORMIGÓN PRETENSADO

#### 55.1 INTRODUCCIÓN

Los forjados sin vigas pretensados con armaduras postesas constituyen una solución interesante para este tipo estructural. Su desarrollo se inició hace muchos años en U.S.A. y su uso se extendió rápidamente a Australia y Asia y posteriormente a Europa, donde el sistema presenta ya un nivel de utilización importante. Comparativamente su uso en España ha sido reducido.

Constituye, naturalmente, una alternativa a las soluciones de hormigón armado ya expuestas en los Capítulos 19 y 54.

##### a) Ventajas e inconvenientes

Las ventajas e inconvenientes esenciales de esta solución, son los siguientes:

##### Ventajas

- Se reduce de manera importante, aunque no total, la fisuración de la placa.
- Se incrementa la resistencia a flexión, corte y punzonamiento.
- Se reduce el canto necesario, respecto a las soluciones de hormigón armado, o alternativamente con el mismo canto se alcanzan luces mayores.
- Debido a las contraflechas que el sistema de tendones pretensados produce en la placa, que naturalmente son de signo contrario a las debidas a las cargas permanentes y a las sobrecargas, las flechas resultantes se reducen muy considerablemente.

### Inconvenientes

- Debido a su reducido canto, las tolerancias geométricas de ejecución han de ser muy estrictas.
- Los recubrimientos son aquí un punto crítico y sus desviaciones pueden afectar seriamente a la durabilidad de la estructura.
- Al tratarse de una placa muy flexible, el cálculo de flechas debe ser cuidadoso, pues de otra manera las deformaciones diferidas pueden dañar las partes no estructurales del edificio.

### b) Campo de aplicación

El campo de aplicación más interesante (pero no el único) es el de grandes luces con sobrecargas comparativamente pequeñas frente al peso propio de la losa, o eventualmente frente a la totalidad de las cargas permanentes. Por ello, con independencia de su uso en edificios, aparcamientos, etc., este tipo estructural presenta interés también en las placas de cimentación.

### c) Las variantes en cuanto al tipo de tendón empleado

Dentro de la práctica habitual existen dos tipos generales de soluciones:

- **Empieo de tendones adheridos.** Presenta ventajas en cuanto a alcanzar una mayor tensión de las armaduras activas en el estado límite último de flexión y a ser prácticamente independiente durante la vida de la estructura del funcionamiento de los anclajes, ya que las armaduras están ancladas por adherencia en el mortero de inyección. Debe añadirse a ello que un fallo local, al no afectar a la adherencia del tendón más que en esa zona localizada no perturba la resistencia en otras zonas de la estructura.
- **Empieo de tendones no adheridos.** Tiene a su favor la reducción de pérdidas por rozamiento, un ligero incremento del canto útil debido a la reducción del diámetro de vaina y sobre todo la eliminación de la inyección. lo que supone una mayor velocidad de construcción. Por todo ello es hoy la variante más empleada.

### d) La interacción del pretensado de la losa con el resto de la estructura

La acción del pretensado en la placa, causa acortamientos en el plano de éstas. Si existieran coacciones aplicables a estos acortamientos, el pretensado se ejercería contra ellos y no actuaría realmente sobre la placa.

Como el grado de pretensado que se aplica es, según veremos más adelante, muy moderado, esto no suele ocasionar en la práctica ningún problema, aun cuando deba siempre ser tenido en cuenta tanto en el proyecto como en el proceso de ejecución.

En lo que sigue, tratamos únicamente los aspectos específicos de este tipo de placas ya que los aspectos de pretensado, pérdidas, cálculo de estados límite, etc., se calculan de acuerdo con los métodos generales expuestos en los Capítulos correspondientes.

## 55.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS

Existen tres métodos generales para calcular los esfuerzos, en particular la distribución de momentos flectores en este tipo de placas. En lo que sigue de este apartado presentamos sólo lo referente a esfuerzos. Los detalles de colocación de tendones, etc., se indican más adelante para los tres métodos.

### 55.2.1 MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO DE FORJADOS SIN VIGAS

El método en este caso es exactamente el expuesto en el Capítulo 19, distribuyendo la armadura activa, es decir los tendones, de acuerdo con lo allí expuesto para los momentos en bandas de pilares y bandas centrales. Sin embargo este método no es muy usado debido a que la complejidad constructiva que presenta encarece notablemente el coste de la estructura.

### 55.2.2 VIGAS Y LOSAS EN DIRECCIONES ORTOGONALES. MÉTODO DE LAS BANDAS DEL ACI-ASCE JOINT COMMITTEE 423 (55.1) y (55.2)

El método, mucho más simple (Fig. 55-1), consiste en disponer unas vigas virtuales en una dirección, concentradas en las alineaciones de pilares y apoyar en ellas una serie ortogonal de tendones uniformemente espaciados.

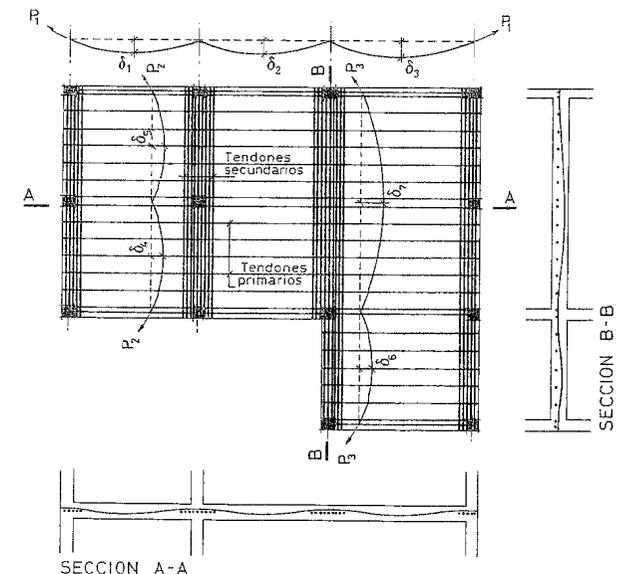


Figura 55-1

El Joint Committee ACI-ASCE citado recomienda que en la dirección ortogonal a las bandas concentradas, al menos dos tendones se sitúen en el ancho de las filas de pilares.

Como puede verse, el sistema resuelve la estructura mediante el pretensado de dos sistemas unidireccionales, pero es simple y económico.

El cálculo de esfuerzos se realiza mediante el método de las cargas equilibradas expuesto en 53.2.5. Obsérvese que este método no exige que los pilares se dispongan en malla ortogonal (Fig. 55-1) como exige el método general expuesto en 55.2.1.

En la figura se han dibujado abatidos los trazados de los tendones con puntos singulares en los cambios de dirección. Más adelante daremos instrucciones sobre anchos de bandas, redondeos, etc.

Como en general la carga que se equilibrará con el pretensado será el peso propio de la losa o una ligeramente superior<sup>1</sup>, y la carga total será en general idéntica en toda la superficie de la losa. Los valores de la fuerza de pretensado  $P$  (constante a lo largo de todo el tendón), se calculan mediante las fórmulas de la figura 53-8 del Capítulo 53, en función de la carga  $g$  a equilibrar, la luz  $L$  y la flecha  $\delta$  de la parábola del tendón, de acuerdo con el canto adoptado para la placa. Este último deberá tener también en cuenta las deformaciones de acuerdo con lo que más adelante se expone.

### 55.2.3 MÉTODO BIDIRECCIONAL DE LAS CARGAS EQUILIBRADAS

Es el método más ampliamente utilizado para el cálculo de este tipo de placas. Su difusión ha sido muy amplia, en gran parte debido a la publicación del Postensioning Institute de Estados Unidos citada como referencia (55.3)<sup>2</sup>. Es realmente el método que saca el máximo partido al método de LIN de las cargas equilibradas, expuesto en el Capítulo 53.

Consideremos de nuevo la planta de estructura de la figura 55-1, pero adoptamos otra solución de pretensado (Fig. 55-2). Se han designado con números las alineaciones de pilares en dirección vertical y con letras las alineaciones en dirección horizontal. (Obsérvese que este sistema tampoco exige la disposición de pilares en malla ortogonal).

La solución consiste en disponer dos sistemas primarios de tendones  $TP_x$  y  $TP_y$  (Fig. 54-2) en las direcciones  $x$  y  $y$ . El sistema primario  $TP_x$  se indica en la parte superior de la figura. Por el momento disponemos los tendones parabólicos con puntos singulares. Más adelante se establecerán criterios para los enlaces y redondeos.

- 1 Cabe, mediante tesados sucesivos, llegar a equilibrar toda la carga permanente. La decisión depende de las ventajas económicas alcanzables, frente al sobre coste de los distintos tesados. Esto es aplicable siempre al método de las cargas equilibradas.
- 2 Existe traducción española del IMCYC (55.4) así como un trabajo de J. RUI-WAMBA (55.5). Una excelente exposición es la de A. Fuentes (55.6). Véanse también (55.7) y (55.9)

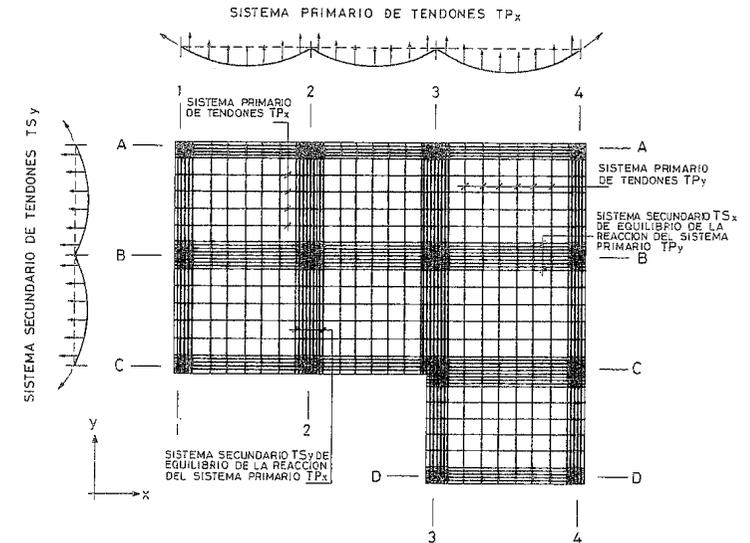


Figura 55-2

La disposición de tendones primarios  $TP_x$  y  $TP_y$  en retícula uniforme, no es suficiente para establecer el equilibrio ya que las reacciones verticales de los tendones deben ser transmitidas a los pilares y dada la pequeña sección de éstos tal transferencia no es posible. La solución práctica es la disposición de dos sistemas secundarios de tendones  $TS_x$  y  $TS_y$  concentrados en fajas estrechas (que más adelante comentaremos) alineadas con las filas de pilares. El sistema secundario  $TS_y$  en la zona de dos vanos se indica en la parte izquierda de la figura.

Con esta disposición, el sistema primario  $TP_x$  que equilibra las cargas, reacciona apoyándose en el secundario  $TS_y$  y análogamente el  $TP_y$  en el  $TS_x$ , con lo que las reacciones son fácilmente transmitidas por punzonamiento a los pilares.

También en este caso en general la carga que se equilibrará con el pretensado es igual o ligeramente superior a la de peso propio de la placa y como la carga total suele ser igual en toda la superficie de la placa, los valores de la fuerza de pretensado  $P$ , constante a lo largo de todo el tendón, se calculan mediante las fórmulas de la figura 53-8 del Capítulo 53 en función de la carga  $g$  a equilibrar, la luz  $L$  y la flecha  $\delta$  de la parábola del tendón, de acuerdo con el canto adoptado para la placa.

### 55.3 RECOMENDACIONES GENERALES DE PROYECTO

A continuación se dan una serie de recomendaciones específicas para el proyecto de este tipo de placas.

### 55.3.1 CANTOS MÍNIMOS DE PLACA

El canto total mínimo  $h$  de este tipo de placas viene fijado por tres puntos de vista diferentes:

- La resistencia a estados límite últimos
- La limitación de flechas
- La resistencia al fuego

En cualquier caso, un valor mínimo de  $h$  es el de 120 mm.

La tabla T-55.1 tomada de (55.7) da valores orientativos.

**TABLA T-55.1**

#### RELACIONES USUALES $h/L$

TIPO DE ELEMENTO	TIPO DE SOBRECARGA	RELACIÓN $h/L$ ( $L$ es la luz mayor del recuadro)	
VIGAS Y LOSAS EN DIRECCIONES ORTOGONALES (Apartado 55.2.2)	Normal (Oficinas, etc.)	$\frac{1}{10} a \frac{1}{28}$	Referido a la luz mayor del recuadro
	Pesada (Almacenes, etc)	$\frac{1}{15} a \frac{1}{20}$	
PLACAS ALIGERADAS CON CASETONES	Normal	$\frac{1}{26} a \frac{1}{32}$	Referido a la luz mayor del recuadro
	Pesada (Oficinas con archivos de peso importante, almacenes etc)	$\frac{1}{20} a \frac{1}{28}$	
PLACAS MACIZAS	Ligera (Viviendas, etc.)	$\frac{1}{40} a \frac{1}{48}$	Referido a la luz menor del recuadro
	Normal (Oficinas, etc.)	$\frac{1}{34} a \frac{1}{42}$	
	Pesada (Almacenes, etc.)	$\frac{1}{28} a \frac{1}{36}$	

El nomograma de la figura 55-3 adaptado a partir de la referencia (55.7) permite también estimar el canto con mayor precisión.

Notas:

1. Debe verificarse también el punzonamiento.
2. El nomograma está obtenido para placas macizas pero puede utilizarse para placas aligeradas con casetones si éstos están situados en las zonas de la placa de momentos positivos.

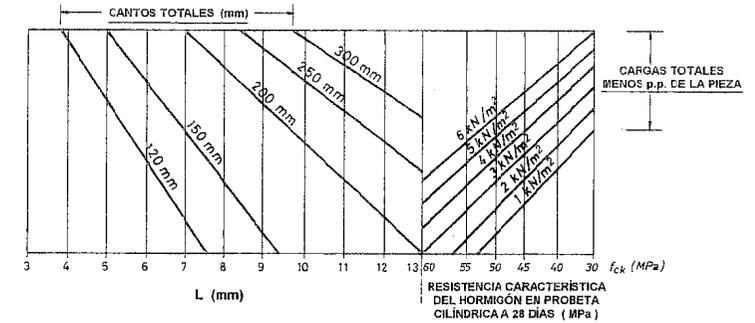


Figura 55-3

### 55.3.2 RECUBRIMIENTOS

En general, son aplicables los establecidos por EHE (ver Apartado 30.3.2.1). La FIP en el documento específico (55.8) recomienda los valores recogidos en la tabla T-55.2.

**TABLA T-55.2**  
RECUBRIMIENTOS MÍNIMOS EN mm

CONDICIONES DE EXPOSICIÓN	TIPO DE HORMIGÓN	
	H-25, H-30, H-35	H-40, H-45, H-50
Ligeramente agresivas (*)	15	15
Moderadamente agresivas (**)	20	15
Fuertemente agresivas (***)	30	25

- (\*) Por ejemplo, elementos protegidos de la lluvia o de condiciones agresivas, excepto la exposición atmosférica normal durante el período de construcción.
- (\*\*) Por ejemplo, elementos protegidos de lluvias fuertes, o contra la helada mientras el hormigón está saturado, caso de elementos enterrados y hormigón permanentemente sumergido.
- (\*\*\*) Por ejemplo, elementos con exposición continua a la lluvia, variación alternativa de humedad y sequedad, heladas mientras el hormigón está húmedo, condensación o gases corrosivos.

### 55.3.3 NIVEL MEDIO DE PRETENSADO

El nivel medio de pretensado en este tipo de estructuras suele variar entre un mínimo de 0,8 N/mm<sup>2</sup> y un máximo de 3,5 N/mm<sup>2</sup>, relacionados, respectivamente con el control de la fisuración y con la limitación de acortamientos excesivos en la placa. En placas con aligeramientos o casetones, el valor máximo de 3,5 N/mm<sup>2</sup> suele elevarse hasta 5,50 N/mm<sup>2</sup>.

### 55.3.4 COEFICIENTES DE SEGURIDAD

Rigen los criterios y valores generales expuestos en el Capítulo 32.

### 55.3.5 TENSIÓN ÚLTIMA DE LAS ARMADURAS ACTIVAS

El problema es notablemente distinto según los tendones estén adheridos o no.

Si los tendones están adheridos, su alargamiento se analiza como el resto de las estructuras pretensadas, en este caso de acuerdo con la teoría de cálculo de las placas.

Si los tendones no están adheridos (caso hoy el más frecuente), la placa y los tendones toman idénticas flechas pero no están conectadas más que en los puntos extremos de anclaje, por lo que dado el bajo rozamiento que se produce, la tensión en el tendón es sensiblemente constante a lo largo de todo el tendón.

El ACI (55.10) recomienda tomar como tensión última del acero de pretensado, en tendones no adheridos, los valores siguientes, siempre que la tensión de pretensado permanente sea inferior al 50% de la tensión de rotura.

- a) Placas con una relación canto/luz igual o superior a  $\frac{1}{35}$ .

$$\sigma_{pu} = \sigma_{pso} + \frac{f_{ck}}{100 \rho_p} + 70 \begin{cases} \geq f_{pv} \\ \geq \sigma_{pso} + 420 \end{cases} \quad [55.1]$$

- b) Placas con una relación canto/luz inferior a  $\frac{1}{35}$ .

$$\sigma_{pu} = \sigma_{pso} + \frac{f_{ck}}{100 \rho_p} + 70 \begin{cases} \geq f_{pv} \\ \geq \sigma_{pso} + 210 \end{cases} \quad [55.2]$$

(Valores en MPa y N/mm<sup>2</sup>)

( $\rho_p$  es la cuantía geométrica de armadura activa).

Este valor es el que debe considerarse para el cálculo del valor del momento flector de agotamiento,  $M_u$ .

### 55.3.6 CUANTÍA MÍNIMA DE ARMADURA PASIVA

Aunque existen estructuras de este tipo ejecutadas sin armadura pasiva alguna, es decir solamente con los tendones de pretensado, es recomendable la disposición de una cuantía mínima de armadura pasiva, de acuerdo con lo que sigue, tomado de la referencia (55.10):

- a) En las zonas de momentos positivos donde la tensión máxima de tracción en el hormigón no rebasen  $0,16 \sqrt{f_{ck}}$ , no es necesario disponer armadura pasiva.
- b) Si en dichas zonas se rebasa en el hormigón la tensión de tracción  $0,16 \sqrt{f_{ck}}$  debe disponerse un área de armadura pasiva.

$$A_s = \frac{N_c}{0,43 f_{yd}} \quad [55.3]$$

$N_c$  = Valor característico de la fuerza total de tracción en el hormigón.

$f_{yd}$  = Límite elástico de cálculo del acero, sin rebasar el valor de 420 N/mm<sup>2</sup>.

La armadura  $A_s$  debe distribuirse uniformemente en la zona de tracción, tan cerca de la cara traccionada como permitan las reglas de recubrimientos.

- c) En las zonas de momentos negativos de las bandas de pilares, debe disponerse en cada dirección un área de armadura pasiva.

$$A_s = 0,00075 h l \quad [55.4]$$

donde:

$h$  = Canto de la placa.

$l$  = Luz en la dirección en que se dispone la armadura.

El área  $A_s$  debe disponerse en un ancho de banda igual al de la columna más 1,5  $h$  a cada lado.

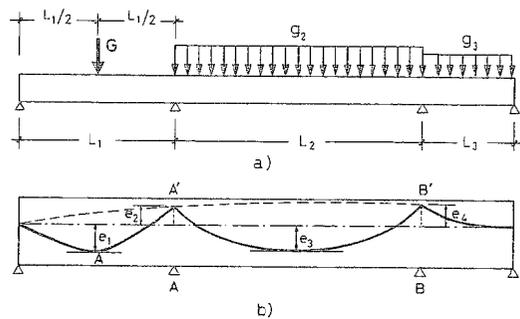
La separación entre barras no debe superar los 300 mm y en cada banda habrá un mínimo de cuatro barras.

## 55.4 DISPOSICIÓN DE TENDONES

### 55.4.1 TRAZADO DE TENDONES

Aunque las bases esenciales del trazado han sido expuestas anteriormente, a continuación se analiza el tema con mayor detalle.

Un caso general se indica en la figura 55-4, en cuya parte inferior b) hemos representado a escala vertical ampliada el trazado de los tendones.



CUERDAS	$e_1 + \frac{e_2}{2}$	$\frac{e_2 + e_4}{2} + e_3$	$e_4$
CARGAS EQUILIBRADAS	$G = \frac{4P_1 \left( e_1 + \frac{e_2}{2} \right)}{L_1}$	$g_2 = \frac{8P_2 \left( \frac{e_2 + e_4}{2} + e_3 \right)}{L_2}$	$g_3 = \frac{2P_3 e_4}{L_3}$

Figura 55-4

De la figura se deduce que existen 7 incógnitas  $P_1, P_2, P_3, e_1, e_2, e_3$  y  $e_4$ . La igualación de valores de la fuerza de pretensado  $P_1 = P_2 = P_3$  en los dos apoyos  $A, B$  proporcionan dos ecuaciones, y las tres condiciones de equilibrio de cargas, tres ecuaciones. Ello significa que dos de las incógnitas pueden ser fijadas. Normalmente ello se hace por tanteos, conjugando los valores de  $e$  para obtener, dentro del canto elegido, la solución con menor valor de la fuerza de pretensado  $P$ .

En nuestro caso, el procedimiento más práctico es elegir el vano que ha de requerir más fuerza de pretensado, lo cual depende lógicamente de las cargas. Sea éste por ejemplo el de luz  $L_2$ . Dentro del canto total elegido disponemos el máximo valor de la cuerda  $\frac{e_2 + e_4}{2} + e_3$ , que ocurrirá reduciendo al máximo los valores de los

recubrimientos superior e inferior. Con ello de la ecuación de la carga equilibrada obtenemos  $P_2$ . Por tanto conocemos  $P_1 = P_2 = P_3 = P$  y  $e_2, e_3, e_4$ . La excentricidad  $e_1$ ,

que es la incógnita que queda, se deduce de la ecuación  $G = \frac{4P \left( e_1 + \frac{e_2}{2} \right)}{L_1}$ . Si, por

supuesto, con el valor adoptado de  $e_4, g_3 = \frac{2Pe_4}{L_3}$  es muy superior al valor real ello

requerirá algún tanteo para reducir  $e_4$  y aumentar ligeramente  $P$  para conseguir el equilibrio de los otros vanos.

Deben hacerse las siguientes observaciones:

- En los extremos libres de la placa, los tendones tienen excentricidad nula.
- En el dibujo de la figura 55-4 c) hemos dibujado ya redondeado el punto singular  $A$  de equilibrio de la carga puntual  $G$ , pues por razones constructivas debe respetarse el radio de curvatura mínimo del tendón. (Véase fig. 31-9).
- En los puntos altos  $B'$  y  $C'$  hemos mantenido los puntos singulares, que como veremos a continuación deben también ser sustituidos por tramos curvos, lo cual alterará ligeramente los valores de  $e_2$  y  $e_4$ . Esto debe ser tenido en cuenta en el tanteo anteriormente realizado.

Para el enlace curvo de los puntos altos tales como los  $A'$  y  $B'$ , debe seguirse lo indicado en la figura 55-5.

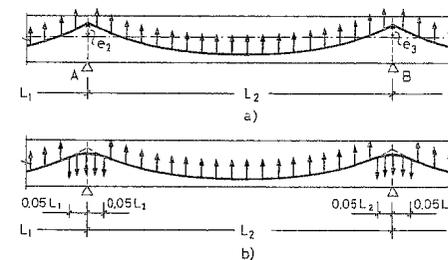


Figura 55-5

Los redondeos indicados deben tener una extensión en planta en cada extremo del vano, como máximo del 10% de la luz del vano cada uno, pero preferiblemente del 5% como se indica en la figura.

#### 55.4.2 DISTRIBUCIÓN GENERAL DE LOS TENDONES

Son posibles soluciones bastante diferentes, pero la más habitual es situar los sistemas primarios  $TP$  (figuras 55-1 y 55-2) igualmente espaciados en la dirección correspondiente, en todo el ancho de la placa y los sistemas secundarios concentrados a cada lado, en una banda de ancho igual al del pilar más  $\frac{h}{2}$  a cada lado de la misma.

(En bandas de pilares de fachada, en el ancho de la columna más  $\frac{h}{2}$ ).

Las losas aligeradas o de casetones deben proyectarse de forma que permitan también esa concentración de los tendones secundarios sobre los pilares.

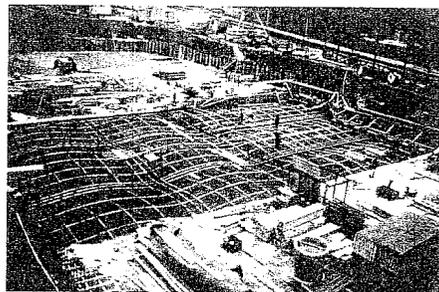
### 55.4.3 SEPARACIÓN DE TENDONES

Con tendones no adheridos, la máxima separación de tendones debe ser de seis veces el canto total de la placa, excepcionalmente ocho veces. Los tendones, si es necesario pueden disponerse formando grupos, pero deben atarse firmemente los tendones de los grupos entre sí a distancias adecuadas. El número máximo de tendones por grupo es de cuatro.

La mínima separación entre tendones o entre grupos de tendones debe ser de 75 mm.

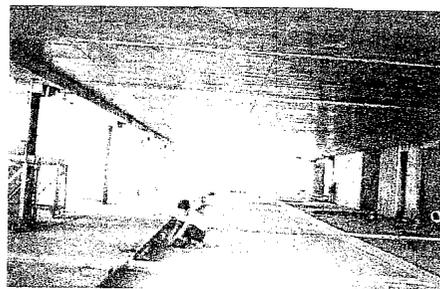
En tendones secundarios, donde a veces los tendones se colocan en más de una capa la separación vertical entre tendones no debe ser inferior a su dimensión transversal vertical máxima.

Las figuras 55-6, 55-7 y 55-8 indican aspectos de una estructura de este tipo.



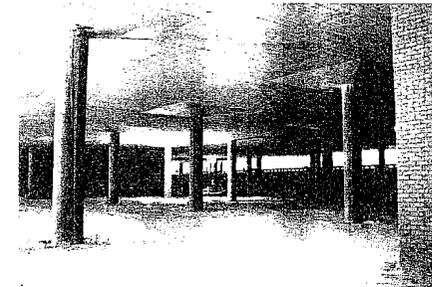
(Cortesía de "THE VSL GROUP")

Figura 55-6



(Cortesía de "THE VSL GROUP")

Figura 55-7



CENTRO COMERCIAL "LAS PROVINCIAS".  
FUENLABRADA (MADRID).  
LOSAS POSTESADAS CON TENDONES ADHERENTES DE  
VAINA OVAL.  
Propiedad: ALCOSTO  
Autores del Proyecto: FHECOR Ingenieros Consultores, S.A.  
Empresa Constructora: FERROVIAL  
(Cortesía de "FHECOR")

Figura 55-8

## 55.5 DETALLES Y ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

### 55.5.1 REFUERZOS DE BORDE DE PLACA

En todo borde libre de placa con tendones no adheridos deben disponerse dos redondos de diámetro no inferior a 12 mm, con horquillas de sujeción (Fig. 55-8). Si los tendones son adheridos tanto la armadura longitudinal como las horquillas necesarias pueden ser mayores.

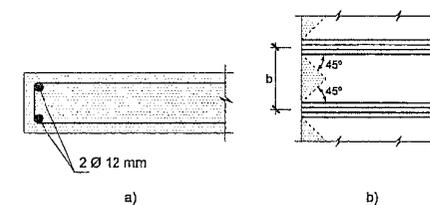


Figura 55-9

En ambos casos las horquillas deben alargarse hasta cubrir el área en planta sombreada en la figura 55-9 b).

La razón de esta armadura es que en las zonas sombreadas no existe pretensado.

De acuerdo con (55.8), la cuantía de esta armadura debe ser:

$$\frac{A_s}{bd} = 0,0015 - 0,5 \frac{A_p}{bd} \leq 0,0005$$

donde  $d$  es el canto útil y  $A_p$  es el área de armadura activa correspondiente al ancho  $b$ .

### 55.5.2 COLOCACIÓN DE TENDONES EN PLACAS NERVADAS

Para facilitar la colocación de los tendones, en este caso los nervios (Fig. 55-10) deben llevar estribos abiertos superiormente. Las armaduras de la losa, que por supuesto han de colocarse después que los tendones, desempeñan el papel de cierre y anclaje superior del estribo.

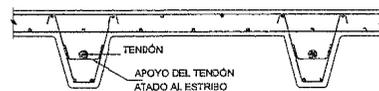


Figura 55-10

### 55.5.3 ABERTURAS EN LA PLACA

Tal como se indicó en el Capítulo 53, es posible disponer aberturas en la placa, pero aparte de las recomendaciones que allí se dieron, debe cuidarse (Fig. 55-11) que el desvío  $AB$  sea suave y se verifique bastante antes de llegar a la abertura.

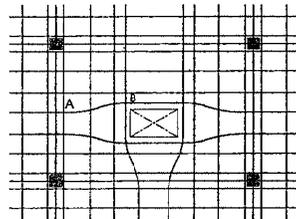


Figura 55-11

### 55.5.4 MÁXIMA LONGITUD ENTRE JUNTAS DE TRABAJO

La longitud máxima de una placa suele ser de 30 m cuando se tesan los tendones desde un solo extremo y de 60 m cuando se tesan por ambos. En todo caso los empalmes de tendones permiten solucionar tesados de tendones de mayor longitud. Sin embargo debe prestarse mucha atención a este punto pues si el tesado no se puede realizar pronto, será necesaria una mayor cuantía de armadura pasiva.

### 55.5.5 JUNTAS

Rige en cuanto a posición y tratamiento lo dicho en el Capítulo 24 aunque la aplicación del pretensado (si éste no se retrasa) permite en este caso distanciar las juntas de contracción hasta 60 m.

Para no retrasar el tesado, pueden disponerse empalmes de acuerdo con la figura 55-12. La junta debe hacerse hacia el cuarto de la luz para una cómoda colocación del empalme. La mejor solución es el empleo de metal desplegado o malla fina para retener el hormigón de acuerdo con lo indicado en 24.3.6.

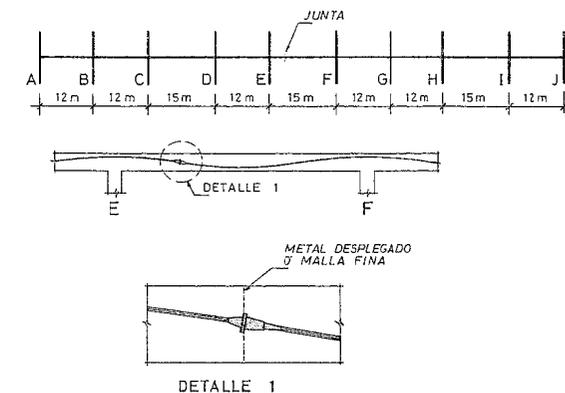


Figura 55-12

### 55.5.6 SEPARADORES Y CALZOS

Todas las necesidades prácticas están cubiertas con los tipos que se indican en el Capítulo 50. La colocación de los tendones es crítica en este tipo de placas por lo que la disposición de calzos y separadores debe ser especialmente cuidadosa.

### 55.5.7 CIMBRADO DE PLANTAS CONSECUTIVAS

Puede ser, como en todo tipo de placas y losas, un aspecto crítico. Véase J. CALAVERA (55.11).

### 55.5.8 ORDEN DE TESADO

El Programa de Tesado usualmente conviene que especifique el tesado previo de los sistemas secundarios antes que el de los primarios, pues reduce la carga sobre puntales de las cimbras.

### 55.5.9 TOLERANCIAS

Las tolerancias especificadas en el Anejo 4 son aplicables con carácter general. Sin embargo no cubren específicamente algunos aspectos de este tipo de placas. La referencia (55.8) indica además las recogidas en la Tabla T-55.3.

**TABLA T-55.3**  
**TOLERANCIAS EN LA COLOCACIÓN DE TENDONES**

ESPESOR DE PLACA (mm)	TOLERANCIA	
	VERTICAL	HORIZONTAL
≤ 200	$\pm \frac{h}{40}$	±20 mm
> 200	±5 mm	±20 mm

Este aspecto debe ser objeto de un Control de Calidad siempre de Nivel Intenso, debiendo verificarse en especial las zonas sobre pilares y las de anclajes.

NOTA FINAL: Como se dijo al principio de este Capítulo se han desarrollado aquí únicamente los aspectos específicos. El resto de comprobaciones y cálculos ha de hacerse de acuerdo con lo expuesto en los Capítulos correspondientes.

Para el tema particular de las flechas, las cargas equilibradas con el pretensado, (en general el pretensado a largo plazo) no producen flechas. Para el resto de las cargas vale el método expuesto en el Capítulo 53, haciendo las oportunas correcciones en los momentos de inercia.

Puede encontrarse información complementaria interesante en las referencias (55.12) para el cálculo no lineal y en la referencia (55.13) que es una buena exposición general.

### BIBLIOGRAFÍA

- (55.1) ACI-ASCE Joint Committee 423: "Tentative recomendations for prestressed concrete flat plates". ACI Journal. Feb. 1974.
- (55.2) ACI-ASCE Joint Committee 423: "Recomendations for concrete members prestressed with unbonded tendons". Draft Report. 1980.
- (55.3) POSTENSIONING INSTITUTE: "Desing of postensioned slabs". Glavier. Illinois. 1977.
- (55.4) INSTITUTO MEXICANO DEL CEMENTO Y DEL CONCRETO: "Diseño de losas pretensadas". Likusa. México. 1980.
- (55.5) RUI-WAMBA, J. "Losas riostradas con cables no adherentes en estructuras de edificación". Conferencia en el Instituto Eduardo Torroja. 30 de enero de 1989. ATEP.
- (55-6) FUENTES, A. "Calcul pratique d'un plancher precontraint par armatures non-adherentes". Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics. Juin 1988.
- (55.7) Post-tensioned flat-slab design handbook. Concrete Society. Technical Report N° 25. Londres. 1984.
- (55.8) Recommendations for the design of flat slabs in post-tensioned concrete (using unbonded and bonded tendons). F.I.P. Mayo 1980.
- (55.9) RITZ, P.; MATT, P.; TELLENBACH, CH.; SCHLUB, P.; AEBERHARD, H.U. "Postensioned concrete in building constructions postensioned slab. Lossinger. Berne. 1981.
- (55.10) BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE. ACI 318-95. American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (55.11) CALAVERA, J. "Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación". 4ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1988.
- (55.12) CARBAJAL, J. "Dalles en beton". Ecole Politecnique. Federale de Lausanne. Janvier. 1993.
- (55.13) VSL. "Pos-tensioned slabs". VSL. Repor Series. 1985.

## CAPITULO 56

### PLACAS

#### 56.1 GENERALIDADES

El cálculo de esfuerzos se expuso en el Capítulo 20. Se recuerda que en dicho capítulo se establecieron de acuerdo con EHE, algunos valores mínimos de los momentos flectores.

Probablemente una de las razones que motiva el escaso uso que, en general, se hace de las placas en las estructuras de hormigón armado es la complejidad de sus reglas de cálculo y sobre todo de armado, que como se verá a continuación encarecer considerablemente su coste.

#### 56.2 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN

Conocidos los momentos flectores, la armadura de flexión se calcula de acuerdo con lo establecido para forjados de losa maciza en el Capítulo 52. Si el cálculo se ha realizado de acuerdo con los métodos de cálculo lineal, debe tenerse en cuenta lo siguiente:

*a) Placas sustentadas en dos bordes paralelos sometidas a cargas concentradas:*

Si el ancho de la banda eficaz, calculado de acuerdo con 20.4, alcanza el borde libre de la placa, se colocará una armadura transversal superior a lo largo de dicho borde, calculada para resistir un momento negativo igual al 10% de momento longitudinal que se produciría en el centro de la luz si la carga actuase en dicha sección central. Esta armadura se extenderá sobre una longitud, medida desde el borde libre, igual al lado menor de la placa, e irá acompañada de una armadura longitudinal de igual cuantía.

En la cara inferior de las bandas adyacentes a la banda eficaz de la placa se dispondrán armaduras principales y transversales, cuya cuantía, en general, no debe ser menor del tercio de las armaduras respectivas existentes en la banda eficaz.

b) Placas rectangulares sustentadas en su contorno y sometidas a carga uniformemente repartida

Los momentos correspondientes se calculan de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 20. Rigen los valores mínimos especificados en 20.2.1.c).

Salvo un estudio más exacto, la distribución de armaduras se regirá por lo expuesto en la figura 56-1.

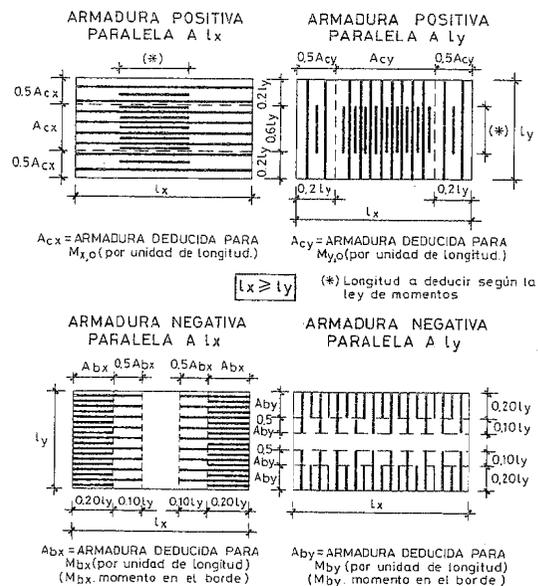


Figura 56-1

En las esquinas donde concurren dos bordes simplemente apoyados y con el fin de absorber los momentos torsores, las armaduras de flexión se suplementarán, si es necesario, hasta que en la zona de esquina de lados iguales al 20% del lado menor de la placa se disponga de dos mallas ortogonales, una en cada cara, de cuantía no inferior al 75% de la necesaria para resistir el máximo momento flector principal de la placa.

En las placas cuya relación de lados exceda el valor 2,5 cuyos lados menores estén simplemente apoyados, como ya se dijo, se considerarán los momentos previstos en 20.2.1.c) y las armaduras correspondientes se dispondrán a partir de cada uno de los lados menores, en una longitud igual a:

- Para momentos negativos, el 20% del lado menor de la placa.
- Para momentos positivos, el 50% del lado menor de la placa.

### 56.3 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE

Debe aplicarse lo expuesto en 39.2.6.

### 56.4 ANCLAJE

Rige lo expuesto en el Capítulo 44.

### 56.5 FISURACIÓN

Rige lo expuesto en el Capítulo 47.

### 56.6 DEFORMACIONES

Debe realizarse la comprobación con los valores correspondientes al cálculo de esfuerzos basado en los métodos elásticos. Los gráficos GT-26 a GT-47 proporcionan los valores correspondientes directamente.

EHE establece como canto mínimo de placas  $\frac{l}{40}$  siendo  $l$  la luz menor y no menor de 8 cm.

### 56.7 MÉTODO DE JOHANSEN

El método, conocido también como "Método de las Líneas de Rotura" representa, tal como expusimos en 20.2.2.1, (56.1) un método para el cálculo de placas análogo, en cierto modo, a los métodos de cálculo no lineal en el caso de vigas. En la figura 56-2 a) se representa, vista por su cara inferior, el esquema de fisuración en agotamiento de una placa apoyada en su contorno y con carga vertical descendente uniformemente repartida. El esquema real puede sustituirse por el de las líneas de la figura 56-2 b). En sentido estricto, más que hablar de "líneas de rotura", debería hablarse de "fajas de rotura", ya que se trata de zonas de un cierto ancho, de la misma forma que en cálculo no lineal de vigas las rótulas plásticas tienen una cierta extensión y no se trata sólo de una sección plastificada sino de una zona.

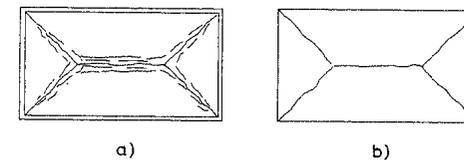


Figura 56-2

En el proceso de carga, con las cuantías habituales en placas, que son muy inferiores a la límite, en esas zonas se produce el agotamiento del acero y secundariamente del hormigón comprimido tal como vimos en el Capítulo 36.

Una vez rotulada la placa en esas líneas, se producen giros importantes antes de agotarse la pieza, alrededor de esas líneas como ejes.

Por supuesto, las líneas de apoyo son también ejes de giro de la placa.

a) *Planteamiento general del Método*

El caso más elemental es el de una losa sobre apoyos continuos, paralelos entre sí y perpendiculares a la dirección de armado de la losa (fig. 56-3).

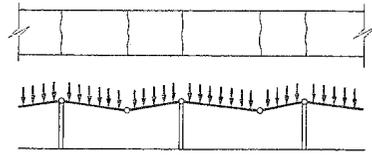


Figura 56-3

La formación de las líneas de rotura se realizará sobre los apoyos y en los vanos. La posición de las líneas en los vanos dependerá de las cargas y de la disposición de armaduras. El problema, en este caso particular, es naturalmente análogo al de una viga continua.

Conocido el armado de la losa<sup>1</sup>, podemos determinar la posición de la línea de rotura en el vano. Como podemos calcular, los momentos últimos en los apoyos y en el lugar del vano donde se supone que se va a formar la línea de rotura,  $M_{UA}$ ,  $M_{UB}$ ,  $M_{UA'}$  el esquema será el representado por la figura 56-4. (Los momentos  $M_U$  son de empotramiento sobre los extremos de cada trozo de losa).

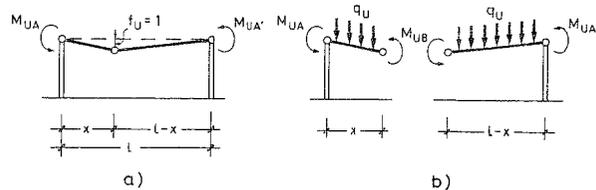


Figura 56-4

En principio, tenemos dos procedimientos para el cálculo de la posición  $x$  y de la carga última  $q_u$ . Uno es establecer el equilibrio de los dos trozos de losa, con lo que se obtienen dos ecuaciones con incógnitas  $q_u$  y  $x$ . (En este caso el planteamiento de las ecuaciones es inmediato. En otros podremos resolver el problema por tanteo de diversos valores de  $x$ , hasta que ambos trozos estén en equilibrio). Este método será denominado en adelante "Método del Equilibrio".

<sup>1</sup> El método es realmente un método de comprobación no de dimensionamiento, aunque como veremos en muchos casos es susceptible de tabulación.

Un segundo procedimiento es suponer la flecha  $f_u = I$  en la línea de rotura en el vano. El trabajo realizado por las fuerzas exteriores es conocido en función de  $x$ . Los giros de los dos trozos de losa son  $\theta_A = \frac{1}{x}$  y  $\theta_{A'} = \frac{1}{l-x}$ , de

acuerdo con ellos podemos calcular los trabajos  $M_U \cdot \theta$  realizados en los extremos de los trozos por las fuerzas interiores, que son en este caso los momentos últimos.

Expresando  $q_u$  como función de  $x$ , derivando se obtiene el valor de  $x$  que hace mínimo el valor de  $q_u$  y sustituyendo se obtiene el valor mínimo de  $q_u$ . Este método será denominado en adelante "Método de los Trabajos Virtuales".

Obsérvese que en cualquier caso el Método de las Líneas de Rotura no considera el trabajo realizado por las deformaciones elásticas, sino solamente por las plásticas. De acuerdo con la figura 56-5, del trabajo total, representado en el diagrama momentos-rotaciones por el área  $OABCDEO$ , el método desprecia el área  $OABEO$ . Como con las cuantías empleadas en la práctica la rotación última  $\theta_U$ , es muy superior a la correspondiente al momento que

agota el acero,  $\theta_y$ , el método proporciona una gran precisión.

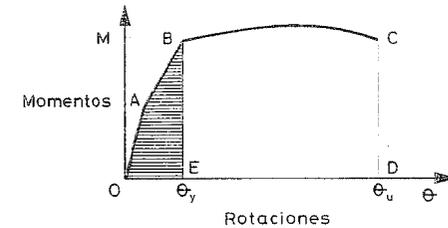


Figura 56-5

Un inconveniente del método es que es necesario conocer el valor  $M_{UB}$  en la zona a distancia  $x$  donde se va a producir la línea de rotura en vano. Si la armadura presenta muchos cambios, esto puede complicar considerablemente el cálculo. Sin embargo, en la mayoría de los casos las placas de arman con esquemas muy sencillos y el problema se simplifica.

El método es un *método de estado límite superior* y, por tanto, la posición real de las líneas de rotura es la que conduzca al menor valor de la carga de rotura.

b) Esquema de rotura de la placa

La determinación del esquema de rotura se realiza con base en los siguientes principios generales:

- b-1) Todo apoyo recto es un eje de rotación de un trozo de placa.
- b-2) Todo apoyo puntual es un punto de paso de un eje de rotación de la placa.
- b-3) Si una placa apoya en dos bordes rectos consecutivos, una línea de rotura pasa por la intersección de los dos bordes.
- b-4) Dados dos trozos de placa, la línea de rotura que los separa pasa por el punto de intersección de sus ejes de rotación.

La aplicación de los principios anteriores permite determinar el esquema de rotura. A título de ejemplo, consideremos el caso indicado en la figura 56-6. De acuerdo con b-1), los cuatro bordes simplemente apoyados constituyen cuatro ejes de rotación. De acuerdo con b-3) han de existir cuatro líneas de rotura pasando por los vértices. El esquema de rotura ha de ser uno de los dos indicados de línea llena o de trazos respectivamente. El que se produzca uno u otro depende de la posición y cantidad de armadura, como veremos más adelante.

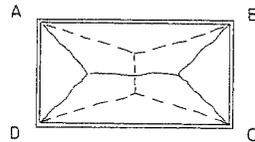


Figura 56-6

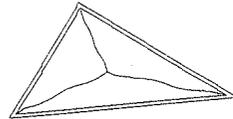


Figura 56-7

En la figura 56-7 se representa el caso de una placa triangular, cuyo esquema de rotura es inmediato, de acuerdo con lo anterior.

Si existe continuidad en los bordes, éstos son líneas de rotura. La figura 56-8 indica el esquema de rotura de una placa empotrada en los cuatro bordes.

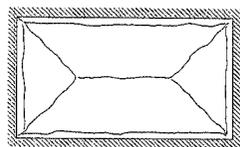


Figura 56-8

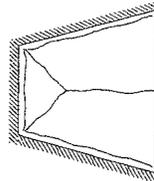


Figura 56-9

El caso representado en la figura 56-9 corresponde a una placa con tres bordes empotrados y otro libre.

La figura 56-10 corresponde a una placa biempotrada en forma de sector circular, con el lado curvo libre.

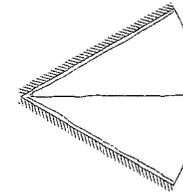


Figura 56-10

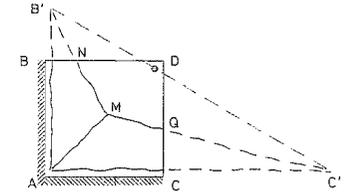


Figura 56-11

En el caso de que existan apoyos puntuales, la aplicación del principio b-2) permite encontrar el esquema de rotura. En la figura 56-11 se indica un caso de este tipo, correspondiente a una placa empotrada en dos bordes, con otros dos libres y un apoyo puntual en un pilar. De acuerdo con b-1), los bordes empotrados son ejes de rotación y línea de rotura. De acuerdo con b-3), tiene que existir una línea de rotura pasando por A, como AM. Según b-2), debe existir un eje de rotación pasando por el pilar D. Sea tal como B'C'. De acuerdo con b-4), las líneas de rotura MN y MQ han de pasar por B' y C'.

Los principios anteriores permiten determinar el esquema de líneas de rotura, pero no su posición exacta. Para ello necesitaremos lo que se expone en los apartados siguientes.

c) Momentos de agotamiento cuando la armadura no es ortogonal a la línea de rotura.

En el apartado a) supusimos que la armadura era perpendicular a las líneas de rotura. Con los esquemas de armado habituales en la práctica, un gran número de casos, entre ellos varios de los indicados en el apartado b), no cumplen esa condición. Sea (fig. 56-12), una línea de rotura AB, atravesada por una serie de armaduras de cuantía constante por unidad de ancho de placa en la zona considerada, y sea  $M_u$  el momento último correspondiente a esa cuantía. Llamando  $\alpha$  al ángulo de la línea de rotura con la dirección de las armaduras, si  $\alpha = 90^\circ$ , en el agotamiento de la placa sobre la línea de rotura actuará un momento  $M_u$  por unidad de ancho de placa. Si  $\alpha \neq 90^\circ$ , sobre la línea aparece un momento flector  $M_{u\alpha}$  por unidad de ancho, inferior a  $M_u$ , acompañado de un momento torsor  $M_{T\alpha}$  por unidad de ancho.

1 Más adelante haremos una precisión sobre el ángulo de líneas de rotura con los bordes libres.

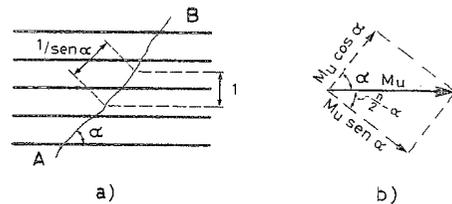


Figura 56-12

De acuerdo con la figura 56-12 b), se tiene

$$M_{u\alpha} = \frac{M_u \sin \alpha}{\sin \alpha} = M_u \sin^2 \alpha \quad [56.1]$$

y para el torsor

$$M_{T\alpha} = \frac{M_u \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} M_u \sin 2\alpha \quad [56.2]$$

Si la línea de rotura está atravesada por dos familias de armaduras que forman con ella ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , y a las que corresponden momentos últimos  $M_{u1}$ ,  $M_{u2}$ , las fórmulas [56.1] y [56.2] se transforman en las siguientes:

$$M_{u\alpha} = M_{u1} \sin^2 \alpha_1 + M_{u2} \sin^2 \alpha_2 \quad [56.3]$$

$$M_{T\alpha} = \frac{1}{2} (M_{u1} \sin 2\alpha_1 + M_{u2} \sin 2\alpha_2) \quad [56.4]$$

Las fórmulas [56.3] y [56.4] se generalizan inmediatamente a cualquier número de familias de armaduras.

En el caso particular, pero muy frecuente (fig. 56-13), de dos familias ortogonales de armaduras a las que corresponden momentos últimos en sus direcciones,  $M_{u1}$ ,  $M_{u2}$ , haciendo  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha$  en [56.3] y [56.4] se obtiene:

$$M_{u\alpha} = M_{u1} \sin^2 \alpha + M_{u2} \cos^2 \alpha \quad [56.5]$$

$$M_{T\alpha} = \frac{1}{2} (M_{u1} - M_{u2}) \sin 2\alpha \quad [56.6]$$

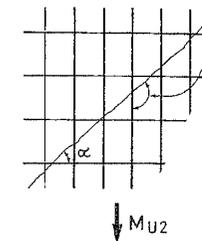


Figura 56-13

Considerem  
nudo x. (p  
GUSON (56.3)).  
no signo, no se  
un nudo no es  
pueden ser

signo, el

Si además  $M_{u1} = M_{u2} = M_u$  las expresiones anteriores se transforman

$$M_{u\alpha} = M_u (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = M_u \quad [56.7]$$

$$M_{T\alpha} = 0 \quad [56.8]$$

Es decir, en una placa con armadura isotrópica los momentos flectores son iguales en todas direcciones y no existen momentos torsores en las líneas de rotura.

#### d) Fuerzas nodales

Las llamadas fuerzas nodales son elementos de corrección a introducir cuando se emplea el Método del Equilibrio. Aparecen cuando una línea de rotura interseca de forma oblicua a una armadura, y sustituyen a los momentos torsores expuestos anteriormente y a los esfuerzos cortantes que aparecen en las líneas de rotura correspondientes a momentos negativos. En definitiva, dichos momentos torsores y esfuerzos cortantes se sustituyen por las fuerzas nodales a efectos de simplificar la aplicación del Método del Equilibrio. Como veremos son fuerzas internas en equilibrio en los nudos y no intervienen en el Método de los Trabajos Virtuales.

Considerando el esquema de rotura de la figura 56-14, las acciones de los momentos torsores y esfuerzos cortantes sobre la línea de rotura B del trozo de placa 1, se consideran sustituidas por las fuerzas nodales  $N_b$ ,  $N'_b$  situadas en los nudos extremos de la línea de rotura B (Nudos x e y).

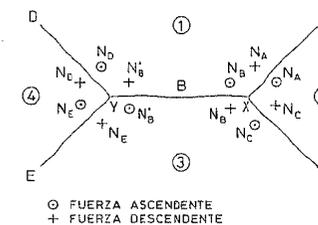


Figura 56-14

Consideremos ahora (Fig. 56-15) las resultantes de las fuerzas nodales en el nudo x. (Positivas en sentido descendente). Podemos escribir:

$$P_A = N_B - N_C \quad [56.9]$$

$$P_B = N_C - N_A \quad [56.10]$$

$$P_C = N_A - N_B \quad [56.11]$$

La suma [56.9], [56.10], [56.11] conduce a:

$$P_A + P_B + P_C = 0 \quad [56.12]$$

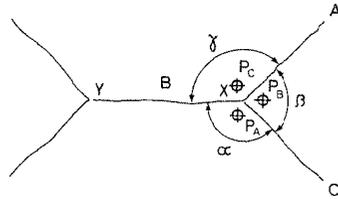


Figura 56-15

En general, [56.12] se cumple para cualquier número de líneas de rotura que concurren en un nudo.

Los valores de  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  pueden expresarse en función de los ángulos de las líneas de rotura y de los momentos flectores y torsores actuantes sobre ellas, calculados de acuerdo con las fórmulas [56.1] a [56.8] que correspondan.

Las fórmulas correspondientes, cuya deducción se omite aquí por brevedad, resultan,

$$P_A = (M_{uB} - M_{uA}) \cot g \gamma - (M_{uC} - M_{uA}) \cot g \beta - (M_{TB} - M_{TC}) \quad [56.13]$$

$$P_B = (M_{uC} - M_{uB}) \cot g \alpha - (M_{uA} - M_{uB}) \cot g \gamma - (M_{TC} - M_{TA}) \quad [56.14]$$

$$P_C = (M_{uA} - M_{uC}) \cot g \beta - (M_{uB} - M_{uC}) \cot g \alpha - (M_{TA} - M_{TB}) \quad [56.15]$$

La deducción de estas fórmulas puede seguirse en el Bulletin d'Information n° 67 del C.E.B. (56.2).

e) Algunas propiedades generales de las fuerzas nodales

Pueden ser establecidas las siguientes propiedades (véase FERGUSON (56.3)).

- Si todas las líneas de rotura corresponden a momentos del mismo signo, no se requieren fuerzas nodales si el número de líneas concurrentes en un nudo no es superior a tres. Si el número es superior a tres, las fuerzas nodales pueden ser necesarias.

- Si todas las líneas de rotura no son debidas a momentos del mismo signo, el número máximo de direcciones es tres.

f) Fuerzas nodales en los bordes simplemente apoyados o libres

En el caso de bordes libres o simplemente apoyados (fig. 56-16), por condiciones de equilibrio estático, es evidente que la línea de rotura ha de ser ortogonal al borde. La línea  $AMN$ , del trazado general, en las proximidades del borde, ha de curvarse tomando el trazado  $AMN'$ .

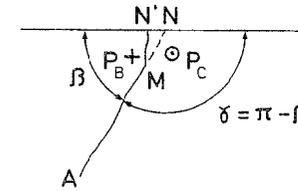


Figura 56-16

Las fuerzas nodales se deducen de [56.13], [56.14] y [56.15] y resultan, de acuerdo con la figura 56-15, para  $\gamma = \pi - \beta$ ,  $M_{uB} = M_{uC} = 0$ ,  $M_{TB} = M_{TC} = 0$

$$P_B = -M_{uA} \cot g(\pi - \beta) + M_{TA} = M_{uA} \cot g \beta + M_{TA} \quad [56.16]$$

$$P_C = -P_B \quad [56.17]$$

Si la placa es isótropa,  $M_{TA} = 0$

$$P_B = M_{uA} \cot g \beta \quad P_C = -P_B$$

g) Método del equilibrio

De acuerdo con lo visto en el apartado a), una vez conocidas las acciones actuantes sobre cada trozo de placa, esto es, momentos  $M_u$  a lo largo de sus bordes, acciones de peso propio, reacciones, acciones exteriores y fuerzas nodales, se expresan las condiciones de equilibrio de cada trozo en función de las incógnitas, llegándose a un sistema que resuelve el problema<sup>1</sup>. El esquema válido es el que conduce al menor valor de las acciones exteriores.

<sup>1</sup> WOOD (56.4) ha establecido críticas serias a la validez general del Método del Equilibrio.

h) *Método de los Trabajos Virtuales*

Tiene validez general. Se basa en igualar, para cada esquema de líneas de rotura, el trabajo de las fuerzas exteriores (cargas) al de las fuerzas interiores (momentos plásticos). Las fuerzas nodales al estar en equilibrio en cada nudo no intervienen y, por tanto, no necesitan ser calculadas. De la ecuación de igualación de los trabajos se obtiene  $q_u$  como función de las variables restantes y se calcula el conjunto de valores que hace mínimo el valor de la carga última  $q_u$  y con ello el valor mínimo de  $q_u$ .

i) *Efecto ángulo*

En todo lo anterior (fig. 56-17 a)) hemos supuesto que la línea de rotura en el ángulo de dos apoyos arranca del vértice. Los ensayos demuestran que si el borde está apoyado, se produce el efecto *Y* indicado en b). Si el borde está empotrado aparece una nueva línea de rotura. Si en la esquina la armadura es superabundante, esta línea puede no aparecer.

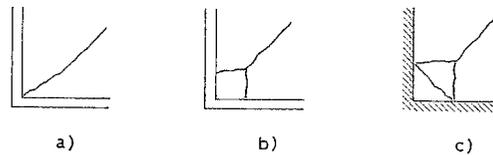


Figura 56-17

Estos nuevos esquemas pueden ser tenidos en cuenta de acuerdo con los métodos anteriormente expuestos, pero JOHANSEN y HOGNESTAD (56.5) han demostrado que la trascendencia de esto es escasa y que en la práctica puede ignorarse esta formación secundaria de líneas de rotura.

j) *Cargas puntuales*

Cuando sobre una placa actúa una carga concentrada, tiende a formarse una línea de rotura de momentos negativos de tipo circular, mientras que se forman líneas de rotura radiales de momentos positivos (fig. 56-18). Si suponemos que sobre los radios actúan momentos  $M_{ur}$  y sobre el arco circular,  $M_{uc}$  por unidad de longitud, expresando las condiciones de equilibrio se tiene:

$$M_{uc} \cdot ds + 2M_{ur} \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{d\theta}{2}\right) - P_u \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \cdot r = 0$$

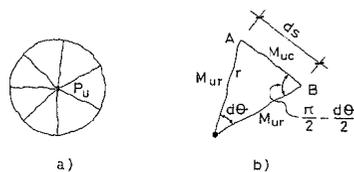


Figura 56-18

Como  $ds = r d\theta$

$$M_{uc} \cdot r d\theta + 2M_{ur} r \sin \frac{d\theta}{2} - P_u \frac{d\theta}{2\pi} \cdot r = 0$$

y con  $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$  se obtiene

$$P_u = 2\pi(M_{ur} + M_{uc}) \quad [56.18]$$

Obsérvese que la carga  $P_u$  depende solamente de los momentos últimos en sentido circunferencial y radial, y no de la distancia a la que se forme la circunferencia de rotura.

### 56.8 OBSERVACIONES PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE JOHANSEN

Conviene tener en cuenta las observaciones siguientes:

a) El orden para el cálculo debe ser:

- Establecimiento del esquema de rotura.
- Cálculo de los momentos  $M_u$  en las distintas direcciones de armado.
- Cálculo de los momentos  $M_{ur}$   $M_{rc}$  para las diferentes líneas de rotura.
- Si se va a aplicar el Método del Equilibrio, deben calcularse las fuerzas nodales. No son necesarias si se va a emplear el Método de los Trabajos Virtuales.
- Aplicación del Método del Equilibrio o el de los Trabajos Virtuales para la determinación de las cargas últimas.

b) En sentido estricto el método está pensado para aceros con escalón de relajamiento. Los ensayos han demostrado que su aplicación a aceros estirados en frío conduce a resultados ligeramente del lado de la seguridad.

c) El Método del Equilibrio y el Método de los Trabajos Virtuales son soluciones alternativas y pueden usarse uno como comprobación del otro.

d) En general, ambos métodos muestran que el problema del cálculo de placas por el Método de JOHANSEN no es muy sensible a la posición exacta de las líneas de rotura, pero en cambio debe procederse con extraordinario cuidado en averiguar el esquema real de rotura, pues un error en esto puede conducir a diferencias graves. Si aparecen como posibles varias soluciones, deben ser investigadas y seleccionar la que conduzca a la menor carga de rotura.

e) El método realmente exige un dimensionamiento previo, pero a través de la redacción de formularios permite ser usado como un método de dimensionamiento. Véase por ejemplo JIMÉNEZ MONTOYA (56.7).

- f) No debe olvidarse que este método, como todos los de estado límite, no permite el cálculo de las flechas en servicio. Por tanto, el valor de la carga de servicio será el menor de los que se obtengan dividiendo por  $\gamma_f$  la carga última obtenida por el Método de JOHANSEN o comprobando las flechas, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 20. Frecuentemente las cargas características deducidas del Método de JOHANSEN con los valores habituales de  $\gamma_f$ , conducen a flechas excesivas en servicio.
- g) Los temas expuestos pueden ampliarse en las referencias (56.6), (56.7), (56.8) y (56.9).

### EJEMPLO 56.1

Dada la placa simplemente apoyada sobre dos bordes no paralelos ( $AB$  y  $CD$ ) y con los otros dos libres, representada en la figura 56-19, calcular el valor de la carga uniformemente repartida de agotamiento, sabiendo que la placa es isótropa y los momentos últimos son:

Borde  $AB$   $M_{uAB} = 18,15 \text{ mkN/m}$

Borde  $CD$   $M_{uCD} = 22,7 \text{ mkN/m}$

Vano  $M_{uv} = 13,6 \text{ mkN/m}$

Aplíquese el Método del Equilibrio.

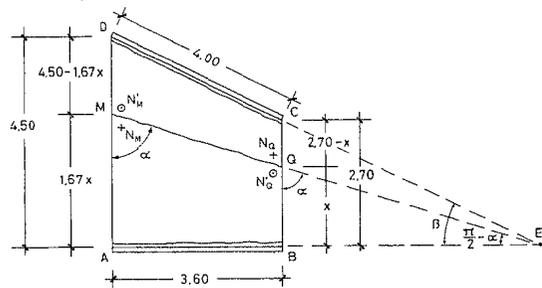


Figura 56-19

### SOLUCIÓN

De acuerdo con lo expuesto, se formarán tres líneas de rotura, dos sobre los apoyos y la tercera en el vano según una recta concurrente en  $E$ , donde  $EB$  resulta igual a 5,40 m. El ángulo  $\beta$  resulta de  $26,5^\circ$ .

Como la placa es isótropa, el momento en vano es  $M_u = 13,6 \text{ mkN/m}$  en todas las direcciones.

Definiremos la línea de rotura en vano por la distancia  $BQ = x$  en el borde libre  $BC$ .

Comenzaremos calculando las fuerzas nodales que al estar junto a bordes libres vienen dadas por [56.16] y [56.17] con  $M_{Tn} = 0$ .

$$N_M = 13,6 \cot \alpha = 13,60 \frac{x}{5,40} = 2,52x \text{ kN}$$

$$N'_Q = -2,52x \text{ kN}$$

Como el planteamiento analítico sería tedioso, resolveremos el problema por tanteos. Como  $M_{uCD} > M_{uAB}$  probaremos con un valor de  $x$  algo menor que 2,70 m.

Sea  $x = 1,25 \text{ m}$ . Resulta  $\tan \alpha = \frac{5,40}{1,25}$ ;  $\alpha = 77^\circ$ ;  $\frac{\pi}{2} - \alpha = 13^\circ$ ;  $1,67x = 2,09$

$$N_M = 2,52 \cdot 1,25 = 3,15 \text{ kN}$$

$$N'_Q = -3,15 \text{ kN}$$

Llamando  $q_u$  a la carga de agotamiento, incluido el peso propio, y poniendo en equilibrio el trozo de placa  $AMQB$ , se tiene tomando momentos respecto a  $AB$ .

$$-18,15 \cdot 3,60 - 13,60 \cdot \overline{MQ} \sin \alpha - 3,15 \cdot 1,25 + 3,15 \cdot 2,09 + q_u \cdot S_{ABQ} \cdot \frac{1,25}{3} + q_u \cdot S_{AMQ} \cdot \left[ \frac{2,09}{2} + \frac{1}{3}(1,25 - 1,05) \right] = 0$$

donde  $S_{ABQ} = \frac{1}{2} \cdot 3,60 \cdot 1,25 = 2,25 \text{ m}^2$

$$S_{AMQ} = \frac{1}{2} \cdot 3,60 \cdot 2,09 = 3,76 \text{ m}^2$$

$$\overline{MQ} \cdot \sin \alpha = 3,60$$

operando se tiene

$$q_u = 21,54 \text{ kN/m}^2$$

Consideremos análogamente el equilibrio del trozo de placa  $MDCQ$ , y tomando momentos respecto a  $CD$ , de forma análoga a la anterior obtenemos

$$q_u = 23,70 \text{ kN/m}^2$$

Esto indica que  $x$  es algo mayor de 1,25 m, pero la diferencia entre los dos valores obtenidos para  $q_u$  es muy pequeña, por lo que tomaremos el valor medio

$$q_u = 22,60 \text{ kN/m}^2$$

### EJEMPLO 56.2

Dada una placa isótropa cuadrada de 5 m de lado empotrada en sus cuatro bordes, con momentos últimos negativos  $M_{uA} = 18 \text{ m kN/m}$  y positivos  $13,5 \text{ m kN/m}$

calcular la carga última  $q_u$  por el método de los trabajos virtuales.

### SOLUCIÓN

El esquema de rotura es el indicado en la figura 56-20. Supongamos una flecha de  $f(m)$  en el punto  $O$ .

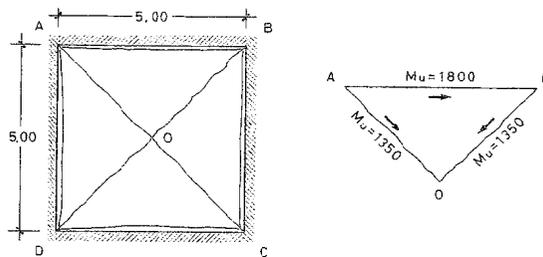


Figura 56-20

Aislando el triángulo  $AOB$ , el momento sobre  $AB$  es  $18 \text{ m kN/m}$  y al ser la placa isótropa el momento por unidad de longitud en  $AO$  y  $BO$  es

$$M_u = 13,5 \text{ m kN/m}$$

que se proyecta en ese valor sobre  $AB$ .

Trabajo de las fuerzas exteriores. Supongamos que el descenso del punto  $O$  es  $f$ .

Para las fuerzas exteriores

$$T_e = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,50 \cdot q_u \cdot \frac{f}{3}$$

Trabajo de las fuerzas interiores. El giro es  $\theta = \frac{f}{2,50}$

$$T_i = 18,00 \cdot 5 \cdot \frac{f}{2,50} + 2 \cdot 2,50 \sqrt{2} \cdot 13,50 \cos 45^\circ \cdot \frac{f}{2,50}$$

Igualando  $T_e = T_i$  se tiene

$$q_u = 30,24 \text{ kN/m}^2$$

### BIBLIOGRAFÍA

- (56.1) JOHANSEN, K.W.: "Brudlime teorie". Kopenhagen. 1952.
- (56.2) COMITE EUROPEEN DU BETON. Bulletin d'Information n° 67 "Dalles, Structures Planes". April 1968.
- (56.3) FERGUSON, F.M.: "Reinforced Concrete Fundamentals". Third Edition. John Wiley. New York. 1973.
- (56.4) WOOD, R.H.: "Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates". Ronald Press. New York. 1961.
- (56.5) HOGNESTAD, E.: "Yield-Line Theory for the ultimate Flexural Strength of Reinforced Concrete Slabs". Journal ACI. March 1953.
- (56.6) VAN LANGENDONCK, T.: "Charnieras Plasticas en Lajes de Edificios". Associação Brasileira de Cimento Portland. Sao Paulo. 1966.
- (56.7) JIMÉNEZ MONTOYA, P.; GARCÍA MESEGUER, A.; MORÁN CABRÉ, F.: "Hormigón Armado". Gustavo Gil. 11ª Edición. Barcelona. 1981.
- (56.8) DEL POZO FRUTOS, F.: "Placas". Apuntes de la Cátedra de Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.
- (56.9) DOBLARE CASTELLANO, M.: "Nociones de Cálculo de Placas". Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Madrid. 1983.

## CAPÍTULO 57

### ZONAS DE ANCLAJE DE LOS TENDONES DE PRETENSADO

#### 57.1. INTRODUCCIÓN

Con independencia de las tensiones producidas por los tendones en la pieza, en las zonas próximas a los anclajes, que son zonas de discontinuidad, se producen tensiones especiales que es necesario considerar. La situación es muy diferente según se trate de armaduras pretensas o postesas.

#### 57.2 ARMADURAS PRETESAS

La longitud de transmisión se definió en 32.5.3.8. A falta de la información directa basada en ensayos, que debería ser facilitada por el Fabricante de las armaduras, las fórmulas [32.23] y [32.24] proporcionan la longitud según el MODEL-CODE 90 y el EUROCÓDIGO EC-2. Ya indicamos allí nuestra preferencia por la primera. La tabla T-32.17 proporciona valores experimentales de la longitud de transferencia.

En la figura 57-1b) se indica la longitud de transferencia en la cual se ha pasado del valor  $\sigma_p = 0$  en el extremo de la pieza al valor  $\sigma_{ps}$  de pretensado permanente.

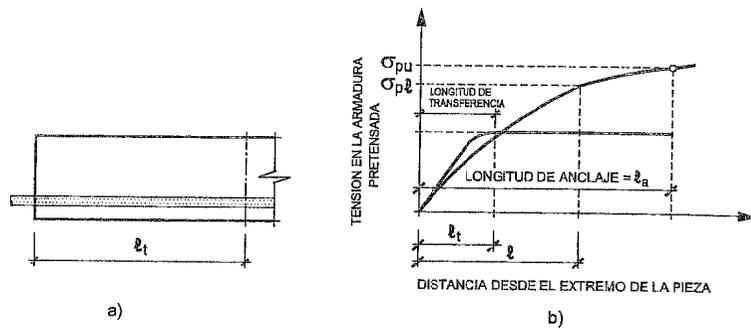


Figura 57-1

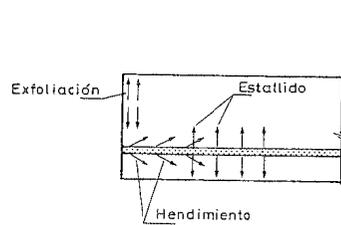


Figura 57-2

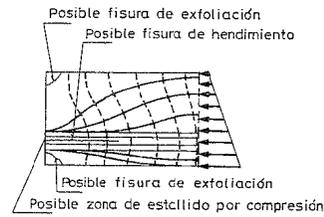


Figura 57-3

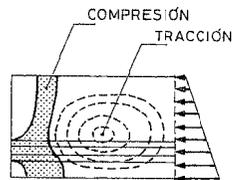


Figura 57-4

La transferencia de tensión conduce a un estado de tensiones en la zona extrema de discontinuidad que se indica en las figuras 57-2 y 57-3. Ello crea una zona de compresiones y otra de tracciones como la indicada en la figura 57-4. Como resultado (Fig. 57-5) se crea una zona de tracciones que puede provocar la fisura ya indicada en la figura 57-3, por hendimiento paralelo a la armadura. Esta fisura se conoce comúnmente como "fisura de cocodrilo" (Fig. 57-6). Para evitarla, es necesario disponer una serie de estribos.

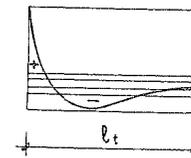


Figura 57-5

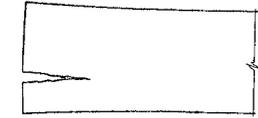


Figura 57-6

### 57.2.1 TENSIONES DE ESTALLIDO

Se pueden analizar por la analogía del prisma simétrico (Fig. 57-7).

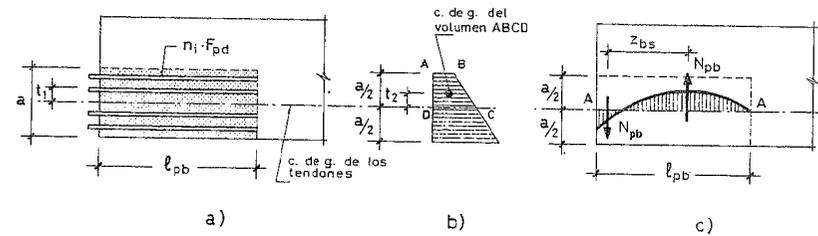


Figura 57-7

El prisma se define con una altura  $a$ , siendo  $a/2$  la distancia del c.d.g. de los tendones a la fibra inferior de la pieza, y una longitud  $l_{pb}$  dada por la fórmula

$$l_{pb} = \sqrt{a^2 + (0,6 l_{bpt})^2} \neq l_{bpt} \quad [57.1]$$

donde  $l_{bpt}$  es la longitud de transferencia de los tendones, definida por [32.23].

El momento de las fuerzas que producen las tensiones de estallido viene dado por

$$M_{pe} = \gamma_p \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot t_2 \sum_1^n n_i F_{pd} - t_1 \sum_1^k k_i F_{pd} \right] \quad [57.2]$$

1 La fórmula es, por supuesto, una expresión simplificada.

donde

$\gamma_p$  = coeficiente de ponderación de la fuerza de pretensado. En este caso  $\gamma = 1,05$ .

$t_1$  = distancia del c.d.g. de los tendones de las  $k$  capas situadas por encima del plano A-A.

$t_2$  = distancia del c.d.g. del bloque de tensiones del hormigón por encima del plano A-A a dicho plano.

$n_i$  = número total de tendones de la capa  $i$ . ( $n$  es el número total de tendones).

$F_{pd}$  = valor de cálculo de la fuerza de pretensado de un tendón.

De acuerdo con el MODEL-CODE 90, el brazo que resiste este momento (Fig. 57-7c) puede estimarse en

$$z_{bs} = 0,5 l_{pb}$$

con lo que la fuerza  $N_{pb}$  viene dada por

$$N_{pb} = \frac{M_{pe}}{0,5 l_{pb}} = \gamma_p \cdot \frac{\frac{1}{2} t_2 \sum_i^n 2 n_i \cdot F_{pd} - t_1 \sum_i^k k_i \cdot F_{pd}}{0,5 l_{pb}} \quad [57.3]$$

La tensión máxima (Fig. 57-7c) puede estimarse por la fórmula

$$\sigma_{pb} = 2 \frac{N_{pb}}{b_{pb} l_{pb}} \quad [57.4]$$

en la que  $b_{pb}$  es el ancho del prisma en el plano A-A.

$$\text{Si } \sigma_{pb} > f_{ct,d} \quad [57.5]$$

donde  $f_{ct,d} = \frac{f_{ct,k}}{1,5}$  y  $f_{ct,k}$  viene dada por la Tabla T-28.1. Es necesario disponer una armadura ortogonal al plano A-A y anclada a ambos lados del plano, de sección total

$$A_{spb} = \frac{N_{pb}}{f_{yd}} \quad [57.6]$$

con  $f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2$ .

La armadura  $A_{spb}$  debe distribuirse en la zona del plano A-A situada entre  $\frac{l_{pb}}{3}$  y  $l_{pb}$  a partir del extremo de la pieza.

## 57.2.2 TENSIONES DE EXFOLIACIÓN

Se indicaron en la figura 57-2 y se indican más en detalle en la figura 57-8.

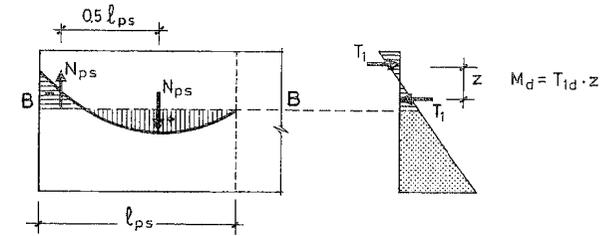


Figura 57-8

La longitud  $l_{ps}$  se define como en el caso de las tensiones de estallido. Se establece un plano B-B en el que no haya tensiones tangenciales (Fig. 57-8), respecto al cual el volumen de tensiones da un momento

$$M_d = T_{1d} \cdot z \quad [57.7]$$

puediendo aceptarse

$$z \approx 0,5 l_{ps}$$

y por tanto

$$N_{ps} = \frac{M_d}{0,5 l_{ps}} \quad [57.8]$$

( $M_d$  se obtiene con  $\gamma_p = 1,05$ ).

La tensión máxima puede estimarse mediante la fórmula

$$\sigma_{ps} = \frac{8 N_{ps}}{b_{ps} \cdot l_{ps}} \quad [57.9]$$

donde  $b_{ps}$  es el ancho del prisma en el plano B-B.

Si  $\sigma_{ps} > \frac{f_{ck,flex}}{\gamma_c}$  [57.10]

donde  $\gamma_c = 1,5$  y  $f_{ck,flex}$  viene dada por [28.6].

Debe disponerse una armadura  $A_{sps}$ , dada por

$$A_{sps} = \frac{N_{ps}}{f_{yd}} \quad [57.11]$$

( $f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2$ ).

Esta armadura debe disponer paralela al plano de la cara extrema y tan próxima a ella como sea posible.

El método anterior es muy conservador para elementos de canto no superior a 400 mm. Para estas piezas es preferible el método siguiente.

Se define (Fig. 57-9a)) como  $e_h$  la excentricidad, en la sección homogeneizada del c.d.g. de la armadura activa, y por  $k$  la excentricidad que produce tracciones en la fibra superior (extremo del núcleo central). La figura 57-9b) da en función de  $\frac{e_h - k}{h}$  el valor

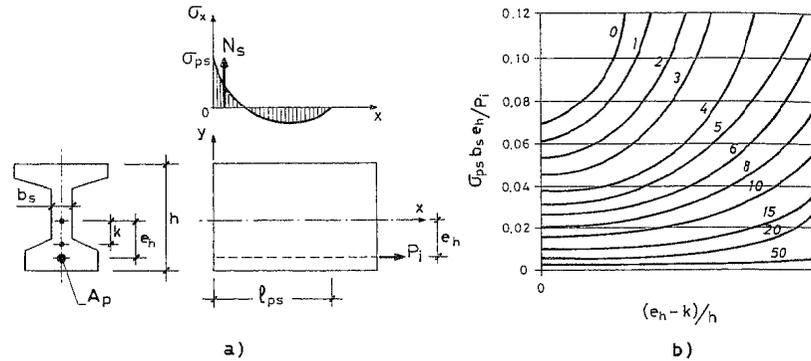


Figura 57-9

$$\frac{\sigma_{ps} b_s e_h}{P_i} \quad [57.12]$$

donde  $b_s$  es el ancho del alma y  $P_i$  el valor de la fuerza total de pretensado después de la transferencia.

De nuevo, si [57.12] rebasa  $\frac{f_{ck, flex}}{\gamma_c}$ , debe disponerse una armadura  $A_{sps}$  dada por

$$A_{sps} = \frac{\sigma_{ps} \cdot b_s \cdot l_{ps}}{f_{yd}} \quad [57.13]$$

( $f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2$ ).

### 57.2.3 TENSIONES DE HENDIMIENTO

Un método adecuado para el cálculo de esta sollicitación es el desarrollado por MARSHALL y MATTOCK (57.1) que se expone a continuación.

La tracción total  $T$  que deben resistir los estribos depende del valor  $P_{kt}$  del pretensado a través de la fórmula experimental:

$$T = 0,01 P_{kt} \frac{h}{l_{bpt}}$$

donde  $h$  es el canto de la pieza,  $l_{bpt}$  la longitud de transferencia y  $P_{kt}$  el valor de la fuerza del pretensado al transferir.

La variación de la tensión de los estribos es aproximadamente lineal con su máximo en la cara extrema de la pieza y cero al final de la grieta.

Los ensayos demostraron que una tensión máxima de los estribos de  $140 \text{ N/mm}^2$  producía una fisuración aceptable, por lo que, llamando  $A_t$  al área total de estribos:

$$A_t \frac{140}{2} = 0,01 P_{kt} \frac{h}{l_{bpt}}$$

y por tanto

$$A_t = \frac{P_{kt} h}{7000 l_{bpt}} \quad [57.14]$$

con  $P_{kt}$  en N y  $A_t$  en  $\text{mm}^2$ .

La armadura  $A_t$  debe ser de alambre corrugado grafilado o bien de torzales o cordones, nunca de alambre liso. Debe distribuirse uniformemente en una longitud  $\frac{h}{5}$  a partir de la extremidad de la pieza, con el primer estribo tan próximo a la cara extrema como lo permitan las reglas de recubrimiento. (Fig. 57-10).

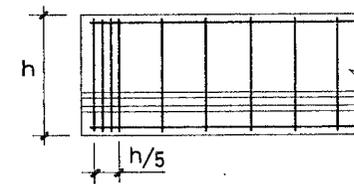


Figura 57-10

1 Como es natural, una alta adherencia de la armadura, al reducir  $l_{bpt}$  concentra las tracciones y aumenta la exigencia de armadura  $A_t$ .

### 57.2.4 RECOMENDACIÓN

En piezas prefabricadas el criterio más seguro es el ensayo directo de piezas, para evitar disponer estas armaduras sin que sean realmente necesarias.

Aunque no sea posible establecer una ley directa, la presencia de los estribos reduce la longitud de transferencia debida al confinamiento que producen en el hormigón. Esto tiene interés pues a efectos de cálculo a esfuerzo cortante es importante reducir esta longitud (Fig. 57-11). La hipótesis de desarrollo lineal de la transmisión es pesimista y la realidad se aproxima más a una parábola con vértice en C. Ello y la distancia  $m$  del extremo de la pieza al eje del apoyo, que no suele ser despreciable, hace que en la mayoría de los casos a una distancia del apoyo igual al canto se disponga ya de la casi totalidad de la fuerza transferida y a medio canto se haya transferido del orden del 75% de la fuerza.

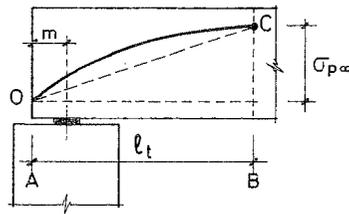


Figura 57-11

### 57.3 ARMADURAS POSTESAS

Este caso es considerablemente diferente y requiere tres comprobaciones independientes (Fig. 57-12).

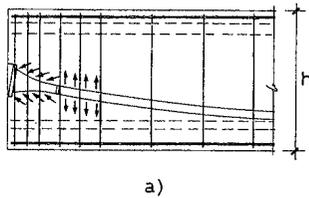
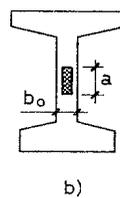


Figura 57-12

a) La primera es la comprobación de las presiones locales bajo la pieza de anclaje. Una comprobación aproximada puede realizarse de acuerdo con las presiones concentradas de la placa sobre macizos, que se expondrán en el Capítulo 60.



b)

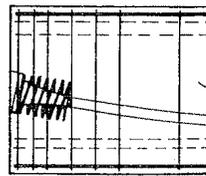


Figura 57-13

Sin embargo, dependiendo del tipo comercial de anclaje, su situación real puede alejarse mucho de dicho caso teórico, por lo que es mejor adoptar los valores obtenidos en ensayos directos de su tipo concreto de anclaje para las distintas resistencias de hormigón, facilitados por el Fabricante.

Una forma de mejorar la transmisión es, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 55, producir un confinamiento local del hormigón bajo el anclaje (Fig. 57-13) cosa que suele hacerse con hélices de redondo.

b) Una segunda comprobación es, al igual que en el caso de armaduras pretensas, el control de las tracciones verticales en el alma para evitar la formación de "fisuras de cocodrilo".

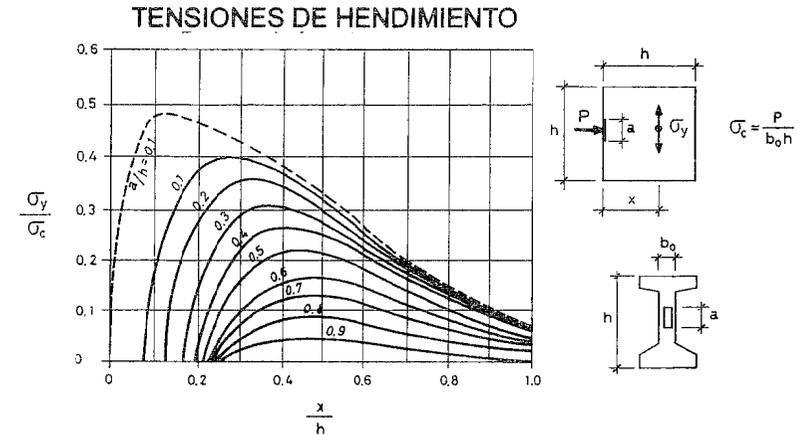


Figura 57-14

En la figura 57-14, tomada de la referencia (57.2) se indica la distribución de tensiones en un anclaje.

El gráfico proporciona un valor conservador de la armadura para cubrir el riesgo de fisuras de hendidamiento para el caso de un tendón. Por superposición puede extenderse a otros casos. El gráfico permite calcular el volumen de tracciones y, con él, el área de armadura pasiva necesaria y define con buena precisión la zona de colocación de estribos.

La armadura pasiva debe obtenerse en base a mantener su tensión en condiciones de servicio por debajo de  $0,5 f_{yd}$  sin rebasar los  $200 \text{ N/mm}^2$ .

Una información complementaria importante puede obtenerse en la referencia (57.3).

c) La tercera comprobación surge de que, como puede apreciarse en la figura 57-15, existen tensiones de descantillado en la cara extrema de la pieza. Los ensayos muestran que una cifra conservadora de la fuerza total es  $T = 0,02 P$ , siendo  $P$  la fuerza del tendón.

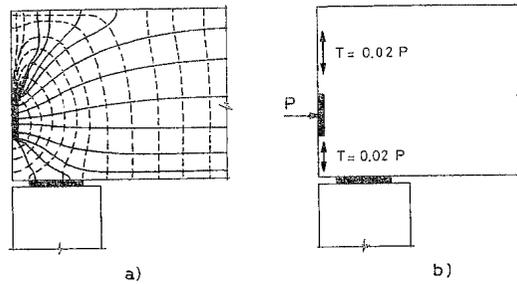


Figura 57-15

Para evitar la fisuración se dispone un área de armaduras en tensión en condiciones de servicio  $0,5 f_{yd}$  no mayor que  $200 \text{ N/mm}^2$ , que vendrá dada por

$$A_s = \frac{0,02 P}{0,5 f_{yd}} \geq \frac{0,02 P}{200} \text{ mm}^2$$

**EJEMPLO 57.1.** Sea la viga de la figura 57-12 con  $b_o = 180 \text{ mm}$ ,  $a = 200 \text{ mm}$  y  $h = 800 \text{ mm}$ . Calcúlese la armadura de estribos necesaria con acero B 400 S, si la fuerza en el tendón es de  $1600 \text{ kN}$ .

De acuerdo con la figura 57-14, para  $\frac{a}{h} = \frac{200}{800} = 0,25$  y con  $\sigma_c = \frac{1600000}{180 \cdot 800} = 11,1 \text{ N/mm}^2$

la curva  $\frac{a}{h} = 0,25$  puede asimilarse al triángulo de la figura 57-16 a).

Con ello la fuerza a absorber con los estribos es

$$F = \frac{1}{2} \cdot 0,83 \cdot 800 \cdot 0,33 \cdot 11,1 \cdot 180 = 218900 \text{ N}$$

con  $\sigma = 200 \text{ N/mm}^2$ .

$$A_s = \frac{218900}{0,5 \cdot 400 / 1,15} = 1258 \text{ mm}^2 <> 16 \phi 10 <> 8 e \phi 10 \text{ de 2 ramas}$$

que se espacian uniformemente en los  $660 \text{ mm}$ .

Los tendones de descantillado en la cara extrema requieren un área de armadura

$$A_s = \frac{0,02 \cdot 1600000}{0,5 \cdot 400 / 1,15} = 184 \text{ mm}^2 <> 4 \text{ horquillas } \phi 6$$

La figura 57-16 indica la disposición de armadura.

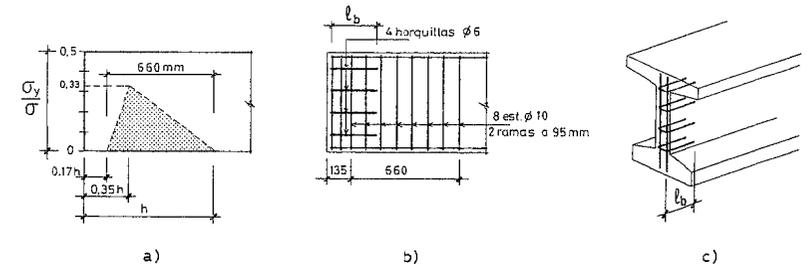


Figura 57-16

#### 57.4 TENSIONES DE CORTE EN LAS ALAS DE PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS PRETESAS

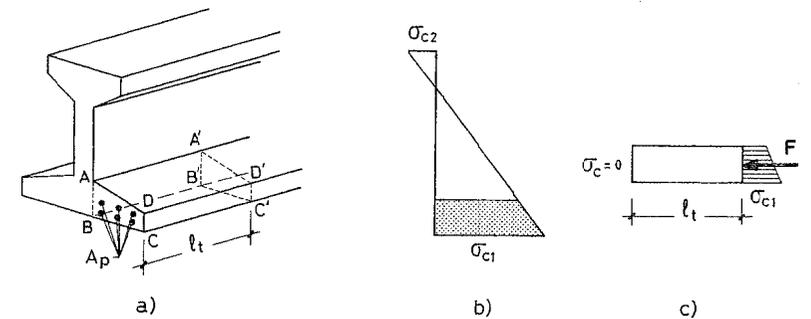


Figura 57-17

Esta situación, frecuente en la práctica, se indica en la figura 57-17a) en la que  $l_t$  es la longitud de transferencia. Sea el diagrama de tensiones de pretensado el indicado en la figura 57-17b). Aislando el sólido  $ABCD - A'B'C'D'$ , la resultante de compresiones en el hormigón en la cara extrema  $ABCD$  es nula y llamemos  $F$  a la resultante en la cara  $A'B'C'D'$ , de acuerdo con el diagrama de tensiones de pretensado. En la longitud  $l_t$  los tendones han pasado de la tensión nula a  $\sigma_p = \sigma_{pr}$ , correspondiente a la tensión al transferir el pretensado. La fuerza transferida es por tanto  $A_p \cdot \sigma_{pr}$  y la diferencia  $A_p \cdot \sigma_{pr} - F$  corresponde a una fracción de la fuerza de pretensado que ha pasado al alma a través de la zona  $AA'B'B$ , produciendo tensiones de corte.

La comprobación se realiza con las fórmulas generales de esfuerzo cortante (Capítulo 39), teniendo en cuenta la armadura de ala que no cumple usualmente ninguna función resistente y está libre por tanto para resistir este esfuerzo. Eventualmente puede ser necesario incrementarlo.

### 57.5 MACIZADOS EN ZONAS DE ANCLAJE

En los casos de piezas pretensadas con armaduras postesas es usual proyectar un cierto macizado en la zona de anclaje, tal como se indica en la figura 57-18.

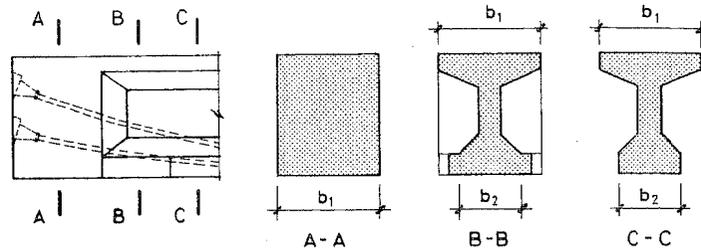


Figura 57-18

Esto reduce las tensiones transversales producidas por el anclaje.

En las piezas pretensadas con armaduras pretesas esto se hace también a veces, pero es una complicación para el sistema de moldes corridos en mesas largas, por lo que frecuentemente se evita.

### 57.6 ANCLAJES INTERMEDIOS DE ARMADURAS POSTESAS

Son frecuentes en piezas isostáticas de luz importante y más aún en piezas hiperestáticas o en armaduras de continuidad para establecer ésta en piezas originalmente isostáticas.

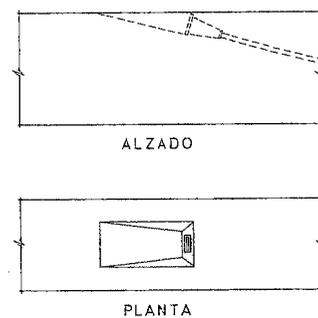


Figura 57-19

La forma del cajetín para colocar el anclaje debe ser estudiada de acuerdo a la situación de la pieza y el tipo de gato a emplear.

El cálculo de la armadura en la zona de anclaje se rige por los mismos criterios expuestos anteriormente.

### BIBLIOGRAFÍA

- (57.1) MARSHALL, W.T.; MATTOCK, A.H. "Control of horizontal cracking in the ends of pretensioned prestressed concrete girders". Journal of P.C.I. Octubre 1972.
- (57.2) IYENGAR, R. "Two-dimensional Theories of Anchorage Zone Stresses in Post-Tensioned Prestressed Beams". ACI Journal. Oct. 1962.
- (57.3) LEONHARDT, F. "Estructuras de hormigón armado". Tomo II. El Ateneo. Buenos Aires. 1985.

## CAPÍTULO 58

### DINTELES Y VOLADIZOS

#### 58.1 INTRODUCCIÓN

Muchos casos de edificios de obras públicas, bastantes de las industriales y en la mayoría de los casos las estructuras de edificios están organizadas en edificios entramados y forjados. En el caso particular de los edificios de viviendas y edificios comerciales, los entramados suelen ser de varios vanos y numerosos pisos, lo cual permite su tipificación. Como norma general se suelen presentar en ese caso (fig. 58-1) tres dinteles que presentan acciones verticales distintas.

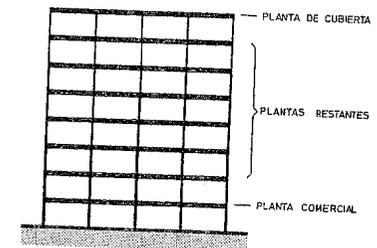


Figura 58-1

Uno suele ser el de la primera planta, con frecuencia destinada a usos comerciales y por tanto con una sobrecarga de uso relativamente elevada. Por otro lado la cubierta presenta también frecuentemente acciones verticales diferentes a las de la generalidad de los pisos. Finalmente las restantes plantas suelen estar sometidas a las mismas acciones verticales.

En general se procura resolver todos los dinteles con la misma escuadría. Si la planta comercial presenta un uso notablemente distinto al de las restantes plantas, puede requerir una escuadría mayor. El armado de los dinteles es, evidentemente, distinto para zona comercial, cubierta y restantes plantas.

Si el número de plantas es pequeño, por ejemplo inferior a seis, pueden unificarse en vertical las armaduras de todos los dinteles. Si el número de plantas es elevado, las diferencias serán más acusadas, especialmente en los vanos extremos, debido a la diferente rigidez de los pilares en las zonas altas, media y baja del edificio. En este caso se pueden adoptar dos o tres secuencias diferentes de armado. En edificios de gran número de plantas, puede incluso ser aconsejable, por razones económicas, el disponer en esas dos o tres zonas escuadrías diferentes.

Si el edificio está sometido a esfuerzos importantes debido a acciones horizontales, especialmente si tales acciones son resistidas fundamentalmente con los entramados, la necesidad de variar no sólo el armado, sino también la escuadría en varias zonas según la altura, se acentúa.

La selección de la escuadría de los dinteles ha de hacerse mediante los métodos de predimensionamiento expuestos en el capítulo 16, pero dentro de ello el proyectista ha de tomar decisiones que vienen condicionadas por razones económicas y constructivas. Como ya dijimos en 16.3, son muy escasos los estudios sobre optimización económica de estructuras. Aún estimados los máximos esfuerzos actuantes sobre el dintel, son posibles infinitas combinaciones de ancho y canto por tanto de cuantía.

Por razones prácticas de colocación de armaduras el ancho  $b$  mínimo es usualmente de 200 mm y en muchas estructuras no es necesario más. El canto suele elegirse entre  $\frac{L}{10}$  y  $\frac{L}{15}$ , siendo  $L$  la luz entre ejes del vano. En general forzar las cuantías es antieconómico y habitualmente no se llega, ni siquiera en las zonas de momentos máximos sobre apoyos interiores, a la cuantía límite superior.

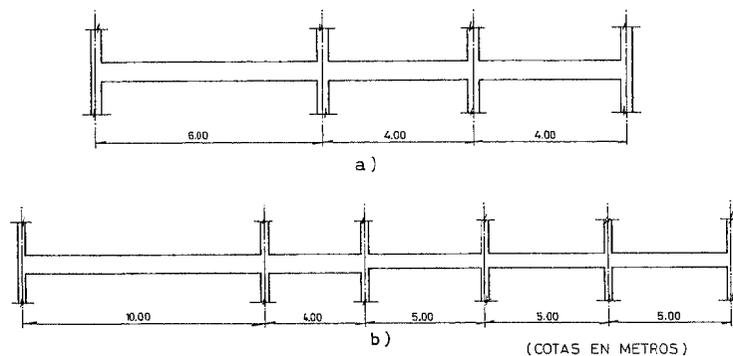


Figura 58-2

Como norma general (fig. 58-2a)), si las desigualdades de luces y cargas muy importantes, el canto se mantiene constante. En algún caso, como en el indicado en la figura 58-2b), se adoptan cantos diferentes. (Obsérvese que en este caso el vano de 4 m de luz necesita sensiblemente el mismo canto que el de 10 m dado el momento negativo en el apoyo común).

En el caso de estructuras de edificios de otros tipos, especialmente en estructuras de edificios industriales, la diversidad es tal que resulta imposible dar reglas generales. Sin embargo, en muchos casos los edificios industriales tienen su estructura organizada en pórticos paralelos. La repetitividad aquí debe conseguirse mediante la unificación razonable de los distintos pórticos en pocos tipos. El uso de piezas de canto variable (fig. 58-3a) salvo en el caso de prefabricación, debe sopesarse cuidadosamente, ya que si bien conducen a economías en cuanto a la cantidad de materiales, el coste de las armaduras crece debido a su complicación, en especial por lo que se refiere a los estribos.

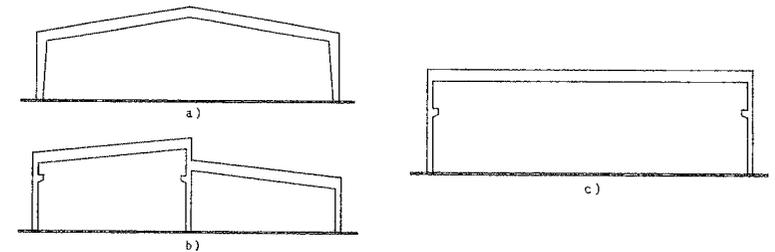


Figura 58-3

En toda la selección de escuadrías de vigas no debe perderse de vista lo expuesto en la figura 58-4. Mientras en el caso a) la viga tiene ancho inferior al pilar y las armaduras se cruzan fácilmente sin necesidad de doblado, en el b) las armaduras de la viga, tanto inferiores como superiores, necesitan un doblado previo *que debe ser realizado en taller y no en obra*. Aún así quedan zonas de viga con grandes recubrimientos que nunca son convenientes. Ya tratamos este tema al tratar de los nudos en el capítulo 51.

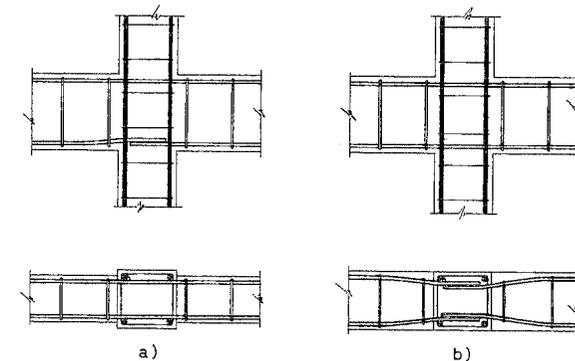


Figura 58-4

## 58.2 DIMENSIONAMIENTO

No se insiste de nuevo en el tema, ya que ha sido tratado ampliamente en los capítulos del 34 al 48, donde se han considerado todos los casos que ahora se presentan.

## 58.3 ESQUEMA DE ARMADO<sup>1</sup>

Consideramos por separado los casos de dinteles de varios vanos, dinteles de un solo vano, brochales y voladizos.

Con carácter general, los cortes de barras innecesarias deben escalonarse, para evitar las concentraciones de esfuerzos de anclaje, retracción y temperatura.

### 58.3.1 DINTELES DE VARIOS VANOS

En la figura 58-5 se indica un esquema típico de dintel, en cuyo armado se han empleado barras rectas y estribos.

Las únicas zonas eventuales curvas son las de las barras de momentos negativos en nudos extremos. El sistema conduce a una elaboración muy económica de la ferralla. Es conveniente seguir las recomendaciones siguientes:

- Representar el dintel en alzado. Cuando se indican escuadrías a  $x \times b$ ,  $b$  es la dimensión vista en el plano. (En este caso 500 mm es la medida del canto).
- Las armaduras deben indicarse en el alzado del dintel y despiezarse debajo.
- Las cotas de las armaduras deben figurar en el despiece, de forma que permitan la elaboración fácil de las plantillas de ferralla.
- Los estribos se definen en la forma indicada. Habitualmente sólo se emplean las separaciones 150, 200, 250 y 300 mm. Recuérdese que el primer estribo se coloca a 50 mm de la cara del pilar inferior.
- Las posiciones de armaduras, si el armado es idéntico para vigas en vertical, como los pilares irán reduciendo su sección, deben referirse a las caras o ejes de pilares que se conservan en las diferentes plantas.
- Con el sistema indicado en la figura 58-5 no se representan los estribos, sino que se indica su separación máxima. El número de estribos por viga puede aumentar ligeramente hacia plantas superiores, al reducirse el ancho de pilares y aumentar por tanto la luz libre de vigas. Caben las soluciones de detallar más los planos, o de realizar planos de detalle en obra.
- Habitualmente se emplea una secuencia de estribos en los cuartos extremos de la luz libre de vigas y otra en la mitad central, aproximadamente. Para vigas de luces grandes pueden emplearse más secuencias.

<sup>1</sup> Estos temas pueden ampliarse en el "Manual de Ferralla" citado en la referencia (58.1) y en el "Manual de Detalles Constructivos" citado en la referencia (58.2)

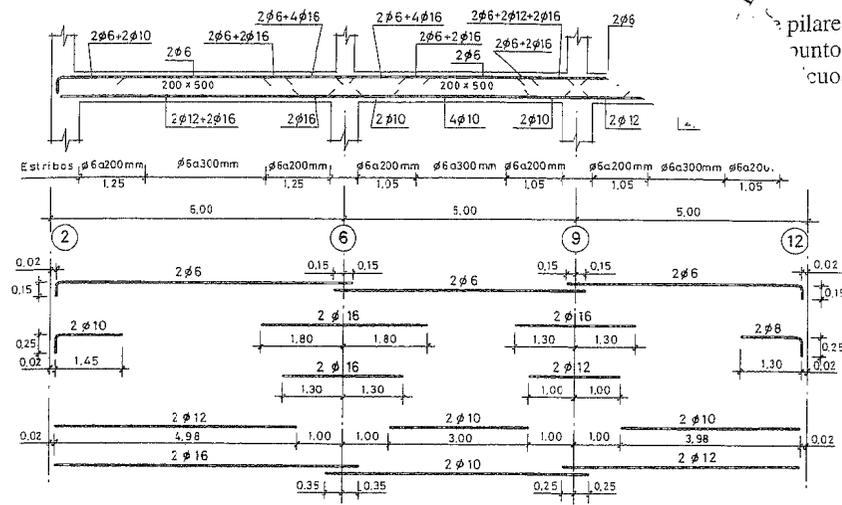


Figura 58-5

- La armadura de montaje de  $2 \phi 6$  se solapa en las zonas de momentos negativos, de forma que pueda ser tenida en cuenta para absorber dichos momentos.
- La armadura de momentos positivos, al llegar a los pilares interiores no necesita realmente ser solapada, salvo que existan esfuerzos horizontales importantes. Basta anclarla de acuerdo con lo visto en el capítulo 44. De todas formas, es frecuente que se solape con la del vano siguiente.
- Si en un nudo se produce un cambio de canto, el esquema es el indicado en la figura 58.6.

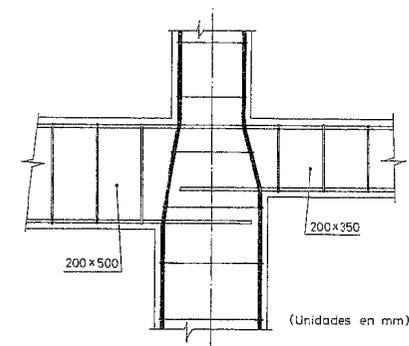


Figura 58-6

- El sistema permite un montaje previo en taller de la mayor parte de la ferralla. Tal como se indica en la figura 58-7 se preparan las "jaulas" 1, 2 y 3 y una vez colocada en el encofrado, los refuerzos de momentos negativos del tipo *a* y *b* (que van atados provisionalmente a una de las dos "jaulas" contiguas) se introducen en la posición *AB* y luego se atan con alambre en su posición definitiva.

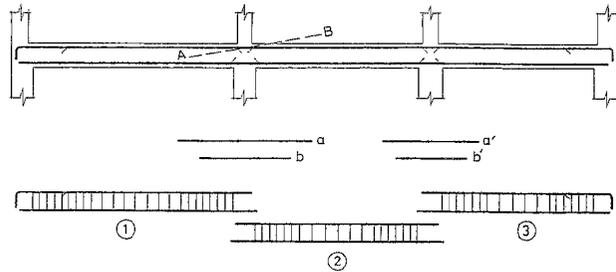


Figura 58-7

La solución de barras dobladas se indica en la figura 58-8.

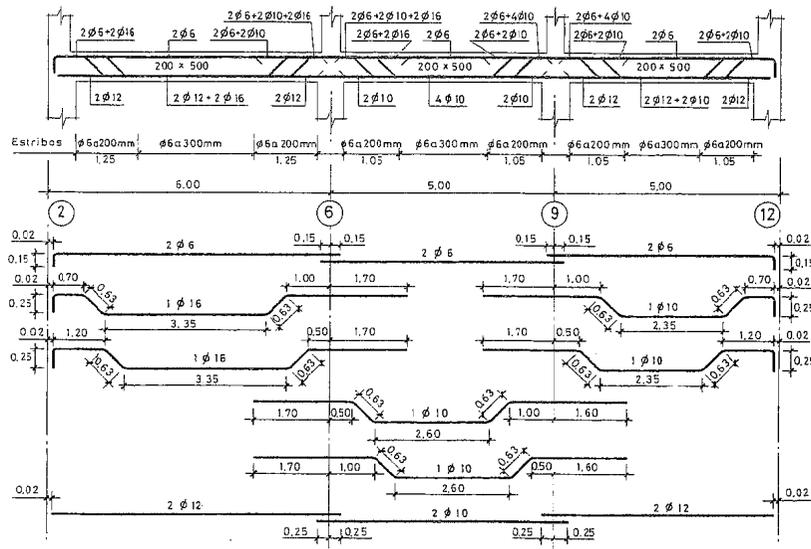


Figura 58-8

Es claro que esta solución, aparte de incluir un mayor número de barras dobladas, no permite una prefabricación de jaulas como la indicada en la figura 58-6 y de hecho obliga a montar la ferralla, en su mayor parte, junto al encofrado.

Para la representación de los pilares en este caso, véase el capítulo 51.

### 58.3.2. DINTELES DE UN SOLO VANO

Un caso típico es el indicado en la figura 58-9. En este caso la armadura de pilares suele indicarse en el mismo plano. Los nudos extremos son siempre puntos conflictivos y si los esfuerzos son importantes conviene disponer estribos oblicuos como se indica en el detalle A.

### 58.3.3. BROCHALES

En la figura 58-10 se indica el caso correspondiente.

### 58.3.4. VOLADIZOS

La solución habitual es la de canto constante, indicada en la figura 58.11.

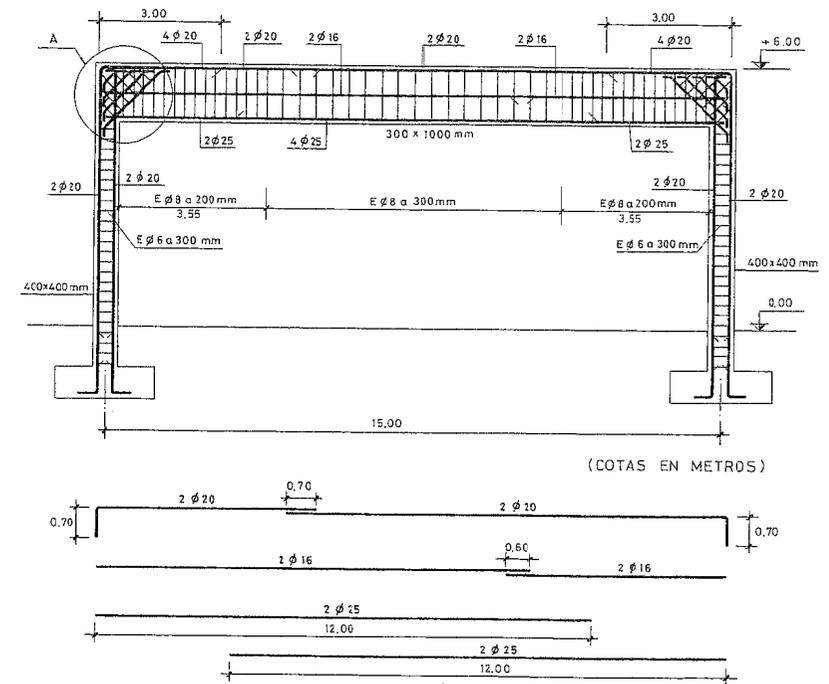


Figura 58-9

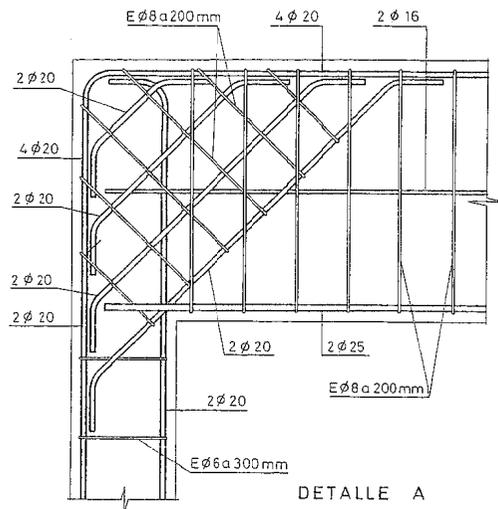


Figura 58-9 (Cont.)

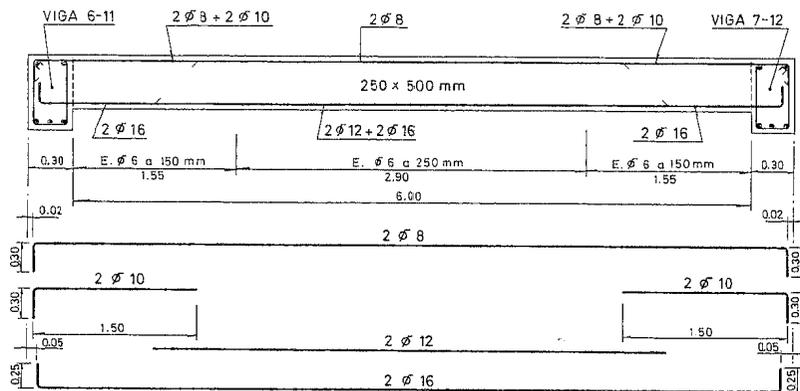


Figura 58-10

Debe prestarse atención especial al anclaje de la armadura en el extremo del voladizo, determinando la longitud  $l$  de acuerdo con lo visto en el capítulo 37. Este punto debe cuidarse sobre todo si existen cargas puntuales en el extremo del vuelo.

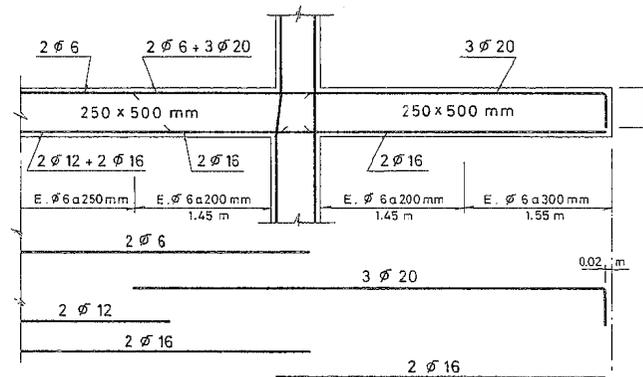


Figura 58-11

En el caso de canto variable (fig. 58-12), la longitud del anclaje exige, como vimos en el capítulo 37, un cuidado complementario. El canto variable puede tener ventajas estéticas, pero rara vez las tiene económicas, pues complica mucho la ejecución de estribos, que son todos diferentes.

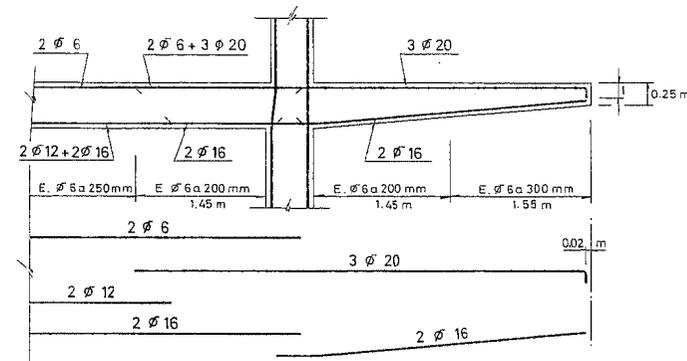


Figura 58-12

### 58.3.5 DINTELES QUEBRADOS

Resultan necesarios en ciertos tipos de escaleras. Un esquema habitual es el indicado en la figura 58-13.

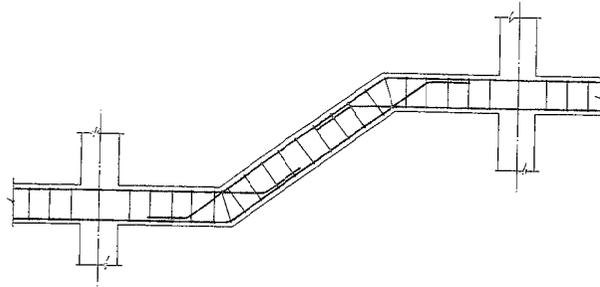


Figura 58-13

Aparecen aquí dos problemas nuevos: Por un lado, al mantener los estribos en el tramo inclinado formando ángulo recto con la directriz, es necesario en los quiebros solapar las series de estribos para no dejar una zona de pieza sin ellos.

Por otro lado, en los quiebros las armaduras en tracción deben pasar a anclarse en las caras opuestas (fig. 58-14), para evitar el empuje al vacío  $T$ , de las armaduras, que expulsaría el recubrimiento de la zona  $A$ . Si la solución de puntos no es posible, por alguna razón en particular, deben disponerse estribos especiales que transfieran el esfuerzo  $2 T \cos \alpha$  a la armadura de la cara convexa a la opuesta.

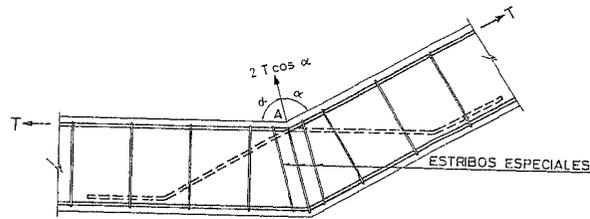


Figura 58-14

En algunos tipos de dinteles quebrados u oblicuos pueden aparecer detalles como los indicados en la figura 58-15. La solución a), con el ángulo agudo  $A$ , puede dificultar el desencofrado de los tableros de fondo de la viga inclinada. La solución b) es preferible.

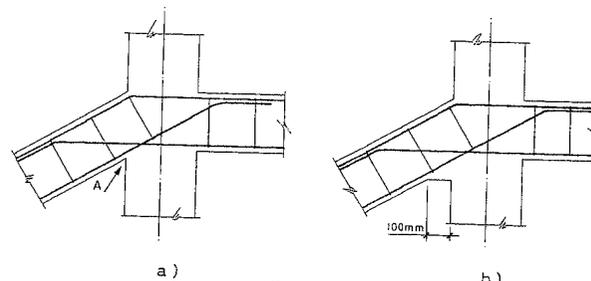


Figura 58-15

### 58.3.6 NUDOS

En todo este capítulo no se han detallado los nudos de encuentro de pilares dinteles. El tema fue tratado en el capítulo 51.

### 58.3.7 SECCIONES

Los esquemas aquí indicados no eximen de la necesidad de que en los planos indiquen las secciones transversales necesarias, con indicación de recubrimiento dimensiones de estribos, etc., de acuerdo con lo expuesto en el capítulo 51.

En el caso particular de que se disponga la armadura de la vigas en varias capa ello debe indicarse en los alzados del dintel y en las secciones necesarias.

## BIBLIOGRAFÍA

- (58.1) CALAVERA, J; GONZÁLEZ VALLE, E; FERNÁNDEZ GÓMEZ, VALENCIANO, F; "Manual de Ferralla" ANIFER, Madrid. 1997.
- (58.2) CALAVERA, J; "Manual de Detalles Constructivos en Obras de Hormigón Armado INTEMAC. Madrid. 1993.

## CAPÍTULO 59

### VIGAS PLANAS, VIGAS PARED

#### 59.1 VIGAS PLANAS. INTRODUCCIÓN.

El sistema de vigas planas se ha desarrollado en los últimos años de manera considerable<sup>1</sup>. La razón básica es que unido a forjados de igual canto que las vigas constituye una alternativa de los forjados sin vigas, en cuanto a conducir a techos planos, sin la rigidez que este sistema presenta para la distribución de pilares en planta.

La ventaja citada es evidente, pero no debe olvidarse que con las vigas usuales, con canto apreciable y ancho pequeño, el ancho de la viga es escasamente importante frente a la luz del forjado. Esto frecuentemente no es así con las vigas planas. Algunos proyectistas asocian este sistema (fig.59-1) a los forjados de forma incorrecta, calculando éstos con la luz  $l_f$  libre entre vigas, como simplemente apoyados, es decir, con un momento  $M_d = \frac{1}{8} \gamma_f \cdot p \cdot l_f^2$ , siendo  $p$  la carga

uniformemente repartida y disponiendo en todo caso una pequeña armadura nominal de momentos negativos.

Para poder realizar así el cálculo, es necesario transmitir el cortante  $V_{dl} = \frac{1}{2} \gamma_f \cdot p \cdot l_f$ , que es la reacción del vano de luz  $l_f$ , en los apoyos  $C$  y  $D$ , a los ejes  $A$  y  $B$  de los apoyos, lo cual produce en dichos apoyos un momento flector negativo (fig. 59-1).

<sup>1</sup> Es habitual en España y bastante menos en Francia e Italia. En la mayoría de los países es poco usado.

$$M_d = -V_{di} \cdot \left( \frac{\ell - \ell_1}{2} \right) = -\gamma_f p \frac{\ell_1}{4} (\ell - \ell_1) \quad [59.1]$$

y eso exige la armadura de momentos negativos correspondiente en la cara superior de la viga plana.

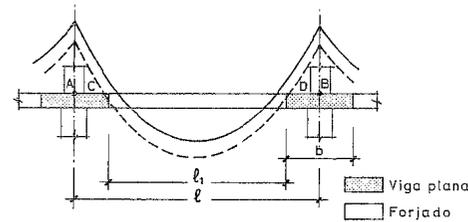


Figura 59-1

En realidad, debe considerarse que este sistema, si se calcula correctamente conduce al mismo consumo de armaduras que el cálculo habitual con luz total  $\ell$ . En efecto, aún suponiendo el vano de luz  $\ell_1$  apoyado en  $C$  y  $D$ , el momento en vano será:

$$M_{vd} = \frac{1}{8} \gamma_f p \ell_1^2$$

y el momento en apoyo, considerando la carga uniforme sobre el tramo  $DB$ , resulta

$$M_{ad} = \gamma_f \frac{p \ell_1}{2} \cdot \frac{\ell - \ell_1}{2} + \gamma_f p \frac{\left( \frac{\ell - \ell_1}{2} \right)^2}{2} = \frac{\gamma_f p \ell^2}{8} - \frac{\gamma_f p \ell_1^2}{8}$$

y por tanto

$$M_{vd} + M_{ad} = \frac{\gamma_f p \ell^2}{8} \quad [59.2]$$

y en definitiva no se hace más que trasladar hacia abajo la ley de momentos. La relación de momento de apoyo a momento isostático resulta

$$\frac{M_{ad}}{\gamma_f p \ell^2} = \frac{\frac{\gamma_f p \ell^2}{8} - \frac{\gamma_f p \ell_1^2}{8}}{\frac{\gamma_f p \ell^2}{8}} = 1 - \left( \frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 \quad [59.3]$$

Como la Instrucción EF no permite en forjados una redistribución superior a igualar los momentos de apoyo y vano se tiene

$$1 - \left( \frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 > 0,5 \quad [59.4]$$

o bien

$$\ell_1 \leq 0,7 \ell \quad [59.5]$$

que es lo mismo que exigir

$$b > 0,3 \ell \quad [59.6]$$

ancho muy superior al necesario y admisible en la mayoría de los casos.

Por tanto, el sistema, si se ignora la necesidad de cubrir el momento negativo [59.1], es gravemente inseguro. Si no se ignora, salvo que  $b > 0,3 \ell$  (lo que es muy improbable), conducirá a una redistribución fuera de normas que puede producir fisuración excesiva en la cara superior de las vigas planas.

En resumen, el sistema adecuado es calcular el forjado con la luz entre ejes de apoyos.

Otro punto importante a recordar es que la escasez de canto de las vigas las hace muy sensibles a los errores de posición de las armaduras y propicias a presentar en servicio deformaciones excesivas.

## 59.2 DIMENSIONAMIENTO

No presenta en general problemas especiales, salvo en los puntos siguientes:

a) En el cálculo a flexión es frecuente tener que recurrir a armadura de compresión.

Es recomendable que el ancho de una viga plana no exceda el ancho del pilar más de  $1,5 h$  a cada lado, siendo  $h$  el canto de la viga<sup>1</sup>.

b) Debe prestarse atención al cálculo a esfuerzo cortante, en varios sentidos.

En primer lugar, consideremos la viga plana indicada en planta en la figura 59-2, en la que se indican las armaduras longitudinales. En principio hay que aceptar que el peso propio de la viga, las cargas que actúan sobre ella, y también la carga total transmitida por el forjado, se repartirán en el ancho  $b$ . En las vigas normales, de ancho despreciable, la carga total puede suponerse actuando en su plano medio, y se encauza hacia los pilares siguiendo los caminos 1 y 1'.

<sup>1</sup> Como veremos en el Capítulo 67, en zonas sísmicas la limitación es mucho más estricta y de hecho desaconseja este tipo de vigas para zonas sísmicas.

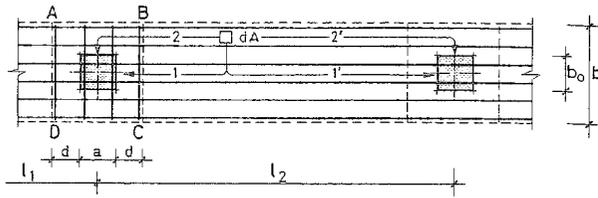


Figura 59-2

Pero en nuestro caso el camino real se parecerá más al 2 y 2'. Ello equivale a suponer la viga de ancho  $b$  como compuesta por múltiples vigas paralelas independientes, que totalizan el ancho  $b$ , y se apoyan en ménsulas virtuales  $ABCD$ , formadas en cada pilar por un ancho  $a + 2d$ , siendo  $a$  el ancho del pilar en la dirección de la viga y  $d$  el canto útil. Por tanto, dichas ménsulas virtuales (fig. 59-3) deben calcularse con un vuelo  $\frac{b-b_0}{2}$  y sometidas a una

carga uniformemente repartida en ese vuelo, de valor total  $R_d \frac{b-b_0}{2}$ , donde  $b_0$  es el ancho del pilar en sentido transversal,  $b$  el de la viga,  $R_d$  la reacción total de cálculo sobre el pilar de los dos vanos de luces  $l_1$  y  $l_2$  que concurren en él (fig. 59-2).

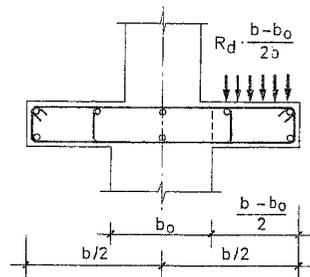


Figura 59-3

La función de absorber el momento producido en estas ménsulas puede ser desempeñada por las ramas horizontales de los estribos situados en el ancho  $a+2d$  de la ménsula virtual.

Cumplido lo anterior, la viga puede calcularse a esfuerzo cortante en la forma habitual, excepto por lo que se verá en  $d$ .

Las vigas planas cuyo ancho excede al del pilar en más de  $\frac{h}{2}$  a cada lado,

siendo  $h$  el canto del forjado deben comprobarse a punzonamiento de acuerdo con lo expuesto en el capítulo 41.

c) El cálculo de deformaciones debe hacerse en este tipo de vigas con especial cuidado. Con las vigas normales, la flecha del forjado es prácticamente la suya propia, pues puede suponerse que los descensos de sus apoyos en las vigas son despreciables en la mayoría de los casos. En cambio con vigas planas la situación puede ser diferente, tal como se indica en la figura 59-4.

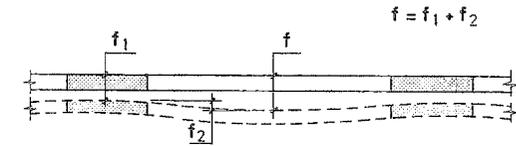


Figura 59-4

Una forma de reducir la flecha de las vigas planas, es emplear armadura de compresión, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo 48 y en particular con la fórmula [48.12].

d) El enlace del forjado a la viga requiere detalles especiales. La forma habitual es la indicada en la figura 59-5 para un forjado de viguetas con armaduras salientes, que deben doblarse para que pasen por encima de la armadura de esquina de la viga. Para viguetas sin armadura saliente, la solución adecuada es la indicada en la figura 59-6 en la que la armadura de la viga se desplaza del ángulo del estribo para permitir la entrada de la viga. La reacción de la vigueta sobre la viga se introduce por la mitad inferior del canto de la viga y por lo tanto los estribos situados a cada lado de la vigueta deben, además de resistir el esfuerzo cortante, "colgar" la reacción de la vigueta.

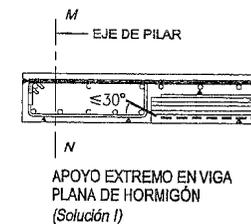


Figura 59-5

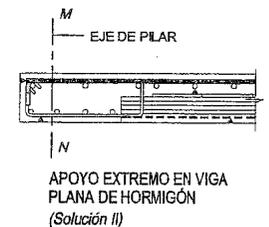


Figura 59-6

Obsérvese en las figuras 59-5 y 59-6 que, a efectos de cálculo del forjado, el eje de apoyo es el  $MN$  del pilar. La longitud de anclaje de la armadura del forjado en la viga, si ésta excede en ancho apreciablemente al pilar, puede estar situada en una zona de momento flector positivo apreciable y en ese caso debe considerarse la traslación de momentos debida al esfuerzo cortante, de acuerdo con lo expuesto en 39.23.2.1.

En vigas planas, los estribos deben ser dimensionados para resistir el cortante y suspender la carga, de acuerdo con lo que se expuso en 39.2.11.

e) Cuando se emplean vigas planas debe tenerse un cuidado especial con los problemas siguientes:

e-1) *Pilares de última planta*: El anclaje de la armadura (Fig. 59-7) suele ser problemático.

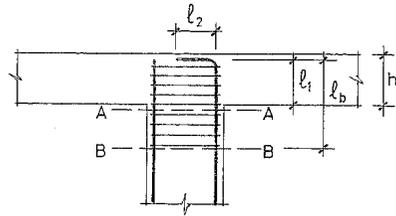


Figura 59-7

Si se trata de barras en tracción (cosa poco frecuente salvo en pilares de fachada) la longitud de anclaje  $l_b$  puede conseguirse mediante una longitud  $l_2$  adicional a la  $l_1$  disponible.

Si se trata de barras que están o pueden estar en compresión y como es usual  $l_1 < l_b$  la seguridad en secciones superiores a la B-B, tales como la A-A es insuficiente, pues las barras no han desarrollado todavía su capacidad mecánica por adherencia. Una solución es emplear diámetros bajos para que  $l_b \leq l_1$ , lo que suele ser poco práctico. Otra es sobredimensionar la sección del pilar de esa planta. La solución de disponer estribos soldados de acuerdo con la solución de anclaje por transversales soldadas vistas en el capítulo 44 puede ser también interesante. Si no se hace así conviene reforzar la secuencia de estribos en la longitud  $l_b$ .

e-2) *Pilares de plantas intermedias*. Si no se puede hacer la transición curvando las barras porque  $\text{tg } \alpha \geq \frac{1}{6}$

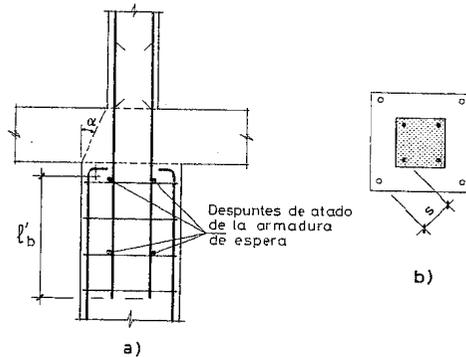


Figura 59.8

una solución práctica es la indicada en la figura 59-8. La longitud de solape  $l'$ , debe calcularse de acuerdo con la separación  $s$  de barras (Fig. 59-8) y disponerse la armadura transversal de solape de acuerdo con lo expuesto en 44.17.

f) Algunas dificultades de nudos de vigas planas se indicarán en el capítulo 51.

### 59.3 VIGAS PARED

Se denominan vigas pared, o vigas de gran canto, aquellas en las que por su elevada relación de canto a luz, dejan de ser aceptables las hipótesis habituales de las piezas lineales, en especial la de Bernoulli relativa a la conservación de las secciones planas. Son por tanto zonas D (Capítulo 33). (Fig. 59-9)

La Instrucción EHE define como vigas pared aquellas que, siendo de sección constante, tienen una luz no superior a dos veces el canto en el caso de vigas simplemente apoyadas y a dos veces y media el canto en el caso de vigas continuas.

A los efectos de cálculo se considerará como luz de cada vano la menor de las longitudes siguientes:

- La luz entre ejes de apoyos.
- 1,15 veces la luz libre del vano.

En las vigas pared la sección suele ser muy holgada en cuanto a la resistencia a flexión, pero no suele serlo tanto a corte. Por otro lado son piezas propicias a presentar problemas de inestabilidad transversal. Por todo ello EHE establece (fig. 59-9) las condiciones siguientes:

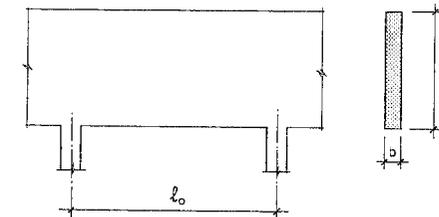


Figura 59-9

- a) El ancho mínimo se deduciría de la condición de agotamiento de las bielas comprimidas.
- b) La inestabilidad lateral debe comprobarse adecuadamente.

Un método simplificado para ello es el siguiente:

En vigas de uno o varios vanos de igual luz sometidas a carga  $q_d$  uniformemente repartida.

$$b \geq \frac{l_0}{8} \sqrt[3]{\frac{q_d}{f_{cd} \cdot h}} \quad [59.7]$$

donde  $l_0$  es la luz libre.

Si la viga no está sometida a cargas uniformemente repartidas, la condición [59.7] no es válida y conviene rigidizar transversalmente la viga. La condición [59.7] no es necesaria en el caso de cargas uniformemente repartidas si existe rigidización transversal.

a) *Cálculo de vigas de un solo vano*

En el capítulo 33 se expresan las redes tensionales y los esquemas adecuados para este caso. Los casos fundamentales se tratan a continuación.

a-1) *Dimensionamiento de las armaduras*

El esquema de bielas y tirantes se indica en la figura 59-10 y de acuerdo con ello se toma como valor de  $T_d$ :

$$T_d = 0,21 R_d = 0,21 P_d \cdot \ell \quad [59.8]$$

con  $f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2$

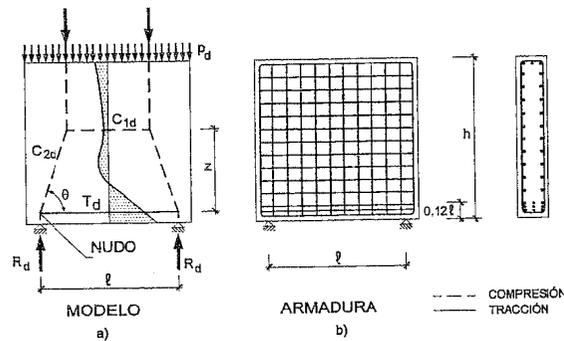


Figura 59-10

a-2) *Comprobación de los nudos*

La comprobación del nudo de apoyo se realiza de acuerdo con lo indicado en el Capítulo 33, con las distintas posibilidades de solución que allí se expusieron y con las recomendaciones de anclaje que también allí se indicaron.

a-3) *Comprobación de las bielas*

La comprobación de la biela que arranca del nudo de apoyo es conforme si:

$$\frac{R_d}{ab} \leq 0,70 f_{cd} \quad [59.9]$$

(a,b, dimensiones de apoyo) de acuerdo con lo visto en el Capítulo 33. (Para cargas muy altas, véase el Capítulo 60). Esta comprobación exime ya de la comprobación de la biela.

a-4) *Armaduras secundarias*

Además de la armadura  $A_{st} = \frac{T_d}{f_{yd}} \quad [59.10]$

debe disponerse, en cada cara, un emparrillado de cuantía geométrica 1 ‰. Si las cargas de reacción son muy altas, pueden requerirse emparrillados de acuerdo con lo que se indica en el Capítulo 60.

b) *Cálculo de vigas continuas*

Los esquemas de bielas y tirantes se indican en la figura 59-11 para el caso de dos vanos y en la figura 59-12 para el caso de más de dos vanos.

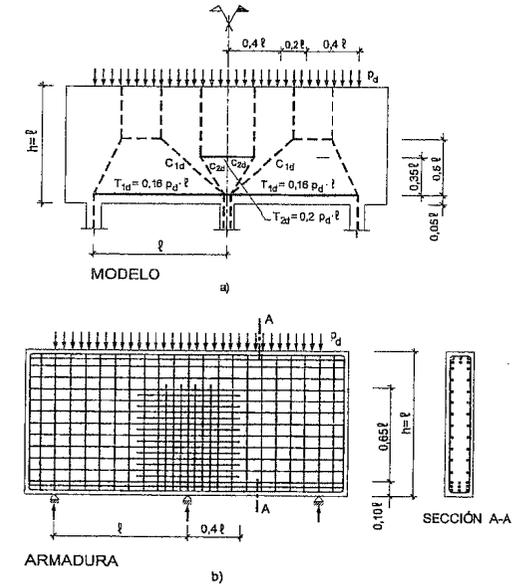


Figura 59-11

Figura 59-12

En ellas se indican los valores de las armaduras  $T_{1d}$  y  $T_{2d}$  y para estas últimas la longitud y altura de reparto.

La comprobación de nudos, bielas y anclajes se hace en forma idéntica a la indicada en a).

c) *Caso de cargas aplicadas en el borde inferior*

Si la carga se aplica al borde inferior la viga se dimensiona como en a) y b), pero además se disponen estribos de suspensión que transmitan la carga a una altura mínima igual a  $h$  o  $\ell$ , la que sea menor (Fig. 59-13)

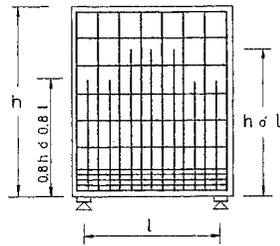


Figura 59-13

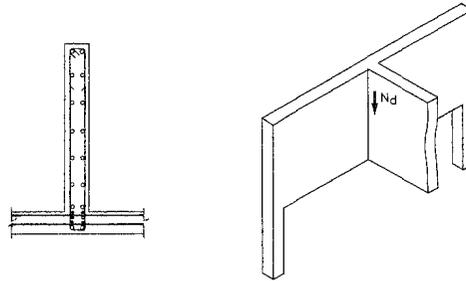


Figura 59-14

d) *Cargas de aplicación indirecta.*

En edificios del tipo de los que expusimos en el capítulo 23, se produce con frecuencia el caso de vigas pared cargadas a lo largo de su altura, generalmente por diafragmas transversales (Fig. 59-14).

En este caso se debe disponer una armadura de suspensión que equilibre la carga  $N_d$  anclada hasta una altura  $h$  o  $\ell$ , la que sea menor. Si la carga es importante, puede disponerse una armadura levantada del tipo indicado en la figura 59-15, sin que con ella se absorba más del 60 % del valor  $N_d$ .

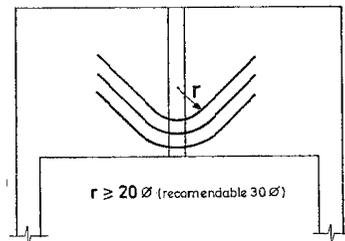
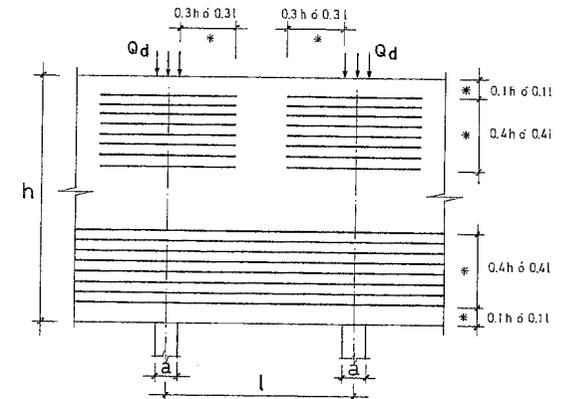


Figura 59-15

e) *Cargas concentradas en la vertical de los apoyos*

Si existen cargas aplicadas directamente sobre los apoyos, y si no hay diafragmas o nervios transversales que aseguren la transmisión directa de dichas cargas a los apoyos, es necesario disponer una capacidad mecánica de armadura horizontal complementaria de alma, repartida de acuerdo con lo que se indica en la figura 59-16, siendo la capacidad mecánica de cada una de las dos bandas no inferior a  $Q_d/4$ .



\* Tomar el menor de los valores indicados

Figura 59-16

Si el apoyo es continuo, el esfuerzo cortante de cálculo se incrementará en el valor

$$\frac{Q_d}{2} \cdot \frac{h-2a}{h} \geq \frac{Q_d}{2} \cdot \frac{\ell-2a}{\ell} \quad [59-11]$$

Si el apoyo es extremo, el esfuerzo cortante de cálculo se incrementará en

$$Q_d \cdot \frac{h-a}{h} \geq Q_d \cdot \frac{\ell-a}{\ell} \quad [59-12]$$

BIBLIOGRAFÍA

(59.1) BAES, R. "Tablas para el Cálculo de Placas y Vigas Pared". Gustavo Gili. Barcelona. 1981.

## CAPÍTULO 60

### TIRANTES. MÉNSULAS CORTAS. MACIZOS DE APOYO

#### 60.1 TIRANTES

Los tirantes son piezas de uso relativamente restringido en estructuras de edificios. Sin embargo, en ciertas ocasiones es necesario su empleo.

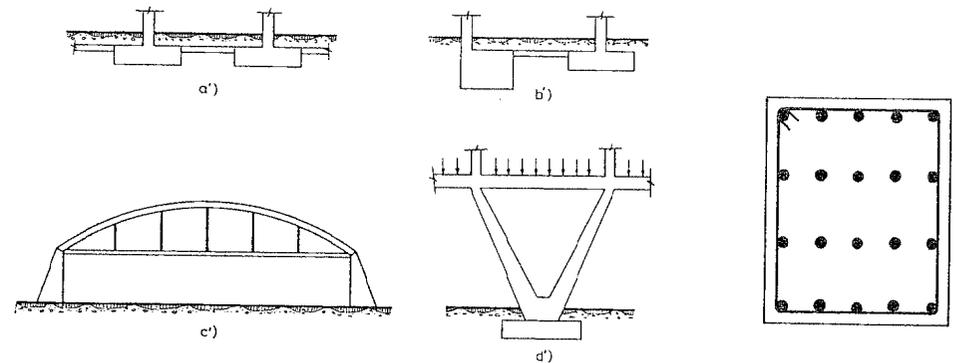


Figura 60-1-a

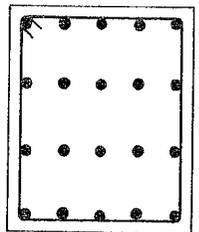


Figura 60-1-b

En la figura 60-1-a se representan algunos casos. En el caso a') el tirante ata dos zapatas, como es reglamentario en zonas de riesgo sísmico elevado. El caso b') corresponde a un tirante de centrado de reacción de una zapata de medianería. de

luz igual a la de la nave, los esfuerzos de flexión debidos al peso propio serían muy importantes. Habitualmente el tirante acorta su luz de flexión mediante el empleo de péndolas. Aún así, la pieza está sometida a esfuerzos de tracción y flexión. En el caso de la figura 60-1-a-d'), el tirante funciona como dintel, uniendo las puntas de un soporte en V. Aunque usualmente, en estos casos, la tracción es predominante, las flexiones pueden ser importantes.

Habitualmente, los tirantes se resuelven con piezas de sección rectangular. Si el número de barras es elevado (fig. 60-1-b)), debe prestarse atención específica a sus posibilidades de hormigonado.

En el capítulo 34 se indicaron los métodos de dimensionamiento para hormigón armado y hormigón pretensado y se dieron las disposiciones constructivas particulares, que se complementan con las generales del Capítulo 51. Sin embargo, conviene considerar además los siguiente:

- Usualmente los anclajes de la armadura en los extremos se hacen por adherencia. Recuérdense las reglas del Capítulo 44 para el anclaje simultáneo de toda la armadura.
- Si la longitud total de barras supera los 12 m, salvo que se encarguen barras de longitud especial (lo que requiere un plazo también especial de suministro), será necesario proceder al empalme de barras. EHE no indica nada al respecto, por lo que se entiende que se permite el empalme por solapo. ACI 318-95 (60.1) no lo permite y obliga a realizar el empalme, bien por soldadura, bien por conexiones mecánicas. Si se decide realizar los empalmes por solapo, éstos deben distanciarse tanto como sea posible y solaparse en la misma sección el mínimo número posible de barras. Aún así, es conveniente que la tracción transversal se absorba *íntegramente* con estribos.
- Atención muy particular requiere el problema de la armadura de esfuerzo cortante, si la pieza está también sometida a flexión. Los métodos correspondientes se expusieron en el Capítulo 39 y allí se analizó la posible colaboración del hormigón en la resistencia de los esfuerzos cortantes.
- Los tirantes son piezas delicadas desde el punto de vista de la durabilidad. Las condiciones de fisuración deben ser cuidadosamente comprobadas.
- Dado que son piezas con cuantías altas, son especialmente sensibles al fuego. Véase el Anejo 3.

La figura 60-2 muestra una interesante realización.

## 60.2 MÉNSULAS CORTAS

Denominamos ménsulas cortas a aquellas en las que la distancia  $a$  (fig. 60-3 b)) es menor o igual que el canto útil  $d$ . La teoría de cálculo que se expone a continuación es la adoptada por la Instrucción EHE, que coincide completamente, en esto, con la Norma ACI 318-95 y sus ediciones anteriores. Esta teoría está basada en numerosos ensayos, entre los cuales deben destacarse los de FRANZ y NIEDENHOFF (60.2), en la Cement and Concrete Association de Inglaterra, y los de KRIZ y RATHS en Estados Unidos (60.3).

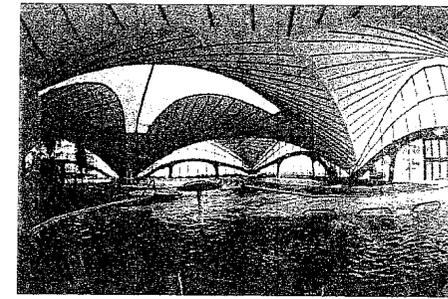


Figura 60-2

Cubierta de la talasoterapia Canarias. Arquitecto: Dr. Luis F. López Díaz.  
(La cubierta es de una extraordinaria esbeltez (1/766). Las reacciones en el terreno están compensadas con tirantes de hormigón armado con barras soldadas que fueron hormigonadas después de la entrada de éstos en carga para controlar la fisuración.)

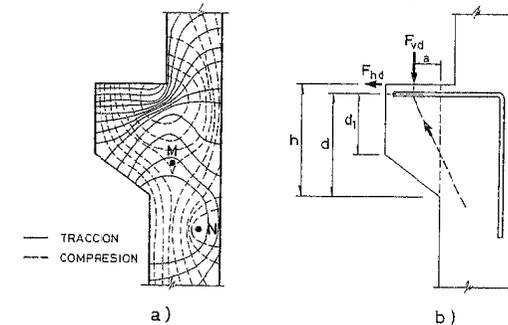


Figura 60-3

Debe quedar claramente establecido que todo lo que sigue sólo es aplicable a ménsulas con relación  $\frac{a}{d} \leq 1$ , que es el campo analizado en los ensayos de base. Las ménsulas con  $a > d$  (muy poco frecuentes), han sido poco investigadas. Puede obtenerse información sobre el tema en la referencia (60.4)<sup>1</sup>.

La figura 60-3 a) muestra resultados de redes de isostáticas obtenidas en los ensayos fotoelásticos de FRANZ y NIEDENHOFF (60.2) y demuestran claramente que las tracciones son sustancialmente horizontales.

El mecanismo esencial de rotura en un giro alrededor de un punto como el A de la figura 60-4 y es evidente que tal giro sólo permite agotar una armadura de corte sensiblemente paralela a la de tracción,  $A_s$ .

<sup>1</sup> Tales ménsulas "largas", en lugar de necesitar sólo estribos horizontales, como veremos que ocurre con las cortas, necesitan estribos verticales y horizontales.

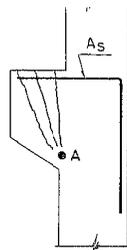


Figura 60-4

En la figura 60-5 se indican las diferentes formas de agotamiento que han sido puestas en evidencia por los ensayos. De acuerdo con ellos, debe cumplirse  $d_1 \geq 0,5 d$ , para evitar roturas prematuras por tensiones tangenciales.

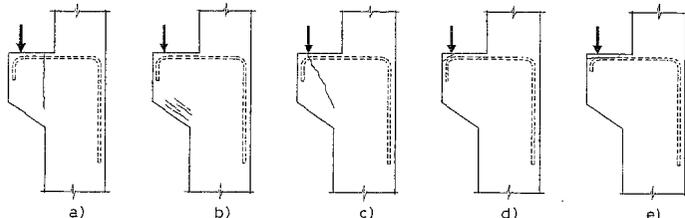


Figura 60-5

El caso a) corresponde al fallo normal en flexión con cuantías inferiores a la límite superior. El caso b) corresponde a un fallo por agotamiento directo de la cabeza comprimida sin agotamiento del acero. El caso c) es el correspondiente a un fallo por tensiones de corte excesivas. El caso d) es un tipo frecuente de fallo en ménsulas, especialmente si se intenta doblar la armadura de tracción en la cara de la ménsula. Si la carga está próxima al borde, puede producirse una cuña de rotura como la indicada en la figura 60-5 d). El fallo e) es debido al anclaje incorrecto de la armadura de tracción.

Los fallos de los tipos a), c) y d), de la figura 60-5, pueden presentarse más fácilmente si, como se indica en la figura 60-6 a) existe una fuerza horizontal  $F_{hd}$ . Existen diversas posibilidades de introducción de una fuerza de este tipo. En la figura 60-6 b) se indica el caso en que  $F_{hd}$  es debida al efecto horizontal de frenado de un puente-grúa. La figura 60-6 c) corresponde al caso en que una viga de hormigón es rígidamente unida a una ménsula (por ejemplo por soldadura de placas metálicas dispuestas en ambas piezas). Los acortamientos debidos a retracción y temperatura en la viga (o su acortamiento por retracción y fluencia si es una viga pretensada), inducen también una fuerza horizontal  $F_{hd}$ .

### 60.2.1 MÉTODO DE CÁLCULO DE EHE

Parte de la aplicación directa del método de bielas y tirantes (Fig. 60-7).

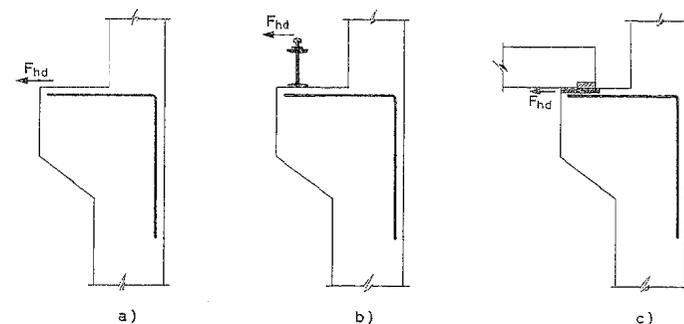


Figura 60-6

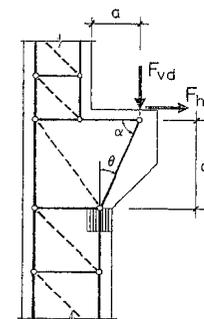


Figura 60-7

$$\text{De acuerdo con lo visto en el capítulo 39, } \cotg \alpha = \frac{a}{0,85 d} \geq \cotg \theta \quad [60.1]$$

donde:  $\cotg \theta = 1,4$  si se hormigona la ménsula monolíticamente con el pilar

$\cotg \theta = 1,0$  si se hormigona la ménsula contra la superficie de rugosidad A del pilar endurecido (Ver 40.4.2)

$\cotg \theta = 0,6$  si en el caso anterior la rugosidad es de tipo B

[60.1] equivale a  $\alpha \leq \theta$

El cálculo se realiza de acuerdo con lo indicado en el Capítulo 33 y en particular con el Ejemplo 33.1.

La única regla adicional, que como ya se dijo en el Ejemplo 33.1 no proporciona el método de bielas y tirantes es la de disponer estribos horizontales adecuados para resistir una fuerza total de tracción

$$T_d = 0,20 F_{vd} \quad [60.2]$$

y por tanto

$$A_{se} = \frac{0,20 F_{vd}}{f_{yd}} \quad [60.3]$$

con

$$f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2$$

Es recomendable situar la armadura  $A_{se}$  distribuida en una profundidad igual a  $\frac{2}{3}d$  a partir de la armadura de tracción.

### 60.2.2 MÉTODO DEL ACI

#### a) Dimensionamiento de la armadura de flexión

La armadura de flexión  $A_s$  se calcula para un momento flector (fig. 60-3 b)

$$M_d = a F_{vd} + (h - d) F_{hd} \quad [60.4]$$

y una tracción directa  $F_{hd}$ <sup>2</sup>. Si la acción  $F_{hd}$  se produce a una altura  $c$  (fig. 60-8), se tiene:

$$M_d = a F_{vd} + (c + h - d) F_{hd} \quad [60.5]$$

Si la fuerza  $F_{hd}$  no puede ser evaluada con precisión o no puede garantizarse su no existencia, se tomará un valor mínimo

$$F_{hd} = 0,2 F_{vd} \quad [60.6]$$

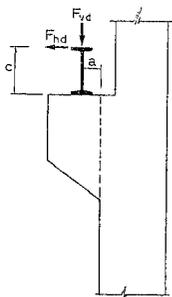


Figura 60-8

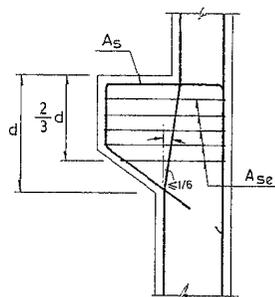


Figura 60-9

1  $F_{vd}$ ,  $F_{hd}$  son los valores de cálculo de las respectivas fuerzas.

2 Debe advertirse claramente que el método de EHE, coincidente en general con el del ACI 318-95 que aquí se expone, sólo es válido para  $F_{hd} \leq F_{vd}$ . No ha sido experimentado más allá de ese valor.

Al momento  $M_d$  le corresponderá una armadura de área  $S_{sf}$ , que se determina por los procedimientos generales del Capítulo 36.

A la tracción horizontal  $F_{hd}$ , le corresponderá una armadura

$$A_{sh} = \frac{F_{hd}}{f_{yd}} \quad [60.7]$$

La armadura total  $A_s$  (fig. 60-9) será el mayor de los valores

$$A_s = A_{sf} + A_{sh} \quad [60.8]$$

$$A_s = \frac{2}{3} A_{sv} + A_{sh} \quad [60.9]$$

$$A_s = 0,004 b d \quad [60.10]$$

donde  $A_{sv}$  es la armadura necesaria para resistir el esfuerzo cortante y  $b$  el ancho de la ménsula.

#### b) Dimensionamiento de la armadura de esfuerzo cortante

La armadura total necesaria para resistir el esfuerzo cortante se determina aplicando la teoría de corte-fricción expuesta en 39.2.8. De acuerdo con la fórmula [39.105], y llamando  $s$  a la separación entre estribos y  $A_{st}$  al área de uno de ellos (dos ramas), se tiene:

$$\tau_d = \frac{F_{vd}}{b d} \leq \frac{A_{st} f_{yd}}{b s} (\mu \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)$$

de donde

$$A_{st} \frac{d}{s} \geq \frac{F_{vd}}{f_{yd} (\mu \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)}$$

y llamando  $A_{sv}$  al área de armadura total de estribos

$$A_{sv} \geq \frac{F_{vd}}{f_{yd} (\mu \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad [60.11]$$

Los valores de  $\mu$ , de acuerdo con lo dicho en 39.2.8 son:

$\mu = 1,4$  para hormigón de la ménsula vertido al mismo tiempo que el del pilar.

$\mu = 1$  para el caso en que haya junta de hormigonado entre ménsula y pilar y la superficie del hormigón endurecido cumpla lo indicado para rugosidad A.

1 EHE emplea para  $\mu$  la notación  $\cotg \theta$ , que es, en definitiva, el coeficiente de rozamiento ficticio expresado en 39.2.8 para el estado de corte-fricción.

$\mu = 0,6$  para el caso anterior, pero con rugosidad  $B$  de la superficie del hormigón endurecido.

En [60.11]  $\alpha$  es el ángulo de la armadura de corte con la vertical.

La tensión  $\tau_d = \frac{F_{vd}}{b d}$  debe cumplir la condición

$$\tau_d \leq 0,17 f_{ck} \approx 5,6 \text{ N/mm}^2 \quad (60.12)$$

El límite elástico de cálculo,  $f_{yd}$  del acero empleado, no se considerará superior a  $400 \text{ N/mm}^2$ .

Calculada el área total  $A_{sv}$  necesaria para resistir el esfuerzo cortante de cálculo  $F_{vd}$  por corte-fricción, deben colocarse estribos horizontales de acuerdo con lo que se indica a continuación:

- Si  $A_{sf} \geq 2 \frac{A_{sv}}{3}$ , se dispondrá un área de estribos horizontales

$$A_{se} = 0,5 A_{sf} \quad (60.13)$$

- Si  $A_{sf} < 2 \frac{A_{sv}}{3}$ , se dispondrá un área de estribos horizontales

$$A_{se} = \frac{A_{sv}}{3} \quad (60.14)$$

En definitiva, entre la armadura  $A_s - A_{sh}$  y la  $A_{se}$  se cubre siempre el estado de corte-fricción. La armadura  $A_{se}$  debe distribuirse uniformemente en los  $2/3$  superiores del canto útil, contados a partir de la armadura  $A_s$  (fig. 60-8).

### c) Anclaje de las armaduras

Las pequeñas dimensiones que habitualmente tienen las ménsulas hacen necesario verificar con especial cuidado las condiciones de anclaje. El anclaje de la armadura  $A_s$  en el pilar, en la dirección  $ABC$  (fig. 60-10 a)), no plantea ningún problema nuevo. En cambio, el anclaje en la propia ménsula plantea problemas especiales. Como norma general y para evitar fallos como el que indicamos en el caso d) de la figura 60-5, es conveniente que el área de carga sobre la ménsula (fig. 60-10 a)) esté situada sobre la parte recta de  $A_s$  (es decir antes de iniciarse la curva de cambio de dirección) y, en todo caso, a no menos de  $50 \text{ mm}$  del borde de la ménsula. Si los diámetros empleados son finos, una solución práctica es bajar la armadura, anclándola a partir del punto  $M$  su longitud de anclaje,  $l_{b,ner}$ .

1 En ACI 328-95 se fija el límite de  $0,17 f_{ck}$ , pero no más de  $5,6 \text{ N/mm}^2$ . Es en definitiva una manera de limitar la compresión en las bielas.

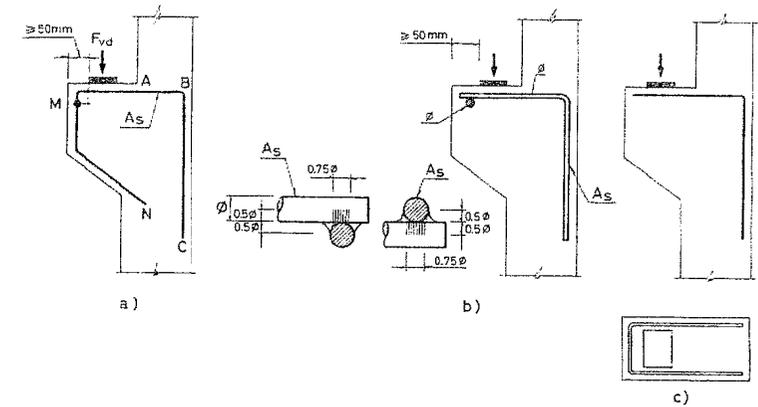


Figura 60-10

Si los diámetros son gruesos, esta solución no será factible. En ese caso, una solución eficaz es soldar la armadura a una barra transversal del mismo diámetro (fig. 60-9 b)). La soldadura debe ser realizada en taller y, de acuerdo con las instrucciones del Fabricante del acero, de forma que su resistencia al despegue no sea inferior a la capacidad mecánica de una barra. En la figura se indica una solución tomada de los trabajos de MATTOCK (60.5).

Aquí, dada la presión bajo la placa, es de especial interés lo expuesto en 44.15.1

Otra posible variante se indica en la figura 60-10 c).

El anclaje de los estribos horizontales (fig. 60-11) debe hacerse a partir del plano de la cara del pilar bajo la ménsula, siendo  $l_1 \geq l_{b,ner}$ . Frecuentemente, se hacen cerrados y se utilizan como estribos del pilar.

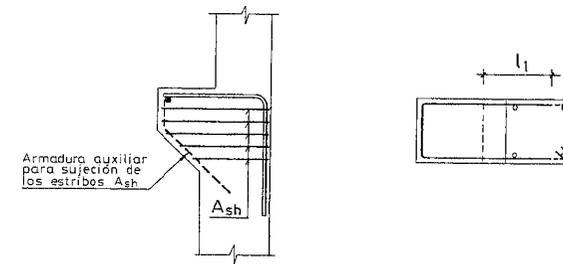


Figura 60-11

### d) Caso de cargas colgadas

Es un caso frecuente, bien, por ejemplo, por sujeción de cargas de carriles en cara inferior de ménsula (fig. 60-12 a)), bien por vigas carril del mismo canto que la ménsula (fig. 60-12 b)).

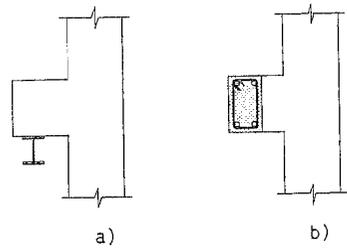


Figura 60-12

En cualquier caso, debe disponerse una armadura de suspensión que transmita la carga a la parte superior de la ménsula.

El reparto de la carga es siempre incierto y EHE establece que se suponga que una fracción de la carga igual a  $0,5 F_{vd}$  actúa en la parte superior. Para esa fracción, las armaduras  $A_s$  y  $A_{sv}$  se calculan de acuerdo con lo visto anteriormente.

— Otra fracción de la carga igual a  $0,6 F_{vd}$  se supone actuando en la parte inferior de la ménsula (fig. 60-13).

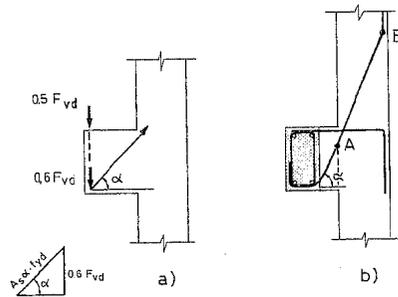


Figura 60-13

Esta fracción  $0,6 F_{vd}$  se resiste con una armadura inclinada un ángulo  $\alpha$  que, de acuerdo con el diagrama de fuerzas de la figura 60-13, deberá tener una sección

$$A_{sa} = \frac{0,6 F_{vd}}{f_{yd} \sen \alpha} \quad [60-15]$$

Su anclaje se inicia a partir del punto A. La distribución de la armadura  $A_{se}$  se realiza uniformemente en una profundidad igual a  $\frac{2}{3} d$ , como se dijo antes.

#### e) Otros tipos de ménsulas

En la figura 60-14 se indican dos tipos de ménsulas de empleo frecuente, la primera en edificios industriales y la segunda en prefabricación. La variante a) no

planea problemas especiales, pero en la b) debe extremarse el cuidado en la armadura de corte y en las comprobaciones de anclaje. Puede encontrarse información específica en LEONHARDT (60.6) y (60.7). Para el cálculo de apoyos, véase el Capítulo 11.

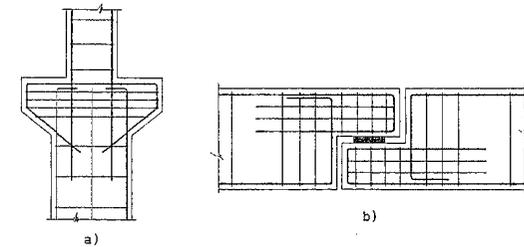


Figura 60-14

#### EJEMPLO 60.1

(Se aplica aquí el método del ACI. Véase el ejemplo 33.1 que aplica el método de bielas y tirantes).

Dimensionar la ménsula de la figura, con hormigón H-25, acero B 400S,  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ . La sección del pilar en el tramo superior está siempre comprimida (fig. 60-15). Ancho de ménsula 250 mm.

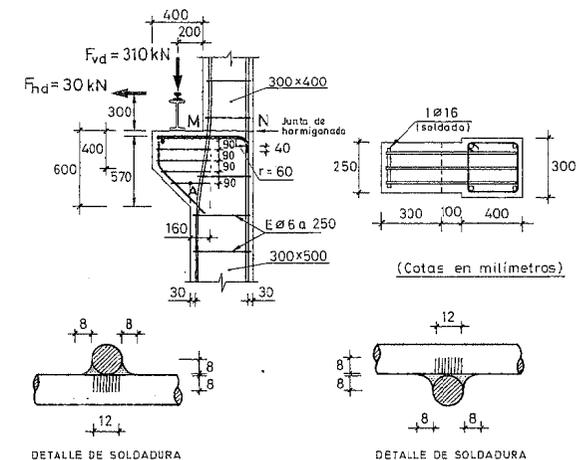


Figura 60-15

#### Solución

a) En primer lugar, comprobamos la aplicabilidad del método. Estimamos  $d = 570 \text{ mm}$ .

$$F_{hd} = 30 \text{ kN} < F_{vd} = 310 \text{ kN}$$

$$\tau_d = \frac{310.000}{570 \cdot 250} = 2,2 \text{ N/mm}^2$$

$$0,17 f_{ck} = 0,17 \cdot 25 = 4,25 \text{ N/mm}^2 > \tau_d$$

$$d = 600 - 30 = 570 \text{ mm} > a = 400 + 200 - 500 = 100 \text{ mm}$$

$$d_1 = 400 - 30 = 370 \text{ mm} > 0,5 d = 0,5 \cdot 570 = 285 \text{ mm}$$

b) Dimensionamiento de la armadura de flexión

$$M_d = 0,10 \cdot 310 + (0,30 + 0,6 - 0,57) \cdot 30 = 40,9 \text{ mkN}$$

$$A_{sh} = \frac{30.000}{\frac{400}{1,15}} = 84 \text{ mm}^2$$

Para sección con  $b = 250$ ,  $d = 570$ ,  $M_d = 40,9 \text{ mkN}$ , el ábaco GT.82, con

$$f_{cd} = \frac{25}{1,5} = 16,7 \text{ MPa}$$

$$\mu = \frac{40,9 \cdot 10^6}{16,7 \cdot 250 \cdot 570^2} = 0,03$$

a lo que corresponde  $\omega = 0,033$

$$U_s = 0,033 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 570 = 78,4 \text{ kN}$$

$$A_{sf} = \frac{78.400}{\frac{400}{1,15}} = 220 \text{ mm}^2$$

$$A_s = A_{sf} + A_{sh} = 304 \text{ mm}^2$$

c) Armadura de esfuerzo cortante. Con  $\alpha = 90^\circ$  y  $\mu = 1,4$

$$A_{sv} = \frac{310.000}{\frac{400}{1,15} \cdot 1,4} = 621 \text{ mm}^2$$

d) Armadura definitiva

$$A_s = A_{sf} + A_{sh} = 304 \text{ mm}^2$$

$$A_s = \frac{2}{3} A_{sv} + A_{sh} = 498 \text{ mm}^2$$

$$A_s = 0,004 bd = 570 \text{ mm}^2$$

Rige, por tanto,  $A_s = 570 \text{ mm}^2 \rightarrow 3 \phi 16$

y como  $A_{sf} = 220 \text{ mm}^2 < \frac{2}{3} A_{sv} = 414 \text{ mm}^2$ , el área de estribos horizontales resulta

$$A_{se} = \frac{A_{sv}}{3} = \frac{621}{3} = 207 \text{ mm}^2$$

que deben repartirse en  $\frac{2}{3} 570 = 380 \text{ mm}$ , a partir de la posición de  $A_s$ . Se adoptan

estribos  $\phi 6$  de dos ramas.

La longitud de anclaje de los estribos  $\phi 6$  de acuerdo con GT-133, teniendo en cuenta que  $A_{s,nec} = 207$  y  $A_{s,real} = 226$  y se está en Posición II por la junta de hormigonado  $MIN$ ,

$$l_{b,net} = \frac{207}{226} \cdot 18 = 160 \text{ mm}$$

El anclaje de la armadura  $A_s$  con  $\phi 16$  en Posición II, con  $l_1 = 400 - 30 = 370 \text{ mm}$  y  $l_{b,net}$ , de acuerdo con GT-133, de  $470 \text{ mm}$ .

$$l_{b,net} = 470 \cdot \frac{570}{603} = 440 \text{ mm} > l_1 = 370 \text{ mm}$$

probamos con patilla

$$370 \geq 0,7 \cdot 440 = 310 \text{ mm}$$

que resulta suficiente.

El anclaje en la ménsula se hace soldando sobre una barra de  $\phi 16 \text{ mm}$ . Los detalles se indican en la figura.

### 60.3 MACIZOS DE APOYO

Con cierta frecuencia, es necesario apoyar cargas localizadas en macizos de hormigón. Esta necesidad surge con especial frecuencia en el caso de edificios industriales y en obras públicas. En estos casos (fig. 60-16 a)) aparecen dos problemas diferentes. Por un lado, debe controlarse la tensión de contacto, que puede ser una compresión fuertemente localizada. Por otro lado (fig. 60-16 b)), la carga  $N$  produce

tracciones y compresiones transversales bajo su zona de aplicación, de acuerdo con el esquema de bielas y tirantes indicado en la figura 60-17, que pueden requerir la disposición de armaduras transversales.

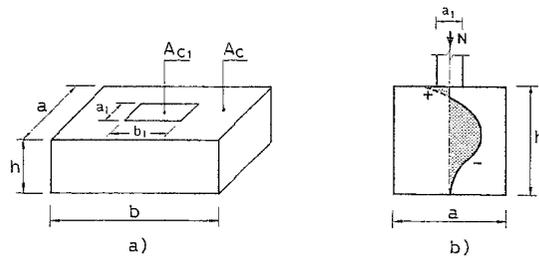


Figura 60-16

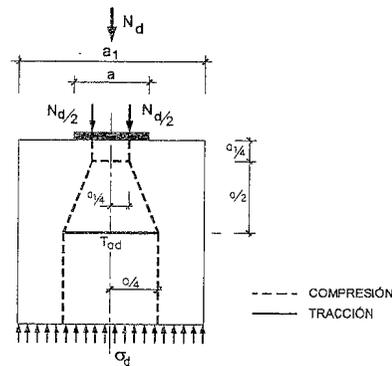


Figura 60-17

a) Tensión debida a la compresión localizada

Se controla a través del esfuerzo último  $N_u$ , dado por la fórmula (fig. 60-16 a))

$$N_u = A_{c1} f_{cd} \sqrt{\frac{A_c}{A_{c1}}} \geq 3,3 A_{c1} f_{cd} \quad [60.16]$$

debiendo cumplirse

$$N_d \leq N_u \quad [60.17]$$

Para que sean aplicables las fórmulas anteriores, el macizo no debe presentar huecos internos que reduzcan apreciablemente la resistencia y su espesor  $h$  cumplirá la condición

$$h \geq \frac{2 A_c}{u}$$

(METROS)

donde  $u$  es el perímetro de  $A_c$  (fig. 60.16 a))

Si las dos superficies  $A_c$  y  $A_{c1}$  no tienen el mismo real de  $A_c$  por otro homotético de  $A_{c1}$  (fig. 60-18) y limita. máxima posible de las que tienen su c.d.g. en el punto de apl. comprobación,  $A_c$  se reemplaza por  $A_{c1}$ .

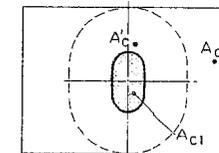


Figura 60-18

De acuerdo con [60.16], la tensión de contacto puede llegar a alcanzar el valor, para  $\gamma_c = 1,5$ ,

$$\sigma_c = 3,3 f_{cd} = 2,2 f_{ck} \quad [60.19]$$

que es aceptable debido al efecto de confinamiento del hormigón que rodea el área de carga  $A_{c1}$ . Si [60.18] no se cumple, rige la teoría general y  $\sigma_c \leq 0,85 f_{cd}$ .

b) Necesidad de armaduras transversales

EHE parte de disponer siempre armaduras para absorber las tracciones bajo la carga. En lo que sigue aceptamos que no son necesarias armaduras transversales si la máxima tracción horizontal bajo la carga  $\sigma_{ct,m\acute{a}x}$  no rebasa la mitad de la resistencia a tracción. Realmente, no es fácil establecer una comprobación simple del tema. Para el caso en que la carga se extiende a todo el ancho  $b$ , el problema ha sido estudiado por NICOLSKY, que obtuvo la fórmula

$$\sigma_{ct,m\acute{a}x} = 0,5 \frac{N (a - a_1)}{a^2 b} \quad [60.20]$$

con  $a > h$  (fig. 60-19 y 60-20). (En [60.20]  $N$  es el valor característico total de la carga).

De acuerdo con EHE debe cumplirse

$$\sigma_{ct,m\acute{a}x} \leq \frac{0,21}{2} \sqrt{f_{ct}^2} \quad [60.21]$$

Si el área cargada no se extiende a todo el ancho  $b$ , el tema requiere estudios especiales, entre los cuales el cálculo por elementos finitos o el método de bielas y tirantes son los más eficaces.

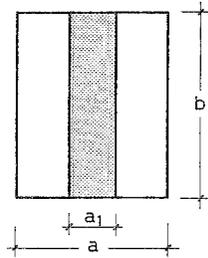


Figura 60-19

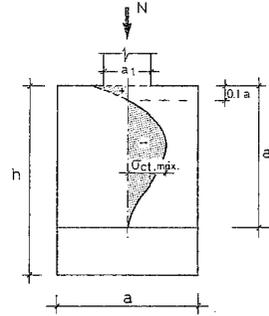


Figura 60-20

Una comprobación, del lado de la seguridad es la siguiente (fig. 60-21). Se supone extendida la tensión de contacto, sucesivamente, a todo el ancho  $a$  o  $b$ , y se obtiene

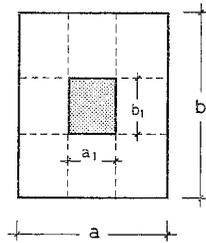


Figura 60-21

$$\text{En dirección } a \quad \sigma_{ct,máx} = 0,5 \frac{N \frac{b}{b_1} (a - a_1)}{a^2 b} = 0,5 \frac{N (a - a_1)}{a^2 b_1} \quad [60.22]$$

$$\text{En dirección } b \quad \sigma_{ct,máx} = 0,5 \frac{N \frac{a}{a_1} (b - b_1)}{b^2 a} = 0,5 \frac{N (b - b_1)}{b^2 a_1} \quad [60.23]$$

Si no es posible garantizar que  $\sigma_{ct,máx}$  es inferior a la mitad de la resistencia a tracción, es necesario disponer armaduras transversales.

De acuerdo con la figura 60-17,  $T_{ad} = 0,25 N_d (a - a_1)$

de donde, en la dirección  $a$ :

$$A_s f_{yd} = 0,25 N_d \left( \frac{a - a_1}{a} \right) \quad [60.24]$$

Análogamente, en la dirección  $b$ :

$$A_s f_{yd} = 0,25 N_d \left( \frac{b - b_1}{b} \right)$$

(METROS)

Cualquiera de estas dos armaduras que sea uniformemente en la profundidad comprendida entre respectivamente.

En macizos de direcciones transversales reducidas, debe pre. problema de anclaje, con el fin de que la armadura pueda, efectivamen. su longitud de anclaje. En la figura 60-22 se indican dos disposiciones b, primera es válida cuando se emplean diámetros finos o cuando, siendo grues. sueldan en taller las parrillas bajo control muy cuidadoso. La segunda es la habitu. con diámetros gruesos.

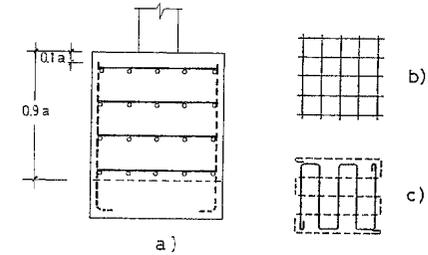


Figura 60-22

En el proyecto debe disponerse alguna armadura vertical de soporte de los emparillados, tal como la indicada de trazos en la figura 60-22 a), con objeto de mantenerlos en posición durante el hormigonado. Debe evitarse la tendencia al empleo de diámetros muy finos, ya que conduce a emparillados muy tupidos que dificultan el vertido y la compactación del hormigón.

c) Rótulas plásticas

El tema fue expuesto ya en forma completa en el apartado 11.4.

### EJEMPLO 60.2

En una instalación industrial se presenta un caso de apoyo indicado en la figura 60-23, en el que una carga, cuyo valor característico es de 625 kN y su valor de cálculo es de 1000 kN, se transmite a un macizo mediante una placa de 200 · 200 mm, situada según la figura. Dimensionar el apoyo. Hormigón H-25.  $\gamma_c = 1,5$ . Si se necesita armadura, acero B 400 S,  $\gamma_s = 1,15$ ,  $\gamma_f = 1,6$ .

Solución

a) Comprobación de la carga localizada

El área  $A'_c$  homotética de  $A_{ct}$  es de 700 · 700 mm. De acuerdo con [60.16]

$$N_u = 200 \cdot 200 \cdot \frac{25}{1,5} \sqrt{\frac{700 \cdot 700}{200 \cdot 200}} = 2.333 \cdot 10^3 N = 2.333 \text{ kN}$$

$$N_u > 3,3 \cdot 200 \cdot 200 \cdot \frac{25}{15} = 2.200 \cdot 10^3 N = 2.200 \text{ kN}$$

rige por tanto el segundo valor, pero se cumple

$$N_d = 1.000 < 2.200$$

b) *Comprobación de la necesidad de armadura transversal*

De acuerdo con [60.22] y [60.23], se tiene, con  $N = 625 \text{ kN}$

En sentido de  $a = 1 \text{ m}$

$$\sigma_{ct,m\acute{a}x} = 0,5 \frac{625 \cdot 10^3 (800 - 200)}{1.000^2 \cdot 200} = 0,94 \text{ N/mm}^2 \quad 1$$

En sentido de  $b = 0,70 \text{ m}$

$$\sigma_{ct,m\acute{a}x} = 0,5 \frac{625 \cdot 10^3 (700 - 200)}{700^2 \cdot 200} = 1,59 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{1}{2} 0,21 \sqrt[3]{25^2} = 0,89 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{ct,m\acute{a}x}$$

Por tanto, no resulta necesario disponer armadura transversal. Si se desea disponer la prevista por EHE.

En sentido de  $a = 1 \text{ m}$

$$A_s f_{yd} = 0,25 \cdot 1.000 \left( \frac{800 - 200}{800} \right) = 186 \text{ kN}$$

En sentido de  $b = 0,70 \text{ m}$

$$A_s f_{yd} = 0,25 \cdot 1.000 \left( \frac{700 - 200}{700} \right) = 179 \text{ kN}$$

Se disponen las armaduras en profundidades entre 7 y 70 cm en ambas direcciones, en tres emparrillados de  $\varnothing 8$  a 200 mm. Para mejorar las condiciones de anclaje, se disponen patillas en los extremos.

1 Se considera  $a = 800 \text{ mm}$ , de acuerdo con la condición de simetría que se supone en [60.20] (fig. 60-20).

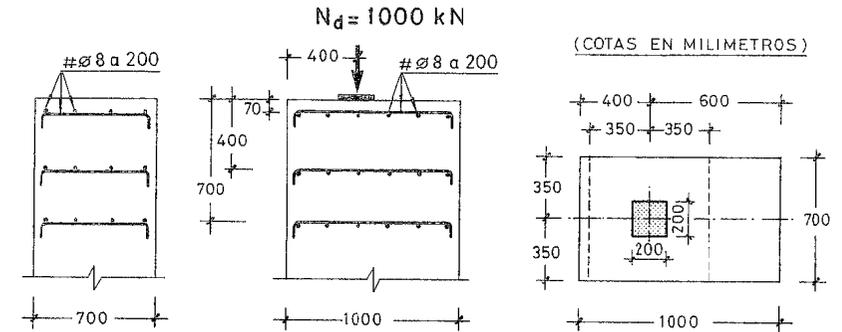


Figura 60-23

## BIBLIOGRAFÍA

- (60.1) "Building code requirements for structural concrete". ACI 318-95. American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (60.2) FRANZ, G.; NIEDENHOFF, H. "The reinforcement of brackets and short deep beams". Cement and Concrete Association. Nº. 114. London. 1963.
- (60.3) KRIZ, L.B.; RATHS, C.H. "Connections in precast concrete structures. Strength of corbels". Journal of the Prestressed Concrete Institute. February 1965.
- (60.4) ACI-ASCE Committee 426 "Suggested revisions to shear provisions for building codes". (ACI 426.IR-77). American Concrete Institute. Detroit. 1979.
- (60.5) MATTOCK, A.H.; CHEN, K.C.; SOONGSWANG, K. "The behavior of reinforced concrete corbels". Journal of the Prestressed Concrete Institute. March-April 1976.
- (60.6) LEONHARDT, F. Véase "Das beweren von stahlbetontragwerken" en el BETON KALENDER de 1971.
- (60.7) LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. "Vorlesungen über Massivbau". Springer-Verlag. Berlin. 1973.

## CAPÍTULO 61

### PILARES. MUROS PORTANTES

#### 61.1 PILARES

Los métodos de dimensionamiento correspondientes fueron expuestos en los capítulos 35, 37 y 38. En el Capítulo 51 se indicaron los detalles constructivos generales, así como los referentes a las armaduras longitudinales y transversales y a empleo de grupos de barras. En lo que sigue se indican detalles específicos de este tipo de piezas y, en particular, los correspondientes a los nudos. *Para el cálculo de los nudos véase el Anejo n° 2.*

##### 61.1.1 NUDOS

Se exponen a continuación los detalles correspondientes.

###### a) *Nudo extremo en dintel superior*

Para esfuerzos moderados, como los que se presentan en entramados de edificios de viviendas y oficinas con luces de tipo medio, la solución de la figura 61-1 a) es suficiente. Los estribos del pilar acompañan a su armadura hasta su extremidad superior. La armadura principal del pilar se suele acabar en patilla. La longitud  $l_1$  se calcula de acuerdo con [44.24]. La longitud  $l_2$  es la de solape correspondiente. Como las armaduras de la viga y del pilar suelen ser diferentes en número y diámetro, simplícadamente puede disponerse la longitud  $l_2$  correspondiente a la barra de mayor diámetro. El solape debe quedar por encima de la junta de hormigonado  $AB$ . Si ello no es posible, puede disponerse parte en vertical y parte en horizontal o todo en horizontal, prolongando las barras exteriores del pilar. En el cálculo de la longitud de anclaje deben tenerse en cuenta las respectivas posiciones I y II de adherencia.

En el caso de luces importantes, sobre todo en el caso de Obras Industriales y Obras Públicas, la disposición es análoga, de acuerdo con la figura 61-1 b), pero la

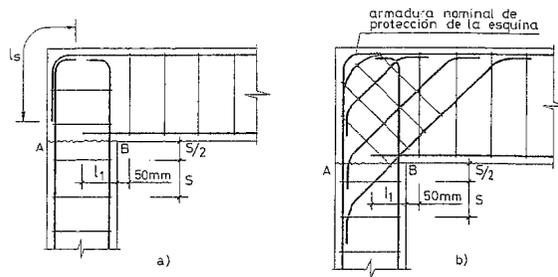


Figura 61-1

situación es más grave, ya que es posible la aparición de grietas diagonales en el nudo arrancando de su vértice exterior. Una armadura diagonal como la indicada es siempre conveniente. Para el cálculo detallado de nudos, véase el Anejo n° 2.

b) *Nudo intermedio en dintel superior*

El detalle se indica en la figura 61-2. Los problemas de anclaje se trataron ya en el Capítulo 44.

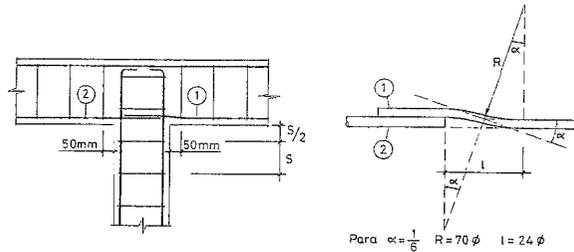


Figura 61-2

Obsérvese que, si coinciden en el mismo plano vertical, la barra de posición ① pasa a situarse verticalmente encima de la barra de posición ②. El doblado de la barra ① debe realizarse en taller con los radios reglamentarios. Si este doblado no se realiza, la ejecución de la ferralla en el nudo será siempre defectuosa.

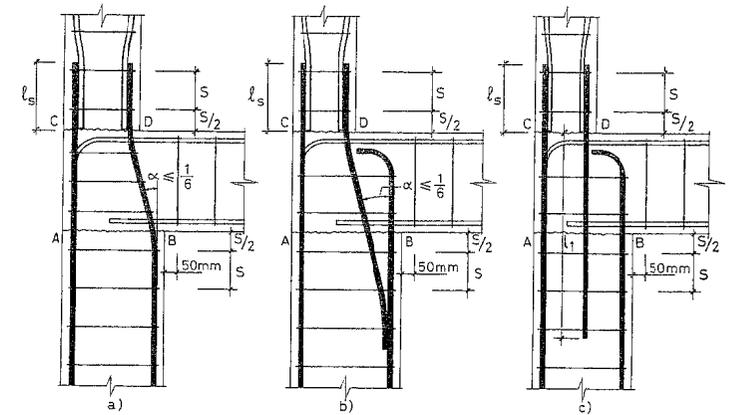
Normalmente se exige que el ángulo  $\alpha$  tenga su tangente no superior a  $\frac{1}{6}$ , con lo que (fig. 61-2) la longitud mínima de  $l$ , no dejando tramo recto entre las dos curvas, es de  $24 \phi$  y el radio de doblado de  $70 \phi$ .

De nuevo se recuerda la conveniencia de que los pilares sean más anchos que las vigas para poder resolver correctamente el cruce de armaduras de ambas piezas.

c) *Nudo de fachada en dintel intermedio*

El detalle se indica en la figura 61-3 en tres variantes. En la figura 61-3 a), el cambio de escuadrías permite realizar la transición de las barras del pilar inferior con

ángulo  $\alpha$  de pendiente inferior a  $1/6$ , que es la máxima que se considera recomendable para no producir empujes horizontales importantes.



NOTA: INDISTINTAMENTE EL QUIEBRO DE ARMADURAS EN EL SOLAPE PUEDE REALIZARSE EN LA ARMADURA DEL TRAMO SUPERIOR O EN LA DEL INFERIOR.

NOTA: Indistintamente, el quiebro de armaduras en el solape puede realizarse en la armadura del tramo superior o en la del inferior.

Figura 61-3

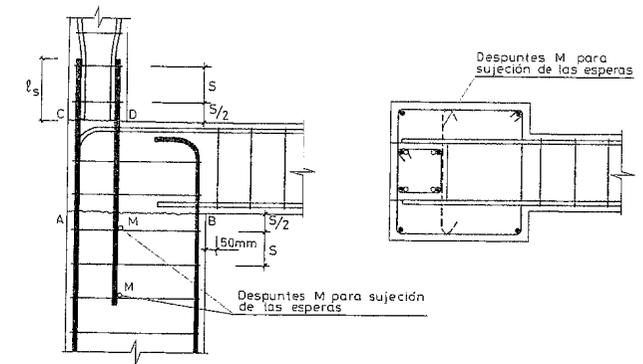


Figura 61-4

En la solución b), apta para fuertes cambios de escuadría de pilares, que no permiten realizar la transición dentro de la viga con  $\alpha \leq 1/6$ , se utiliza una barra de transición.

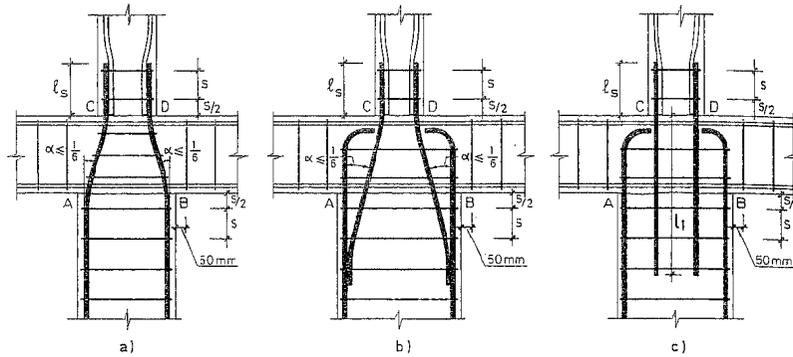
La solución c) es una variante de la b) con una barra recta, anclada la longitud  $l_1 \geq l_{b,net}$  a partir de CD.

En todos los casos AB y CD son juntas de hormigonado.

En la figura 61-4 se representa un nudo empleado, a veces, en edificios industriales.

d) *Nudo interior en dintel intermedio*

Sus soluciones se exponen en la figura 61-5.



NOTA: Indistintamente, el quiebro de armaduras en el solape puede realizarse en la armadura del tramo superior o en la del inferior.

Figura 61-5

En la figura 61-6 se indican cuatro posibilidades de realizar la transición, con dobleces en la armadura superior o inferior.

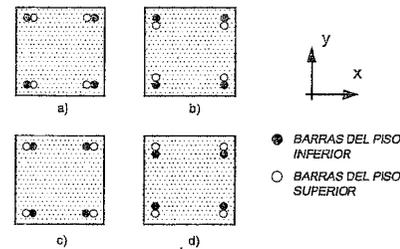


Figura 61-6

La elección entre una u otra posibilidad depende básicamente de dos aspectos:

- La relación de momentos en las direcciones  $x$ ,  $y$  (conviene perder canto en el sentido del menor momento).
- La propia disposición particular del nudo que puede condicionar la elección por razones constructivas.

### 61.1.2 ENLACE PILAR CIMIENTO

El tema ha sido ya tratado en 44.11 desde el punto de vista del anclaje. El esquema general se indica en la figura 61-7. La longitud  $l_s$  es la de solape (ver 44.11). Las patillas de apoyo deben ser amplias para tener la seguridad de que permiten el atado de la armadura de espera al emparrillado de la zapata.

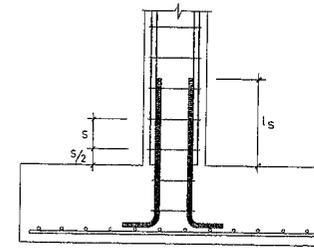


Figura 61-7

### 61.1.3 PILARES DE FACHADA EN ÚLTIMA PLANTA

En entramados de varios pisos, puede ocurrir que el pilar de fachada de última planta presente un esfuerzo axial relativamente pequeño frente al momento flector (Pilar AB) (fig. 61-8a).

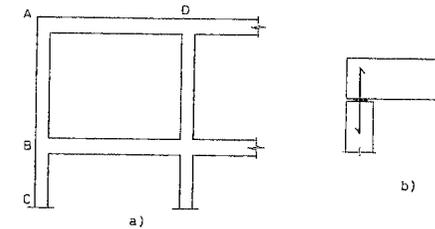


Figura 61-8

En cambio, el pilar  $BC$  tendrá una relación  $\frac{M_d}{N_d}$  más reducida (fig. 61-8 a). Ello

puede conducir a que si se intenta mantener la armadura, resulte necesaria una escuadría mayor en la última planta que en la penúltima. Esto resulta de ejecución complicada. Si se mantiene la escuadría, puede ocurrir que el tramo  $AB$  necesite más armadura que el  $BC$ . Esto no tiene en sí nada de ilógico. De todas formas si se considera conveniente evitarlo existen dos soluciones:

- Adoptar una disposición de simple apoyo, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 11 (fig. 61-8 b)). Es conveniente disponer una armadura vertical

pasante que garantice que una acción horizontal imprevista no saque la viga de su apoyo en el pilar.

- Disponer en *AB* la misma escuadría y armadura que en *BC*. Como el momento que se puede resistir en *A* será menor que el resultante del cálculo de esfuerzos, el momento de vano en *AD* debe ser incrementado en consecuencia. El sistema puede conducir a una ligera fisuración en *BA*, que no reviste importancia.

#### CÓDIGO DE PILARES EN PLANTA

	PILAR QUE CONSERVA LA ARISTA A Y LOS PLANOS DE CARAS AB Y AC
	PILAR QUE CONSERVA EL PLANO DE LA CARA AB Y EL EJE DE DICHA CARA
	PILAR QUE CONSERVA LA LÍNEA VERTICAL B DE LAS CARAS AC EN LOS DISTINTOS PISOS
	PILAR QUE CONSERVA EL EJE
	PILAR QUE CONSERVA LAS LÍNEAS VERTICALES B Y D DE LAS CARAS AC Y AE EN LAS DISTINTAS PLANTAS

#### CÓDIGO DE VIGAS EN PLANTA

	SE CONSERVA EL PLANO DE LA CARA AB
	SE CONSERVA EL PLANO DE LA CARA CD
	SE CONSERVA EL PLANO MEDIO DE LAS VIGAS

Figura 61-9

#### 61.1.4 CÓDIGO DE REFERENCIAS EN PLANTA DE PILARES Y VIGAS

Es imprescindible que en el proyecto figure indicado con claridad, mediante el código correspondiente, qué aristas, caras y ejes se conservan al subir los pilares en las distintas plantas. No existe una Norma sobre el tema, por lo que se sugiere la indicada en la figura 61-9.

#### 61.1.5 CUADRO DE PILARES

En entramados de una planta, lo usual es representar los pilares en alzado en los planos.

En entramados múltiples es más frecuente una representación mediante un cuadro como el recogido en la figura 61-10.

PILARES	PLANTAS						
	BAJA	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
1-3-5-9							
2-4							
6-8-10-12							
13-15-20				350 x 250 6 Ø 20			
14-16-17-18-19				6 Ø 20			

Figura 61-10

En dicho cuadro, en la intersección de la planta correspondiente con el grupo de pilares, cuyas solicitaciones se hayan considerado iguales, figura:

#### a) La escuadría

Debe indicarse mediante algún código en qué dirección se dispone cada dimensión.

#### b) La armadura principal

Debe indicarse en qué caras están las armaduras. Por ejemplo, en el caso indicado en la figura caben las dos interpretaciones de la figura 61-11, a) y b).

Es necesario un convenio claro de nomenclatura.

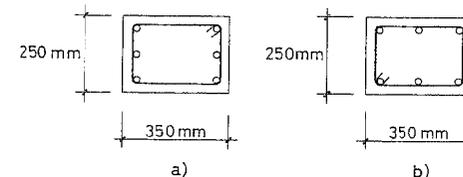


Figura 61-11

#### c) La disposición de estribos

Si no se indica nada, se entiende que son estribos normales. Si son múltiples debe indicarse el esquema correspondiente, con un código de formas.

Es conveniente unificar por grupos aquellos pilares que presentan esfuerzos del mismo orden, bien por condiciones de simetría, semejanza, etc. Análogamente se suelen unificar sus cimentaciones.

#### 61.1.6 DETALLES ESPECIALES PARA PILARES ARMADOS CON GRUPOS DE BARRAS

Cuando se emplean grupos de barras en pilares (fig. 61-12) debe cuidarse especialmente de que éstos sean más anchos que las vigas en la dimensión necesaria, con el fin de que los grupos de barras situados en las esquinas del soporte no obstaculicen el paso de la armadura de la viga.

En el caso de pilares que no requieran empalmes por solape (fig. 61-13), pueden utilizarse grupos de cuatro barras, todas ellas resistentes, pero no puede en este caso usarse armadura de espera.

En el caso de pilares de mayor longitud, en los que las barras puedan necesitar empalmes por solape (fig. 61-14) la disposición más práctica es disponer a partir del segundo piso el grupo de cuatro barras, pero considerarlo a efectos resistentes como de tres barras. La cuarta barra se considera como cubrejuntas, pero se dispone en toda la longitud del grupo, lo que dado los valores de  $I_p$  para diámetros gruesos resulta constructivamente más práctico. Esta solución no es válida para diámetros superiores a 32 mm.

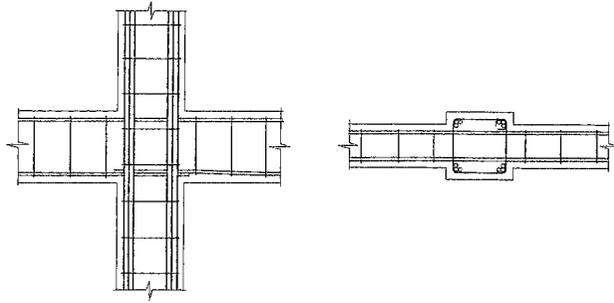


Figura 61-12

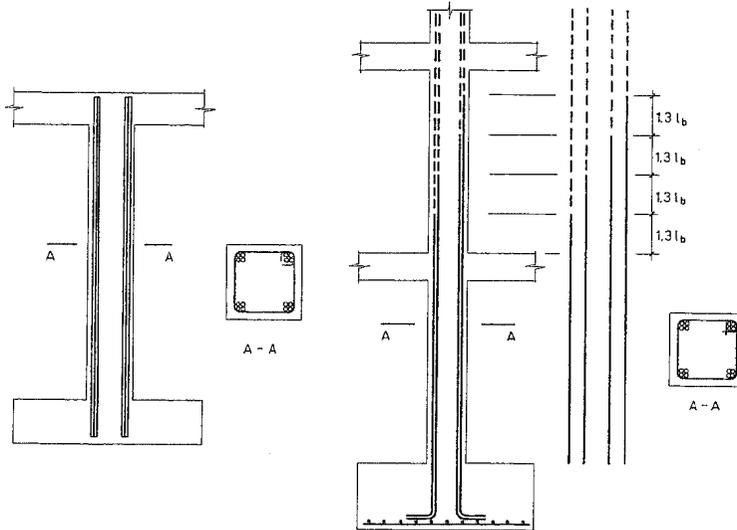


Figura 61-13

Figura 61-14

En todo caso, recuérdese que el canto de la zapata debe ser superior a la longitud de anclaje del paquete correspondiente al caso en que todas las barras dejan de ser necesarias en la misma sección.

Si se trata de barras siempre en compresión, se puede utilizar el empalme de barras a tope indicado en la figura 44-50, en cuyo caso las cuatro barras del grupo se consideran resistentes y pueden ser de cualquier diámetro.

Si los grupos son de dos barras de diámetro no superior a 32 mm, pueden disponerse armaduras de espera.

### 61.1.7 EMPLEO DE DIÁMETROS MUY GRUESOS

Si el diámetro de las barras supera los 32 mm, y aunque en general dichas barras no pueden ser empalmadas por solape, ACI 318-95 hace una excepción para el caso de barras comprimidas en el arranque de cimentaciones. En este caso pueden solaparse barras de  $\phi$  40 ó 50 mm de pilares a armaduras de espera, siempre que éstas no sean de diámetro superior a 32 mm.

De acuerdo con lo anterior, una barra de  $\phi$  40 se puede solapar a dos esperas de  $\phi$  32 y una de  $\phi$  50 a 3 de  $\phi$  32 (fig. 61-15).

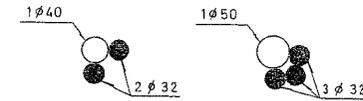


Figura 61-15

En relación con la figura 61-15 y para la colocación de las armaduras de espera, recuérdese que no puede haber en un grupo tres ejes de barras en un mismo plano.

## 61.2 MUROS PORTANTES

Entendemos por muro portante el que transmite cargas verticales y eventualmente momentos, transmitidos por forjados, vigas, elementos de cubierta, etc. En los Capítulos 21 y 23 estudiamos el cálculo de esfuerzos en los edificios de este tipo.

La Instrucción EHE no considera explícitamente este tipo de piezas. En lo que sigue, utilizamos fundamentalmente documentación procedente de las referencias (61.1), (61.2) y (61.3).

### 61.2.1 DIMENSIONAMIENTO

El dimensionamiento a compresión y flexión compuesta se realiza de acuerdo con lo expuesto en los Capítulos 35 y 37, excepto en lo que resulta modificado por lo que sigue. Análogamente, el dimensionamiento a esfuerzo cortante se realiza de acuerdo con el Capítulo 39, considerando el muro como una losa o una viga, según el esfuerzo cortante sea perpendicular o paralelo al plano medio del muro.

### 61.2.2 ARMADURA MÍNIMA

La armadura mínima en muros cumplirá las especificaciones que siguen:

#### a) Armadura mínima vertical

Será la mayor de las proporcionadas por a-1) y a-2).

#### a-1) La cuantía geométrica mínima de armadura vertical será:

- 0,0012 para barras corrugadas de diámetro no superior a 16 mm.
- 0,0015 para barras corrugadas de diámetro superior a 16 mm.

- 0,0012 para mallas electrosoldadas.

a-2) Si el muro necesita armadura vertical de esfuerzo cortante, su cuantía geométrica no será inferior a 0,0025.

b) Armadura mínima horizontal

Se dispondrá de acuerdo con las siguientes cuantías geométricas mínimas:

- 0,0020 para barras corrugadas de diámetro no superior a 16 mm.
- 0,0025 para barras corrugadas de diámetro superior a 16 mm.
- 0,0020 para mallas electrosoldadas.

c) Distribución de la armadura en las dos caras del muro

Los muros suelen tener un espesor mínimo de 150 mm. Si el espesor es igual o superior a 250 mm, con la excepción de los muros de sótano o vigas de cimentación, tendrán como mínimo las armaduras indicadas en a) y b) dispuestas en dos emparrillados, uno en cada cara. El emparrillado de cada cara no será de sección, en cada dirección, inferior a la mitad de la mínima.

La separación entre armaduras en cada dirección no será superior a 330 mm ni a dos veces el espesor del muro.

En muros de espesor inferior a 250 mm, la armadura, si el cálculo lo permite, puede disponerse en una sola cara, que normalmente será la exterior.

d) Armaduras para evitar el pandeo de la armadura vertical

No se necesita armadura para evitar el pandeo de la armadura vertical si su cuantía geométrica no es superior a 0,01, o si la armadura vertical no es necesaria como armadura comprimida.

Si las condiciones anteriores no se cumplen, deben seguirse las reglas siguientes:

- Si la armadura vertical es de diámetro no superior a 12 mm, se dispondrán estribos (fig. 61-16) con separaciones verticales y horizontales no superiores a 500 mm.
- Si la armadura vertical es de diámetro superior a 12 mm, se dispondrán estribos en todos los cruces, sin rebasar en dirección vertical la separación de quince veces el diámetro de la armadura.



Figura 61-16

e) Armadura adicional en ángulos de huecos de puertas y ventanas

Además de las armaduras mínimas anteriormente indicadas, alrededor de los huecos se dispondrán como mínimo dos barras de diámetro no inferior a 16 mm, ancladas a partir del ángulo del hueco su longitud de anclaje, pero no menos de 600 mm (fig. 61-17). Esta armadura tiene por objeto controlar la fisuración debida a la

concentración de esfuerzos originados por la retracción, temperatura y acciones directas, que se produce en los ángulos de los huecos.

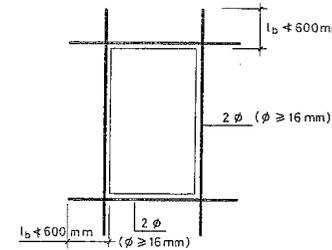


Figura 61-17

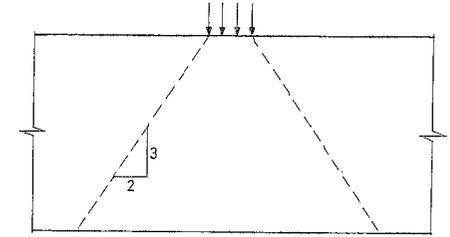


Figura 61-18

f) Reparto de cargas puntuales

Una carga local en coronación (fig. 61-18) puede suponerse que se difunde en rectas de pendiente 2/3 respecto a la vertical.

61.2.3 MÉTODO EMPÍRICO PARA EL CÁLCULO DE MUROS (ACI 318-95)

Aunque, en general, el dimensionamiento del muro y la comprobación a pandeo pueden hacerse de acuerdo con los procedimientos generales expuestos en los capítulos anteriores, es interesante el Método Empírico del A.C.I., que se expone a continuación.

El método es válido para muros con espesor no inferior a  $\frac{1}{25}$  de su altura o longitud libre (lo que sea menor), ni a 150 mm.

Además, la resultante de las acciones, en cualquier hipótesis de combinación, debe pasar por el tercio central del muro.

En las condiciones anteriores, el esfuerzo axial de agotamiento viene dado por la fórmula

$$N_u = 0,58 f_{cd} A_c \left[ 1 - \left( \frac{k l_c}{32 h} \right)^2 \right] \quad [61.1]$$

donde:

$l_c$  = Distancia vertical entre apoyos laterales del muro.

$h$  = Espesor total del muro.

$k$  = Factor de corrección de la longitud  $l_c$ .

$k = 0,8$  si el muro tiene coacción al giro en uno o ambos extremos de la longitud de  $l_c$  (superior e inferior).

$k = 1,0$  si el muro no tiene coacción al giro en ningún extremo.

$k = 2,0$  para muros sin arriostramiento contra traslaciones horizontales.

El factor  $k = 0,8$  sólo debe emplearse si el muro está unido a un elemento cuyo valor  $\frac{EI}{1}$  no es inferior al del muro.

### 61.2.4 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS

- En la coronación libre de un muro y con objeto de evitar la concentración de fisuras de retracción y temperatura, se dispondrá una armadura (fig. 61-19) formada por dos redondos de diámetro no inferior a 12 mm para alturas hasta 4 m y no inferior a 16 mm para alturas mayores.
- Armado de encuentros.* En la figura 61-20 se indican esquemas típicos de armado.

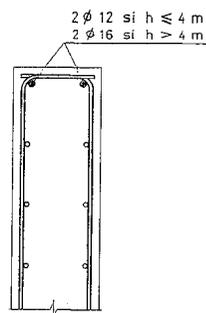


Figura 61-19

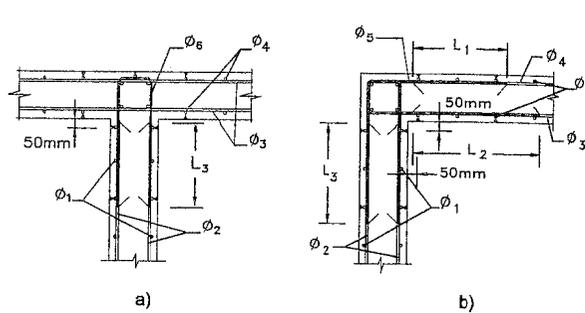


Figura 61-20

Las longitudes  $l$  de las figuras 61-20 a) y b) deben fijarse de acuerdo con las condiciones de anclaje.

- Debe atenderse de forma especial el caso indicado en la figura 61-21.

Si  $b \leq 3h$ , la zona correspondiente debe ser tratada, a todos los efectos, como un pilar. Los extremos de muros, aunque no tengan huecos próximos, deben ser tratados de la misma manera en un ancho  $b = 3h$ . Los límites de huecos han de tratarse de la misma manera.

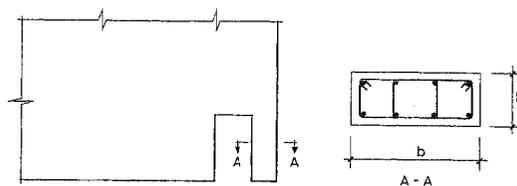


Figura 61-21

### 61.2.5 CASO DE VIGAS PARED

Si el muro forma parte de una viga pared, su cálculo se rige por el Capítulo 59 y no por el contenido del presente Capítulo 61.

#### EJEMPLO 61.1

Se da un muro de 150 mm de espesor y 3 m de altura libre, elásticamente empotrado en sus extremos superior e inferior en forjados de mayor rigidez que el muro. El muro está sometido a un esfuerzo axial de cálculo  $N_d = 250$  kN/m y a un momento flector de cálculo  $M_d = 5$  mN. Hormigón H-25. Acero B400S. Comprobar el muro por el método empírico  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ .

*Solución*

$$e = \frac{5}{250} = 0,02 \text{ m}$$

luego la resultante pasa por el tercio central y el muro cumple también las restantes condiciones para la aplicación del método empírico.

*Armaduras mínimas*

*Vertical*

$$A_{sv} = 0,0012 \cdot 150 \cdot 1000 = 180 \text{ mm}^2 / \text{m}$$

Disponemos  $\phi 6$  a 25 en cada cara.

*Horizontal*

$$A_{sh} = 0,0020 \cdot 150 \cdot 1000 = 300 \text{ mm}^2 / \text{m}$$

Disponemos  $\phi 8$  a 30 cm en cada cara.

No se requieren estribos para evitar el pandeo de la armadura vertical.

Comprobación. Como  $k = 0,8$

$$N_u = 0,58 \cdot \frac{25}{1,5} \cdot 150000 \left[ 1 - \left( \frac{0,8 \cdot 3000}{32 \cdot 150} \right)^2 \right] = 362,5 \text{ kN}$$

$N_d = 250 \text{ kN} < N_u$ . El dimensionamiento es correcto.

## BIBLIOGRAFÍA

- (61.1) ACI 318-95 "Building code Requirements for Structural Concrete". American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (61.2) BOUTIN, J.P.; PUECH, C.; TRAN-TANG: "Etude comparative du calcul des murs en béton armé ou non armé suivant divers règlements". Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Juin, 1970.
- (61.3) "Travaux de parois et murs en béton banche". Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Jan/Fev. 1976.

## CAPÍTULO 62

### ESCALERAS

#### 62.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos ocuparemos de los distintos tipos de escaleras de hormigón habituales en edificios, que son las de tramos rectos en sus diferentes variantes.

- Escaleras de un solo tramo.
- Escaleras de dos tramos con descansillo.
- Escalera de tres tramos con dos descansillos.
- Escaleras de dos tramos con descansillo volado.

La tipología de escaleras es muy amplia, en especial si se consideran las escaleras curvas, y la extensión del tema no permite tratarlo de manera completa en un capítulo. El lector puede encontrar información específica en las referencias (62.1), (62.2) y (62.3).

Normalmente las escaleras se realizan en losas o placas de hormigón tal como se indica en la figura 62-1 a). La solución de emplear vigas planas y forjados de viguetas y bovedilla, que fue empleada frecuentemente hace tiempo, ha caído en desuso (fig. 62-1 b)).

#### 62.2 TRAZADO DE LA ESCALERA

El trazado de una escalera, una vez elegido el tipo, ha de basarse en las dimensiones de la huella,  $h$ , y de la contrahuella,  $c$  (fig. 62-2). Por razones de seguridad para los usuarios todos los peldaños deben ser iguales y para evitar un cansancio excesivo, las dimensiones  $c$  y  $h$  han de cumplir determinadas condiciones, siendo las más frecuentes:

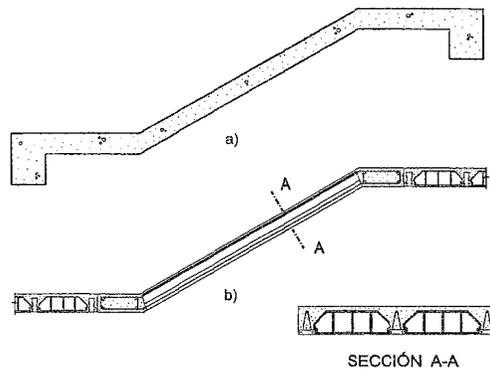


Figura 62-1

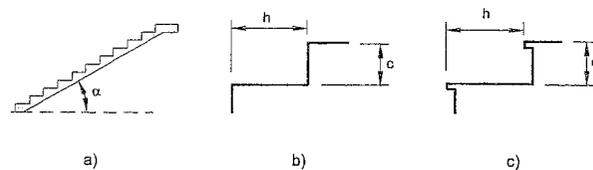


Figura 62-2

(BLONDEL) (62.2):  $h + 2c = k$   $\begin{cases} k = 59 \text{ cm} \text{ (edificios de viviendas)} \\ k = 66 \text{ cm} \text{ (edificios públicos)} \end{cases}$

(TOURNUS) (62.4):  $h + 2c = 63 \text{ cm}$   
 $h - c = 12 \text{ cm}$

(NEUFERT) (62.5):  $2c + h = 61 \text{ a } 64 \text{ cm}$   
 $h - c = 12 \text{ cm}$

Estas leyes se han derivado no sólo de la experiencia práctica, sino también de medidas sobre el cansancio de personas subiendo escaleras con diferentes formas de peldaños. Una dimensión frecuente es  $h = 30 \text{ cm}$  y  $c = 17 \text{ cm}$ .

Fijadas las dimensiones  $c$  y  $h$ , se conoce la pendiente de los tiros de la escalera.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{h}$$

Para el trazado definitivo, ha de tenerse en cuenta que no suele permitirse que en un mismo tiro haya más de 14 peldaños.

Un aspecto importante para el trazado es la solución que se dé al encuentro de las losas de los tiros con las mesetas y descansillos. En la figura 62-3 a) se indica una solución, que si bien tiene la ventaja de conducir a un descansillo de ancho uniforme por su cara superior (fig. 62-3 b)), tiene serios inconvenientes estéticos vista por su cara inferior. El peldaño puede estar formado con hormigón o realizado con ladrillo.

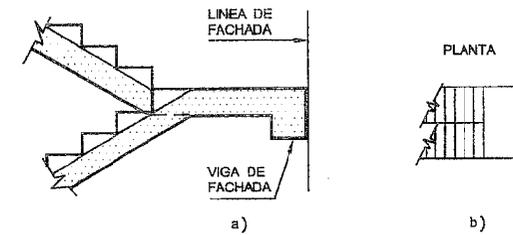


Figura 62-3

La figura 62-4 elimina este inconveniente conduciendo a una solución aceptable y de uso muy frecuente (fig. 62-4 a) y b)), aunque el descansillo no es de ancho constante.

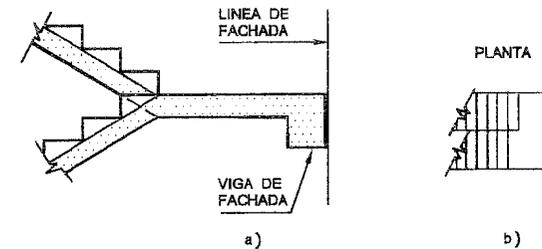


Figura 62-4

Una solución alternativa es la indicada en la figura 62-5. Esta solución a efectos de descansillo por la cara superior es equivalente a la de la figura 62-3, sin presentar los inconvenientes estéticos por su cara inferior, que queda como en el caso de la figura 62-4, con una arista única de arranque de ambos tiros. Su inconveniente es que conduce a un canto de escalera, en la zona de descansillo, apreciablemente mayor que en los tiros. Esto puede ser interesante en aquellos casos en que los momentos flectores en el descansillo sean mayores que en los tiros.

### 62.3 ESFUERZOS EN LOS TIROS

Consideremos el caso de una escalera formada por un solo tiro, con los extremos articulados tal como se indica en la figura 62-6. Llamando  $\alpha$  al ángulo del tiro con la horizontal y  $g$  al peso de la escalera por m.l. de proyección horizontal de tiro, la carga

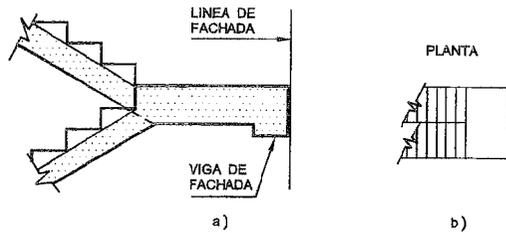


Figura 62-5

$g$  se descompone en una normal al tiro, de valor  $g \cos \alpha$  y otra paralela, de valor  $g \sin \alpha$ .

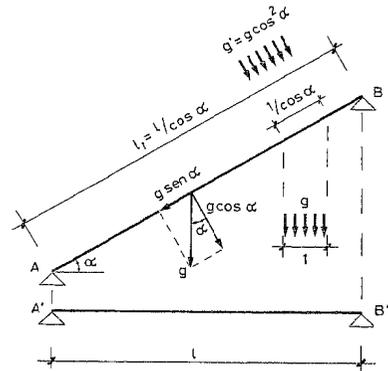


Figura 62-6

La carga normal al tiro por m.l. vale por tanto (fig. 62-6)

$$g' = \frac{g \cos \alpha}{1 / \cos \alpha} g \cos^2 \alpha$$

El momento flector de cargas permanentes vale por tanto

$$M_g = \frac{1}{8} g' \ell^2 = \frac{1}{8} g \cos^2 \alpha \left( \frac{\ell}{\cos \alpha} \right)^2 = \frac{1}{8} g \ell^2 \quad [62.1]$$

donde, como se ha dicho,  $g$  es la carga permanente por m.l. de proyección horizontal.

Siendo  $q$  la sobrecarga por  $m^2$ , el momento total resulta

$$M_p = \frac{1}{8} (g + q) \ell^2 \quad [62.2]$$

Los esfuerzos cortantes en  $A$  y  $B$  resultan

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} g \cos^2 \alpha \cdot \ell_1 = \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot \ell \quad [62.3]$$

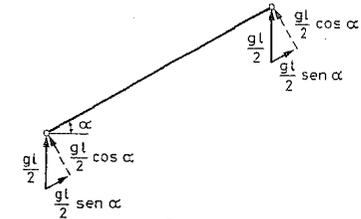


Figura 62-7

Las reacciones paralelas al plano del tiro (fig. 62-7) son  $\frac{g \ell}{2} \sin \alpha$  en el apoyo inferior y el mismo valor en el superior. Esto conduce a que la mitad superior del tiro esté en tracción y la mitad inferior en compresión, ambas linealmente variables, de acuerdo con lo que se indica en la figura 62-8. Estos esfuerzos introducen tracciones que son despreciables en la mayoría de los casos.

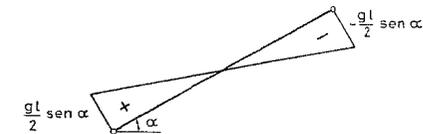


Figura 62-8

En la anterior se ha supuesto que el tiro en ambos extremos está enlazado a elementos de igual rigidez, como es usual.

#### 62.4 CÁLCULO DE ESFUERZOS EN ESCALERAS DE UN TRAMO

Analizaremos en primer lugar el caso de escalera de un tramo, elásticamente empotrada en dos vigas mediante la rigidez a torsión de las mismas. En la figura 62-9 se indica el esquema de cargas, la ley de momentos y la de esfuerzos cortantes.

De acuerdo con lo expuesto en 18.4.3, calcularemos el vano, para momentos positivos, como si estuviera simplemente apoyado y para momentos negativos con una ley de momentos resultante de trasladar verticalmente la ley de momentos la cantidad  $0,25 M_o$ , donde  $M_o$  es el máximo momento de vano.

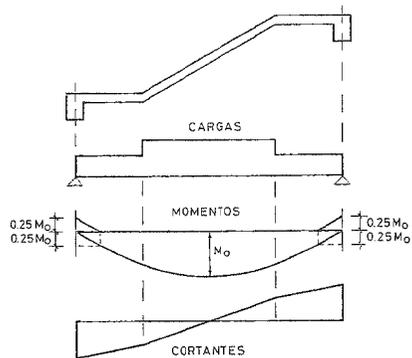


Figura 62-9

### 62.5 DIMENSIONAMIENTO Y ESQUEMAS DE ARMADO EN ESCALERAS DE UN TRAMO

El dimensionamiento no plantea problemas especiales, respecto a lo visto en capítulos anteriores. En cuanto a los esquemas de armado, se sugiere el de la figura 62-10.

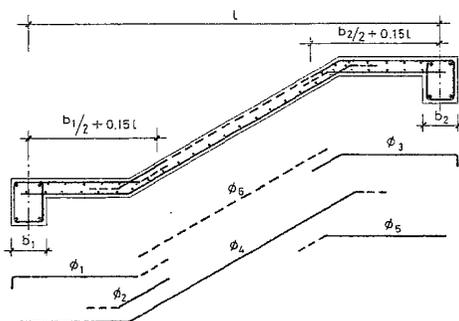


Figura 62-10

A falta de un estudio detallado se recomienda para el corte de la armadura de momentos negativos las longitudes indicadas en la figura.

Obsérvese que, dependiendo de la relación de ancho de descansillo a luz del tramo, las armaduras  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_4$  y  $\phi_5$  pueden no tener las partes dibujadas de trazos, la  $\phi_2$  puede no existir y la  $\phi_3$  puede no tener la parte inclinada.

La armadura  $\phi_6$  corresponde al emparillado de retracción y temperatura, siempre recomendable.

Las escaleras deben comprobarse a fisuración y deformaciones de la misma forma que los forjados unidireccionales.

Los problemas de anclaje de armaduras son también idénticos a los de dichos forjados.

### 62.6 DIMENSIONAMIENTO DE ESCALERAS CON CONTINUIDAD EN LOS FORJADOS DE PISO

En la mayoría de los casos el tramo de escalera tiene continuidad con los forjados a nivel de los pisos (fig. 62-11). El conjunto forjado escalera se calcula como un forjado, con las variantes consideradas en 62.3. Por lo que se refiere a cargas y esfuerzos en el tiro, pero de acuerdo con los métodos generales de cálculo de esfuerzos y de dimensionamiento ya expuestos para forjados unidireccionales.

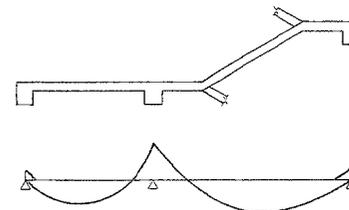


Figura 62-11

### 62.7 TRAMOS CON DESCANSILLO INTERMEDIO

Si el número de escalones en un solo tiro resulta excesivo, se dispone de un descansillo intermedio (fig. 62-12). El dimensionamiento y esquema de armado se derivan inmediatamente de lo expuesto en 62.5.



Figura 62-12

### 62.8 ESCALERAS DE DOS TRAMOS

Es la solución más clásica y se organiza de acuerdo con lo anteriormente expuesto (figs. 62-13 a) y b)).

Obsérvese que a nivel de pisos el forjado en general se prolongará hacia la izquierda, pasando el tramo de ser un solo vano a ser continuo. El cálculo se sigue realizando de acuerdo con lo expuesto para forjados unidireccionales, teniendo en cuenta lo expuesto en 62.3.

Las vigas de apoyo de los tramos en fachada a nivel de descansillos, habitualmente serán vigas de un solo vano (fig. 62-13 d)) y cortan los dinteles generales de los entramados que reciben los forjados de pisos.

Una variante, para no producir la interrupción de dinteles en fachada, es apoyar los tramos de escalera en fachada en fábrica de ladrillo macizo, descansando sobre el dintel de fachada situado a nivel de piso.

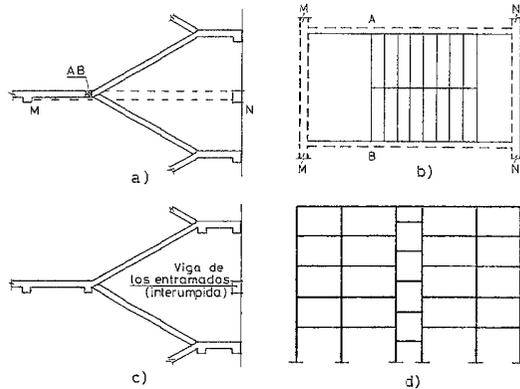


Figura 62-13

Si la luz de los tramos de escalera es importante, una variante posible es disponer vigas planas AB en los bordes de las mesetas y embebidas en el canto de éstas (fig. 62-13 a)). Si se adopta esta solución, es necesario disponer vigas planas análogas a las AB en los descansillos está condicionada a que las correspondientes MN de apoyo a ese nivel no corten el paso en las zonas correspondientes de las mesetas.

La solución de disponer vigas resaltadas en las mesetas (fig. 62-13 c)), en sustitución de las planas, se utiliza poco debido a los inconvenientes estéticos que presenta.

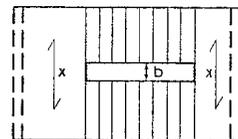


Figura 62-14

En el caso indicado en la figura 62-14, si la dimensión  $b$  no es muy grande, el cálculo se realiza como anteriormente, reforzando un poco, si acaso, la armadura transversal dispuesta en dirección  $x$  en descansillo y meseta.

## 62.9 ESCALERAS DE TRES TRAMOS

Si la situación es la indicada en la figura 62-15 a) y b), una posible solución es disponer dos niveles de vigas AB y CD que reciban los tramos en dirección de la luz  $l$ .

El tramo en dirección  $l'$  y la meseta se calculan con luz puntuales de apoyo de los tramos de luz  $l'$  se tienen en el cálculo de los tramos de luz  $l$ .

Otra solución, más frecuente, es disponer de A a I simultáneamente las cargas de los dos tramos de luz  $l$ .

Para el cálculo como estructura plegada de toda referencia (62.1).

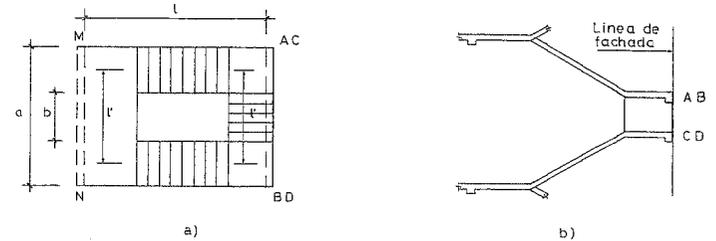


Figura 62-15

## 62.10 ESCALERAS CON DESCANSILLO EN VUELO

El esquema se indica en la figura 62-16. La solución rara vez se justifica por razones económicas o estructurales, sino más bien por su elegancia. El esquema de cálculo se indica en la figura 62-17. Supongamos por el momento los tiros articulados en A y B. Introduciremos un apoyo ficticio en C<sup>1</sup>. Designamos por  $p$  la carga p.m.l. en planta, correspondiente a un ancho  $b$  de tiro. En el descansillo la carga es por tanto  $2p$ .

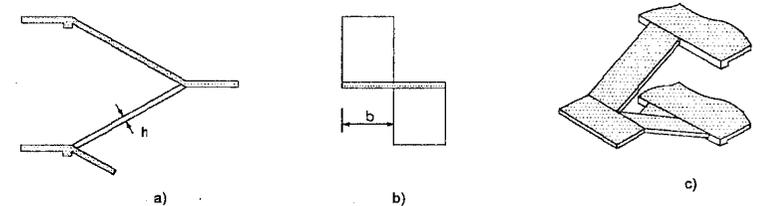


Figura 62-16

<sup>1</sup> Es posible un análisis directo de la estructura como pieza triarticulada. Elegimos el método que sigue por su mejor visualización y por algunas ventajas de generalización que más adelante se verán. Para el caso de continuidad de los tiros con los forjados de pisos. Se parte de suponer despreciables las deformaciones axiales de los tramos y la rigidez a torsión del descansillo.

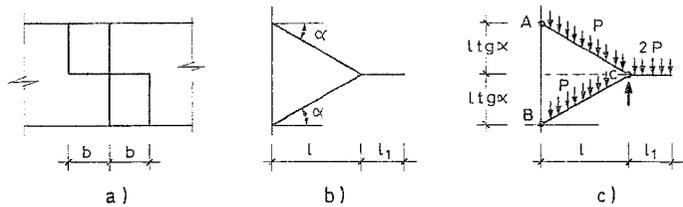


Figura 62-17

Aislando el tramo superior (fig. 62-18 a)) de ancho  $b$  en tiro y descansillo y expresando las condiciones de equilibrio, tenemos <sup>1</sup>

$$Y_1 + Y_2 - p(\ell + \ell_1) = 0 \quad [62.4]$$

$$Y_2 \cdot \ell - \frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2} = 0 \quad [62.5]$$

y resolviendo el sistema:

$$Y_1 = \frac{p}{2\ell} [\ell^2 - \ell_1^2] \quad [62.6]$$

$$Y_2 = \frac{p}{2\ell} [\ell + \ell_1]^2 \quad [62.7]$$

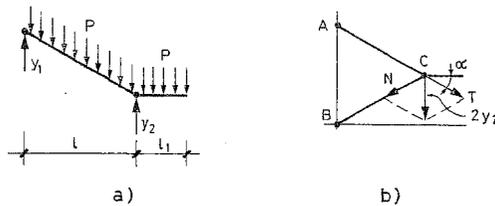


Figura 62-18

Para restablecer las condiciones iniciales, debemos introducir, (fig. 62-18 b)), una fuerza  $-2Y_2$ , para el conjunto de los dos tramos, en sentido descendente. Esta fuerza origina una compresión  $N$  en el tiro inferior y una tracción  $T$  en el superior, de valor

$$2N \operatorname{sen} \alpha = 2Y_2$$

<sup>1</sup> Suponemos cargas  $p$  iguales en tiro y descansillo, como es prácticamente usual. El método que se expone es inmediatamente generalizable a cualquier caso de cargas especiales.

y sustituyendo

$$N = \frac{Y_2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$N = \frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2\ell \operatorname{sen} \alpha} \quad [62.8]$$

$$T = \frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2\ell \operatorname{sen} \alpha} \quad [62.9]$$

Los esfuerzos en el tramo superior son los siguientes (fig. 62-19).

La reacción vertical en A vale (fig. 62-19 a)):

$$Y_1' = Y_1 + T \operatorname{sen} \alpha$$

y sustituyendo

$$Y_1' = p(\ell + \ell_1) \quad [62.10]$$

Tomando momentos respecto a B, se deduce inmediatamente

$$X_1' = -\frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2\ell \operatorname{tg} \alpha} \quad [62.11]$$

Obsérvese que el equilibrio del tramo se consigue de acuerdo con lo indicado en el esquema de la figura 62-19 b), sin ninguna reacción vertical en el descansillo.

Los momentos flectores son de deducción inmediata (fig. 62-19 c)). Para los esfuerzos cortantes, se tiene (fig. 62-19 d)):

En voladizo

$$V_C = -p\ell_1 \quad [62.12]$$

En tiro

$$V_{CT} = Y_2 \cos \alpha - p\ell_1 \cos \alpha$$

$$V_{CT} = \frac{p}{2\ell} (\ell + \ell_1)^2 \cos \alpha - p\ell_1 \cos \alpha \quad [62.13]$$

$$V_A = -V_{CT} + p\ell \cos \alpha$$

$$V_A = -\frac{p}{2\ell} (\ell + \ell_1)^2 \cos \alpha + p\ell \cos \alpha \quad [62.14]$$

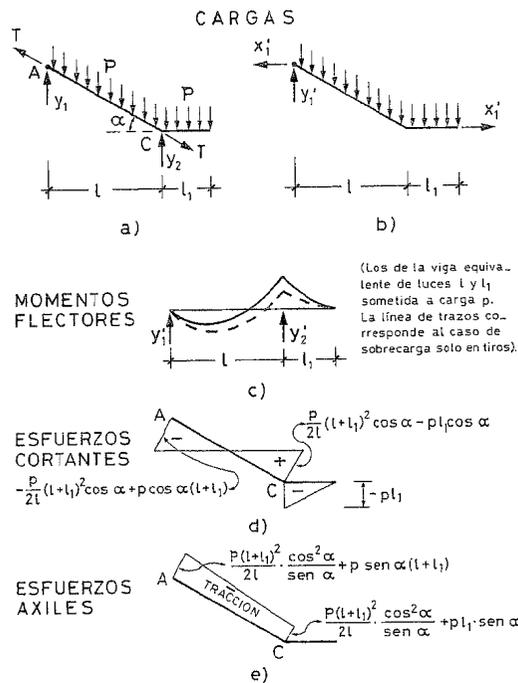


Figura 62-19

Los esfuerzos axiles resultan (fig. 62-19 e):

Tracción en el extremo C del tiro (fig. 62-19)

$$T_c = T - Y_2 \operatorname{sen} \alpha$$

y sustituyendo

$$T_c = \frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - p \ell_1 \operatorname{sen} \alpha \quad [62.15]$$

Tracción al extremo A del tiro (máxima en el tiro):

$$T_A = -\frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2\ell} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - p \operatorname{sen} \alpha (\ell + \ell_1) \quad [62.16]$$

Para el tramo inferior, las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes son idénticas y la de esfuerzos axiles tienen iguales valores absolutos, pero

correspondiendo, en este caso, a esfuerzos de compresión extremo inferior B. La reacción vertical en B es idéntica signo contrario.

Las componentes horizontales de los esfuerzos axi del descansillo (fig. 62-20), tienen como valores

$$T'_c = T_c \cdot \cos \alpha$$

$$N'_c = N_c \cdot \cos \alpha$$

$$T'_c = -\frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2\ell} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} - p \ell_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad [62.17]$$

$$N'_c = \frac{p(\ell + \ell_1)^2}{2\ell} \cdot \frac{\cos^3 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + p \ell_1 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad [62.18]$$

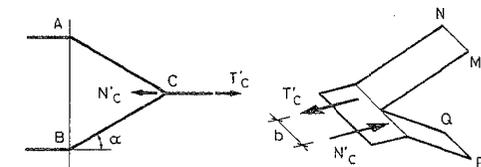


Figura 62-20

que originan un par (fig. 62-20)

$$M = N'_c \cdot b \quad [62.19]$$

que se distribuye en dos momentos flectores

$$M_A = M_B = N'_c \cdot \frac{b}{2} \quad [62.20]$$

que actúan sobre los tiros en el sentido de su ancho  $b$  como canto de una sección de ancho  $h$  (espesor del tiro) y canto  $b$ .

Las fuerzas  $N'_c$  y  $T'_c$  producen en el descansillo un esfuerzo cortante en sentido horizontal

$$V = N'_c \quad [62.21]$$

Finalmente, al estar el descansillo empotrado en los tiros, sufre un momento flector (fig. 62-21).

$$M = N'_c \cdot \frac{b}{2} \quad [62.22]$$

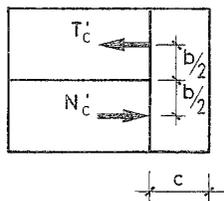


Figura 62-21

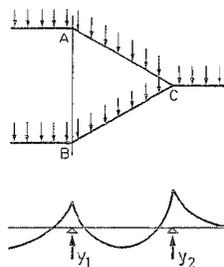


Figura 62-22

Con los esfuerzos anteriormente calculados el dimensionamiento no ofrece ningún problema especial. Obsérvese que los tiros están en flexión esviada combinada con compresión o tracción. Sin embargo, los esfuerzos axiales son despreciables en la mayoría de los casos.

Habitualmente el enlace de los tiros en los puntos *A* y *B*, de acuerdo con lo supuesto, presenta unos momentos flectores verticales despreciables, empotrándose en vigas de borde que deben ser dimensionales para resistir las reacciones  $Y'_1$ ,  $X'_1$ . Recuérdese que en *A* y *B* deben cubrirse en el tiro momentos flectores negativos iguales a  $-0,25 M_o$ , siendo  $M_o$  el momento de vano de acuerdo con lo anteriormente expuesto.

Si en algún caso los tiros se arman en continuidad con los forjados de piso (fig. 62-22), el diagrama de momentos, supuesto el apoyo ficticio *C*, se calcula con los métodos expuestos en general para forjados unidireccionales. De acuerdo con ellos se determinan las reacciones, esfuerzos cortantes, fuerza compensadora  $-2 Y_2$ , y esfuerzos axiales, calculados todos ellos en la misma forma que se ha expuesto.

#### BIBLIOGRAFÍA

- (62.1) BETON-KALENDER. 44ª Edición. Existe versión en español de "El Ateneo". Buenos Aires. 1957.
- (62.2) GUERRIN, A. "Traité de béton armé". Tome IV Dunod. París. 1963.
- (62.3) PRUDON, G. "Calcul des poutres en helice circulaire d'axe vertical. Application aux limons d'escaliers tournants". La Technique des Travaux. Mars-avril, Mai-June 1955.
- (62.4) TOURNUS. "Las medidas en la vivienda". Editores Técnicos Asociados. Barcelona. 1980.
- (62.5) NEUFERT. "El arte de proyectar en arquitectura". Gustavo Gili. Barcelona. 1961.

## CAPÍTULO 63

### CIMENTACIONES SUPERFICIALES Y PROFUNDAS<sup>1</sup>

#### 63.1 INTRODUCCIÓN

El cimiento es aquella parte de la estructura encargada de transmitir las cargas al terreno. Dado que la resistencia y rigidez del terreno son, salvo raros casos, muy inferiores a las de la estructura, la cimentación posee un área en planta muy superior a la suma de las áreas de todos los pilares y muros portantes.

Lo anterior conduce a que los cimientos sean en general piezas de volumen considerable, con respecto al volumen de las piezas de la estructura. Los cimientos se construyen casi invariablemente en hormigón armado y, en general, se emplea en ellos hormigón de calidad relativamente baja ( $f_{ck} \approx 25 \text{ MPa}$  a 28 días), ya que generalmente no resulta económicamente interesante, como veremos luego, el empleo de hormigones de resistencias mayores.

Las estructuras de cimentación son, con frecuencia, elementos tridimensionales, e incluso cuando están constituidas por elementos lineales, suelen ser altamente hiperestáticas. Su cálculo preciso resulta muy complejo y raras veces posible. El ordenador ha venido a suministrar una gran ayuda para bastantes casos pero no debe olvidarse que el conocimiento todavía imperfecto de las características del suelo, de las del material hormigón y de las de las piezas de hormigón armado, hacen ilusorio el pretender una gran precisión en los resultados.

<sup>1</sup> Los temas de este capítulo pueden ser ampliados en el libro "Cálculo de Estructuras de Cimentación", J. CALAVERA, 3ª Edición (63.1). Aquí nos restringimos a los tipos de cimentación de uso más frecuente dentro de las cimentaciones superficiales. Para vigas de cimentación, emparrillados, placas, encepados, pilotes y pozos, véase el libro citado, que además contiene tablas para el proyecto inmediato de zapatas de medianería y aisladas.

Por todo ello, el proyectista de cimientos ha de ser especialmente cuidadoso con los métodos de cálculo que elija y especialmente prudente al aplicarlos. En este sentido no debe olvidarse que las cimentaciones usualmente están ocultas y formadas por piezas generalmente rígidas comparadas con las de la estructura. Por tanto, el fenómeno de la fisuración, que es un excelente síntoma de aviso propio de las estructuras de hormigón, no es observable en los cimientos. Tampoco las deformaciones de un cimiento excesivamente solicitado suelen ser tan importantes como para constituir un síntoma visible. Todo ello acentúa la necesidad de una especial prudencia y cuidado, tanto en la concepción como en los detalles al proyectar y construir cimentaciones.

### 63.2 CIMENTACIONES SUPERFICIALES Y PROFUNDAS

Cuando a nivel de la zona inferior de la estructura o próximo a él, el terreno presenta características adecuadas desde los puntos de vista técnico y económico para cimentar sobre él, la cimentación se denomina superficial o directa. Las cimentaciones superficiales están constituidas por zapatas, vigas y placas, o por combinaciones de estos elementos.

Si el nivel apto para cimentar está muy por debajo de la zona inferior de la estructura, la excavación necesaria para proceder a una cimentación directa sería muy costosa y se recurre a una cimentación profunda, constituida por pilotes o pozos de cimentación.

### 63.3 TIPOLOGÍA

Los diferentes tipos de cimentaciones superficiales se indican en las figuras 63-1 (zapatas y vigas) y en la 63-2 (emparrillados y placas). Las soluciones de pilotes se indican en la figura 63-3.

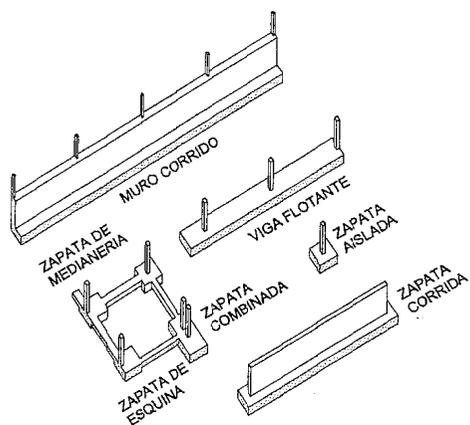


Figura 63-1

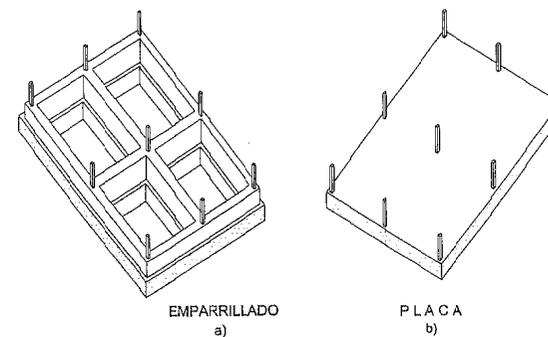


Figura 63-2

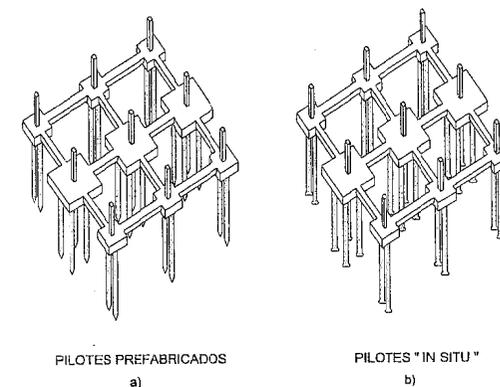


Figura 63-3

### 63.4 ZAPATAS CORRIDAS

Se entiende por zapata corrida aquella que recibe una carga lineal (generalmente un muro) y eventualmente un momento flector transmitido por el muro (fig. 63-4).

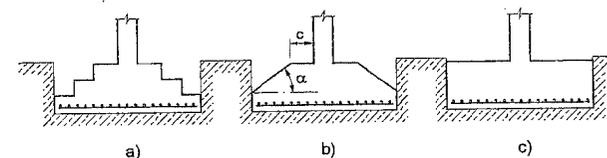


Figura 63-4

Las zapatas escalonadas (fig. 63-4 a), aunque suponen una economía apreciable de hormigón, no se usan hoy en día debido a que requieren encofrado y hormigonado costosos, que hacen que en conjunto resulten caras. La solución de canto variable (fig. 63-4b)) si  $\alpha \leq 30^\circ$  y se emplea un hormigón relativamente seco, puede ser construida sin encofrado, aunque la compactación del hormigón es siempre deficiente en este caso y la vibración imposible, lo cual hace que deba contarse con una resistencia baja del hormigón. Es una solución que sólo suele emplearse en grandes cimientos. En otro caso la solución de canto constante es siempre preferible, técnicamente mejor y económicamente más interesante, pues aunque presente mayor volumen de hormigón, éste se coloca en obra y compacta muy rápida y fácilmente.

En la figura 63-5 se indican posibles formas de agotamiento estructural de la pieza:

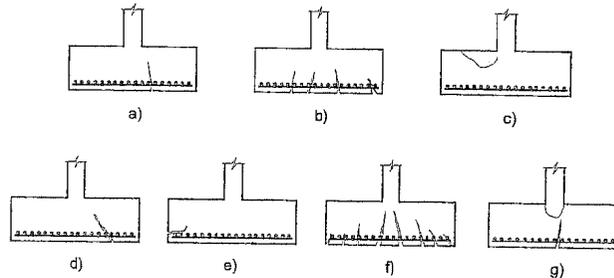


Figura 63-5

- Fallo de la pieza por flexión con rotura frágil sin fisuración de aviso. Puede presentarse en piezas con cuantía de armadura inferiores a la mínima establecida.
- Fallo a flexión por agotamiento de la armadura. Es un fallo dúctil, precedido de considerable fisuración, pero que en el caso de zapatas no es observable.
- Fallo a flexión por agotamiento del hormigón comprimido. Aparece sólo una ligera fisuración en la cara comprimida, paralela a la dirección de la armadura. Sólo se presenta en piezas con muy altas cuantías de acero, en la que éste está infrautilizado, cosa muy poco frecuente en zapatas.
- Fallo por cortante. La fisura se produce con inclinación aproximada de  $45^\circ$ .
- Fallo por anclaje de la armadura. La fisura se produce en el plano de las armaduras, arrancando de su extremo libre.
- Fallo por fisuración excesiva. Este es un estado límite de servicio, que a medio plazo produce la corrosión de las armaduras conduciendo a un fallo final por flexión de uno de los tipos a) ó b). Debe ser considerado con especial cuidado en el cálculo de zapatas, ya que por un lado estas piezas frecuentemente están en ambiente húmedo y a veces agresivo y por otra parte la fisuración no es observable ni puede ser reparada.

- Hendimiento por tracciones horizontales excesivas en zapatas mu- la referencia (63.1) se demuestra que este tipo de fallo no se , caso de zapatas, salvo casos excepcionales.

### 63.5 ZAPATAS RÍGIDAS Y ZAPATAS FLEXIBLES

Se entiende por zapata rígida de hormigón armado, de acuerdo con EHE<sup>1</sup>, aquella en que el vuelo  $v$  (fig. 63-6) no supera a dos veces el canto total  $h$ .

El nombre de rígida viene de que, con tales proporciones, puede considerarse que las presiones de reacción del suelo se reparten uniformemente en todo el ancho  $a_2$ .

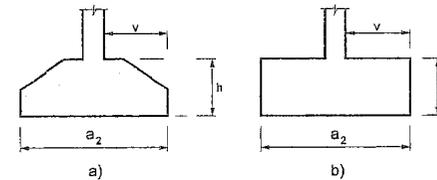


Figura 63-6

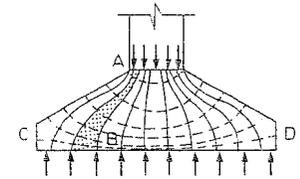


Figura 63-7

Una pieza rígida de este tipo no sigue la ley de Bernoulli referente a la conservación de secciones planas durante la flexión y está constituida por tanto por zonas  $D$ . La red de isostáticas se indica en la figura 63-7 y sugiere más un cálculo basado en suponer bielas comprimidas de hormigón, cosidas por un tirante  $CD$ .

Sin embargo y tal como se demuestra en el libro citado como referencia (63.1), es posible aplicar a todo tipo de zapatas, tanto rígidas como flexibles, el método que mas adelante se expone en 63.7.

### 63.6 CÁLCULO DE ZAPATAS CORRIDAS RÍGIDAS POR EL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES

#### 63.6.1 CASO DE PRESIONES SOBRE EL SUELO LINEALMENTE VARIABLES

La tensión  $T_d$  del tirante no es constante de lado a lado y es necesario completar la celosía con bielas adicionales<sup>2</sup>. Una posible solución es la indicada en la figura 63-8 a)  $x_1$ , debe ser la abscisa del c.d.g. del bloque de tensiones  $ABC'C$  y

$$R_{1d} = \frac{N_d}{2} - 2 \frac{M_d}{a} = N_{1d}$$

1 Un documento reciente es el Eurocódigo de Estructuras de Cimentación (1998) (63.2).

2 Utilizo una Nota Interna de INTEMAC de E. González Valle.

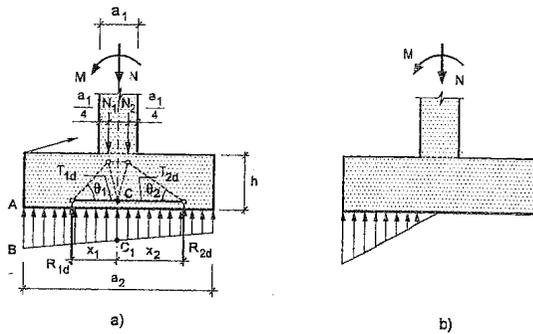


Figura 63-8

En cualquier caso

$$-x_1 R_{1d} + x_2 R_{2d} = M_d \quad [63.1]$$

y suponiendo armadura constante de lado a lado de la zapata

$$T_{2d} = A_s f_{yd} = \frac{\left(\frac{N_d}{2} + 2 \frac{M_d}{a}\right)}{0,85d} (x_1 - 0,25a) \quad [63.2]$$

Si el momento  $M_d$  es importante (Fig. 63-8 b)) la situación es la de una ménsula. (Véase ejemplo 33.1).

### 63.6.2 CASO DE PRESIONES UNIFORMES SOBRE EL SUELO

#### a) Método general

Corresponde al caso indicado en la figura 63-9.

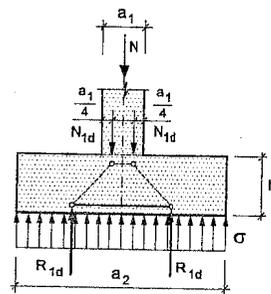


Figura 63-9

En este caso  $N_{1d} = \frac{N_d}{2}$ ,  $R_{1d} = \frac{a_2}{2} \cdot \sigma = \frac{a_2}{2} \cdot \frac{N_d}{a_2} =$

y por lo

acuerdo con [63.2]

$$T_d = \frac{N_d / 2 \left(\frac{a_2}{4} - \frac{a_1}{4}\right)}{0,85d} \quad [63.14]$$

$$T_d = A_s f_{yd} = \frac{N_d / 8}{0,85d} (a_2 - a_1)$$

Con  $f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2$ .

Si la carga del muro de ancho  $a_1$  sobre la zapata es admisible de acuerdo con lo visto en el Capítulo 60, la compresión en las bielas resulta siempre admisible. En otro caso, las comprobaciones deben realizarse de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 33<sup>1</sup>.

El anclaje debe verificarse de acuerdo con lo que más adelante se indica.

#### b) Método de bielas continuas

De acuerdo con lo expuesto en 63.6.1. (Fig. 63-7) puede realizarse un estudio diferencial del conjunto de bielas-tirante.

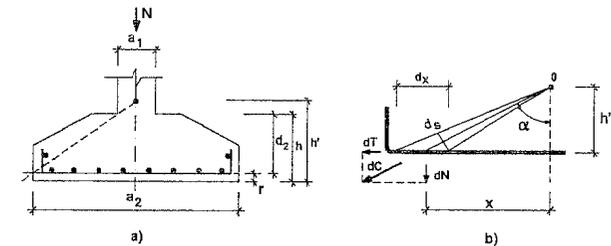


Figura 63-10

$$dN = \frac{N}{a_2} dx \quad [63.4]$$

$$\frac{dT}{dN} = \frac{x}{h'} \quad [63.5]$$

<sup>1</sup> Debe prestarse atención al caso en que el muro sea de un hormigón de resistencia muy superior a la del cimiento.

y por tanto:

$$dT = \frac{Nx}{a_2 h} dx \quad [63.6]$$

y

$$T = \int_x^{a_2/2} \frac{Nx}{a_2 h} dx = \frac{N}{a_2 h} \left[ \frac{a_2^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right] \quad [63.7]$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{a_2}{h} = \frac{a_2 - a_1}{d} \rightarrow h' = \frac{a_2 d}{a_2 - a_1} \quad [63.8]$$

y sustituyendo [63.7]

$$T = \frac{N(a_2 - a_1)}{d a_2^2} \left[ \frac{a_2^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right] \quad [63.9]$$

Siendo  $T$  la tracción en la armadura por unidad de ancho de cimiento.

El máximo de [63.9] se produce para  $x = 0$ .

$$T_{\max} = T_o = \frac{N(a_2 - a_1)}{8d} \quad [63.10]$$

Es interesante comparar [63.9] con la ley de tracciones resultante de suponer la pieza como flexible. El momento flector resulta en este caso

$$M = \frac{N}{a_2} \cdot \frac{(a_2 - 2x)^2}{8} \quad [63.11]$$

Como en zapatas, las cuantías suelen ser bajas, puede aceptarse  $z = 0,9d$ , con lo que la tracción en la armadura resulta:

$$T' = \frac{N}{0,9d a_2} \cdot \frac{(a_2 - 2x)^2}{8} \quad [63.12]$$

Con el método de los momentos el valor de  $T'$  a  $0,15 a_1$  de la cara del muro vale<sup>1</sup>

$$T'_{0,35a_1} = \frac{N}{0,9d a_2} \cdot \frac{(a_2 - 0,7a_1)^2}{8} \quad [63.13]$$

<sup>1</sup>  $T'$  es el valor característico, o de servicio, puesto que lo es  $N$ . La comprobación a  $0,15 a_1$  de la cara del muro es la especificada por EHE como veremos más adelante.

y comparando con  $T_o$ , según [63.10] se tiene

$$\frac{T'_{0,35a_1}}{T_o} = 1,11 \frac{\left(1 - 0,7 \frac{a_1}{a_2}\right)^2}{\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} \quad [63.14]$$

cuya variación se representa en la figura 63-6.

Como se ve, el método de cálculo de la zapata flexible conduce a armaduras ligeramente mayores que el de la zapata rígida o muy ligeramente menores y esto sólo si  $\frac{a_1}{a_2} > 0,3$ .

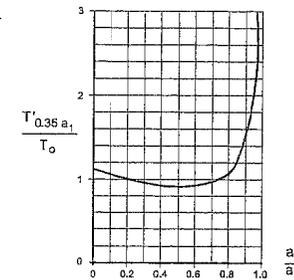


Figura 63-11

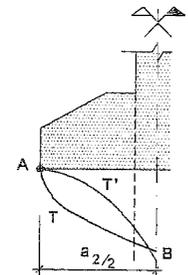


Figura 63-12

Es fácil ver que [63.9] corresponde a una parábola con vértice en B (fig. 63-12) y eje el del muro, mientras que [63.12] corresponde a una parábola también de eje vertical pero con vértice en A, extremo de la zapata, lo cual nos anuncia ya que mientras con el funcionamiento como pieza flexible las tensiones de adherencia decrecen hasta anularse en la punta cuando el funcionamiento obedece al sistema de bielas, dichas tensiones crecen hacia la punta de la armadura, lo cual exigirá un sistema de anclaje a partir de dicha punta (patilla, gancho, etc.) o bien un anclaje mecánico (barra transversal soldada, por ejemplo).

c) **Compresión en las bielas.** Volviendo a la figura 63-7

$$dC = \frac{dN}{\cos \alpha}$$

y la compresión en la biela de hormigón resulta:

$$\sigma_c = \frac{dC}{ds} = \frac{dC}{dx \cos \alpha}$$

o bien:

$$\sigma_c = \frac{dN}{dx \cos^2 \alpha}$$

y teniendo en cuenta [63.1]

$$\sigma_c = \frac{N}{a_2 \cos^2 \alpha}$$

y como  $\cos^2 \alpha = \frac{h^2}{h^2 + x^2}$  resulta:

$$\sigma_c = \frac{N}{a_2} \left[ 1 + \left( \frac{x}{h} \right)^2 \right] \quad [63.15]$$

El máximo de  $\sigma_c$  se produce para  $x = \frac{a_2}{2}$  y vale:

$$\sigma_{c, \text{máx}} = \frac{N}{a_2} \left[ 1 + \left( \frac{a_2}{2h} \right)^2 \right] \quad [63.16]$$

y teniendo en cuenta [63.8]

$$\sigma_{c, \text{máx}} = \frac{N}{a_2} \left[ 1 + \left( \frac{a_2 - a_1}{2d} \right)^2 \right] \quad [63.17]$$

Al ser la zapata rígida se tiene aproximadamente:

$$d \geq \frac{a_2 - a_1}{4}$$

o sea:

$$\frac{a_2 - a_1}{2d} \leq 2$$

luego:

$$\sigma_{c, \text{máx}} \leq 5 \frac{N}{a_2}$$

Como  $\frac{N}{a^2}$  es la presión sobre el suelo,  $5 \frac{N}{a_2}$  es siempre de poca importancia sea cualquiera el hormigón que se emplee.

#### d) Caso especial de zapatas rígidas sobre roca

De acuerdo con el Eurocódigo 2, Parte 3 "Proyecto de Estructuras de Hormigón" cuando la presión sobre el suelo supera los 5 N/mm<sup>2</sup>, debe distribuirse una armadura horizontal

$$A_{t1} f_{yd} = \frac{N_d}{4} \frac{h + a_1}{h} \quad [63.18]$$

donde los valores se definen en la figura 63-13.

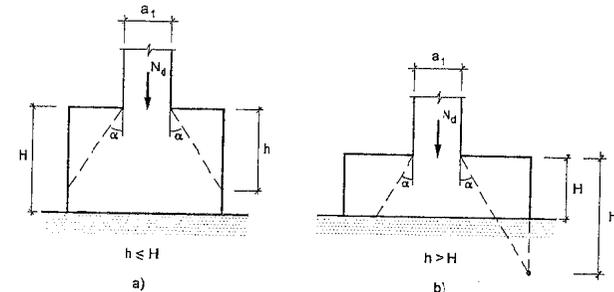


Figura 63-13

Esta armadura debe distribuirse en el canto de la zapata sin rebasar la profundidad  $h$  a partir de la cara superior. Como valor de  $\alpha$  debe tomarse

$$\text{arc tg } \frac{1}{2} = 26,6^\circ$$

#### 63.7 MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO PARA ZAPATAS CORRIDAS, TANTO RÍGIDAS COMO FLEXIBLES

Puede adoptarse el método general unificado que se expone a continuación <sup>1</sup>.

Sea  $N$  el esfuerzo axial actuante sobre la zapata por unidad de ancho. La presión por unidad de superficie de contacto vale, por tanto (fig. 63-14).

$$\sigma_t = \frac{N}{a_2} \quad [63.19]$$

##### a) Cálculo a flexión

El cálculo se realiza respecto a una sección de referencia AA', retrasada respecto a la cara del muro una distancia  $e$ , siendo:

$e = 0,15 a_1$  si el muro es de hormigón

$e = 0,25 a_1$  si el muro es de mampostería o ladrillo

$e =$  la mitad del vuelo de la placa de base respecto a la cara del pilar, cuando se trata de pilares metálicos

<sup>1</sup> Como es habitual, en lo que sigue se ha supuesto un reparto uniforme de presiones bajo la zapata, con independencia de que ésta sea rígida o flexible. El tema se analiza con más detalle en (63.1).

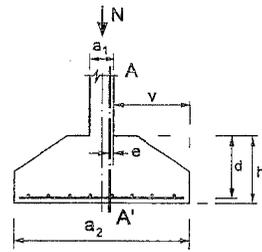


Figura 63-14

El momento flector se calcula aplicando la tensión [63.19] a la zona de zapata situada hacia afuera de la sección de referencia AA' y vale, por tanto:

$$M_d = \frac{N_d}{2a_2} \left( \frac{a_2 - a_1}{2} + e \right)^2 \quad [63.20]$$

siendo  $M_d$  el momento flector de cálculo por unidad de ancho de zapata. Este momento se considera aplicado a una sección de ancho unidad y canto el de la zapata en cara de muro, pero no más de  $1,5 v$ , siendo  $v$  el vuelo. La razón de esta limitación es que para cantos mayores la zona superior no resulta ya colaborante por la excesiva inclinación de las bielas, que resultan ineficaces.

En caso necesario (zapatas escalonadas), la comprobación a flexión debe repetirse en otras secciones, si éstas pueden estar en peores condiciones.

El dimensionamiento a flexión puede realizarse mediante los ábacos GT-82 y GT-83.

La armadura transversal, es decir la paralela al muro, debe cubrir con su canto  $d'$  un momento igual al 20% del que cubre la longitudinal y va dispuesta encima de ella con el fin de no perder canto útil en la longitudinal.

#### b) Comprobación de las condiciones de fisuración

En general, las zapatas deben considerarse en ambiente húmedo, ya que es usual la circulación del agua en el terreno y, por tanto, las posibilidades de corrosión son importantes. Para el caso, poco frecuente, en que pueda garantizarse la ausencia de agua a cota de cimentación, se estaría en ambiente protegido.

Estrictamente de acuerdo con EHE pueden emplearse para la armadura recubrimientos reducidos. Debe llamarse la atención sobre el hecho de que, a igualdad de diámetro, la reducción del recubrimiento mejora las condiciones de fisuración, desde el punto de vista de la fisuración producida por el alargamiento de la armadura. En cambio, aumenta de forma importante el riesgo de corrosión directa de la armadura por escasez de protección del hormigón. En este sentido, la experiencia disponible es buena con recubrimientos importantes y no debe, en cimientos, emplearse recubrimientos inferiores a 25 mm. Como las fórmulas de fisuración se basan en ensayos sobre vigas y tirantes, su aplicabilidad a losas y placas es discutible.

#### c) Comprobación de las condiciones de anclaje

##### c-1) Zapatas con $v \leq h$

Si  $v$  es menor o igual que  $h$ , el anclaje se contará a partir del punto A final de la parte recta de la barra (fig. 63-15)<sup>1</sup>. De acuerdo con EHE, en sentido estricto basta doblar con el radio correspondiente y llevar a partir de ese punto una longitud tal que se tenga  $\frac{1}{3} \ell_b$ ,  $10 \phi$  ó 150 mm, lo que sea

mayor, siendo  $\ell_b$  la longitud básica de anclaje correspondiente a posición I. La prescripción es razonable, aunque probablemente prudente. Por supuesto puede reemplazarse por barras rectas con transversales soldados de acuerdo con lo que se expone en c-2).

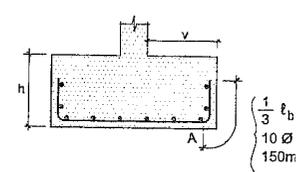


Figura 63.15

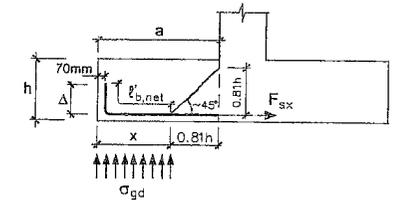


Figura 63.16

##### c-2) Zapatas con $v \geq h$

Como simplificación, en lo que sigue tomamos momentos a cara de muro (o pilar) en lugar de considerar los retranqueos expuestos en a). Suponemos que la zapata se hormigona contra el terreno, por lo que adoptamos un recubrimiento lateral de 70 mm (fig. 63-16). Como es usual la armadura se supone constante en todo el ancho.

$$F_{sx} \cdot 0,81h = x \cdot \sigma_d \left( a - \frac{x}{c} \right) \quad x = a - 0,81h \cot g \theta$$

( $F_{sx}$  es la fuerza producida en la armadura en el punto de abscisa  $x$ )

$$F_{sx} \cdot 0,81h = x \sigma_d \left( a - \frac{a - 0,81h \cot g \theta}{2} \right)$$

y sustituyendo el valor de  $x$

$$F_{sx} \cdot 0,81h = \frac{\sigma_d}{2} (a^2 - 0,66h^2 \cot^2 \theta)$$

<sup>1</sup> Para zapatas rígidas, el funcionamiento como bielas conduce a grandes esfuerzos en los anclajes, como vimos anteriormente.

$$F_{sx} = \frac{\sigma_{id}(a^2 - 0,66h^2 \cot^2 \theta)}{1,62h} \quad [63.21]$$

Además  $A_s f_{yd} \cdot 0,81h = \sigma_{id} \cdot \frac{a^2}{2}$        $A_s f_{yd} = \frac{\sigma_{id} a^2}{1,62h}$       [63.22]

$$\ell_{b,net} = \frac{F_{sx}}{A_s f_{yd}} \cdot \ell_b = \frac{(a^2 - 0,66h^2 \cot^2 \theta)}{a^2} \cdot \ell_b \quad [63.23]$$

$$\ell_{b,net} = \left( 1 - 0,66 \left( \frac{h}{a} \right)^2 \cot^2 \theta \right) \ell_b \quad [63.24]$$

( $\ell_{b,net}$  corresponde a posición de adherencia I) (Ver Capítulo 43).

Tomando  $\theta = 45^\circ$ .

$$\ell_{b,net} = \left[ 1 - 0,66 \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \cdot \ell_b \quad [63.25]$$

Como  $x = a - 0,81h$ , se tiene

-Si  $\ell_{b,net} \leq x - 70 = a - 0,81h - 70 \rightarrow$  ANCLAJE RECTO      [63.26]

-Si no se cumple la condición anterior, pero

$0,7\ell_{b,net} \leq x - 70 = a - 0,81h - 70 \rightarrow$  ANCLAJE CON PATILLA      [63.27]

-Si  $0,7\ell_{b,net} > x - 70 = a - 0,81h - 70 \rightarrow$  PROLONGACIÓN  $\Delta$  (Fig. 63-17).

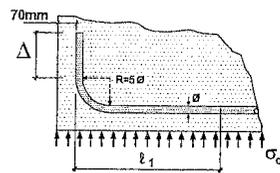


Figura 63-17

Como la longitud  $\Delta$  está en posición I

$$\ell_{b,net} = \frac{\ell_1}{0,7} + \Delta$$

de donde

$$\Delta = 0,7\ell_{b,net} - \ell_1 \quad [63.28]$$

Por supuesto, siempre puede recurrirse a las reducciones de  $\ell_{b,net}$  expuestas en 44.14.1.c) para aplicar las fórmulas [63.26], [63.27] y [63.28] y en particular para las dos últimas puede reducirse el anclaje a simple prolongación recta mediante las barras transversales soldadas, de acuerdo con lo expuesto en 44.15.1.

En este último caso, el número de transversales a soldar, de [63.24] se deduce

-Si  $1 - 0,66 \left( \frac{h}{a} \right)^2 \leq 0,5$       Una transversal soldada

-En otro caso,      Dos transversales soldadas

d) *Cálculo a flexión.* Se reduce al de una losa.

e) *Cálculo a esfuerzo cortante*

Se toma como sección de referencia la situada (fig. 63-18) a una distancia  $d$  de la cara del muro y como canto útil de la sección el canto  $d_1$  en esa sección. En este caso la pieza funciona esencialmente como una viga ancha.

Valor de cálculo de esfuerzo cortante:

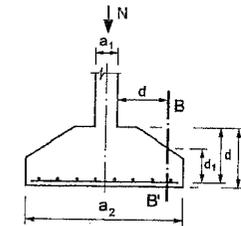


Figura 63-18

$$V_d = \frac{N_d}{a_2} \left( \frac{a_2 - a_1}{2} - d \right) \quad [63.29]$$

Comprobación del esfuerzo cortante: El valor de cálculo del esfuerzo cortante  $V_d$  ha de ser inferior al esfuerzo cortante de agotamiento  $V_{cu}$ , que se determina de acuerdo con lo visto en 39.2.6 a) para losas (fórmula [39.95]). Recuérdese que para aplicar [39.95] es preciso haber dimensionado la armadura de flexión. Una alternativa interesante es el método del ACI expuesto en 39.2.6 c). Véase la diferencia, para cuantías bajas, en la figura 39-37.

### 63.8 CASO DE ZAPATAS CORRIDAS SOMETIDAS A CARGA VERTICAL Y MOMENTO FLECTOR

Si además del esfuerzo axial  $N$  actúa un momento flector  $M$  por unidad de ancho de cimiento, la distribución de tensiones sobre el suelo ya no es uniforme, sino que sigue una ley linealmente variable (fig. 63-18):

$$\sigma_t = \frac{N}{a_2} \pm \frac{6M}{a_2^2} \quad [63.30]$$

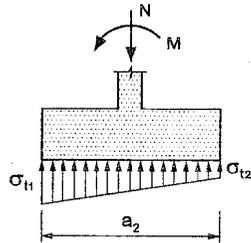


Figura 63-19

resultante de aplicar la ley de NAVIER a la sección de contacto, que se supone toda comprimida.

$$\sigma_{11} = \frac{N}{a_2} + \frac{6M}{a_2^2} \quad [63.31]$$

$$\sigma_{12} = \frac{N}{a_2} - \frac{6M}{a_2^2} \quad [63.32]$$

La hipótesis de que toda la sección esté comprimida conduce a:

$$\sigma_{12} = \frac{N}{a_2} - \frac{6M}{a_2^2} \geq 0$$

y llamando  $e$  a la excentricidad  $\left(e = \frac{M}{N}\right)$  se tiene:

$$e = \frac{M}{N} \leq \frac{a_2}{6} \quad [63.33]$$

Si no se cumple [63.33], las fórmulas [63.30] a [63.32] no son válidas, y la respuesta del terreno pasa de trapezoidal a triangular (fig. 63-20 a)).

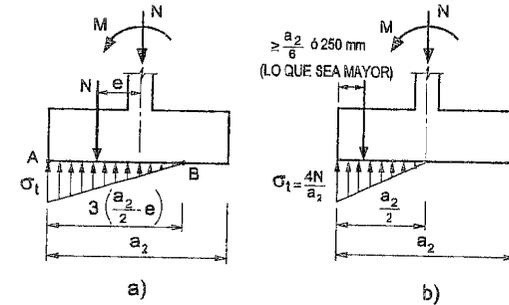


Figura 63-20

El conjunto  $(N, M)$  es equivalente a la fuerza  $N$  con excentricidad  $e = \frac{M}{N}$ . El equilibrio exige que  $AB = 3 \left(\frac{a_2}{2} - e\right)$ , y de ello:

$$\sigma_t = \frac{2N}{3 \left(\frac{a_2}{2} - e\right)} \quad [63.34]$$

Para el dimensionamiento de la zapata todo lo dicho anteriormente sigue siendo válido con los lógicos cambios en las fórmulas para calcular momentos flectores y esfuerzos cortantes.

Debe prestarse atención al caso de zapatas en el que sobre alguna zona de la cara superior actúe un peso (rellenos, soleras, etc.) superior a la reacción del terreno sobre esa zona, pues al presentar momentos de signo inverso a los analizados, necesitarían armadura en cara superior o verificar que las tracciones pueden resistirse con el hormigón. En general las zapatas sometidas a momentos deben ser diseñadas para que las tensiones del terreno sobre ellas sean de compresión o nulas. En otro caso deben verificarse muy cuidadosamente los valores realmente posibles de las combinaciones de acciones.

Una condición recomendable es la indicada en la figura 63-20 b), de que la resultante diste como mínimo  $\frac{a_2}{6}$  del borde ó 250 mm (lo que sea mayor). La razón es que con excentricidades mayores, cualquier dispersión en las acciones, en el replanteo o en las desviaciones de construcción puede conducir a que la tensión, siempre igual o mayor que  $\frac{4N}{a_2}$ , se incremente fuertemente.

### 63.9 ZAPATAS AISLADAS

Se entiende por zapata aislada aquella sobre la que carga un sólo pilar. Como excepción, se considera también como zapata aislada aquella sobre la que cargan dos pilares contiguos separados por una junta de dilatación, tipo "diapasón" (fig. 63-21). A todos los efectos de cálculo, en lo que sigue, ambos pilares que consideraran como un soporte único con perímetro el circunscrito.

El funcionamiento de una zapata de este tipo es complejo y el cálculo se realiza mediante métodos simplificados. Lo dicho anteriormente sobre las zapatas rígidas y flexibles es válido también aquí y el método que se expone a continuación es de nuevo general, tanto para zapatas rígidas como flexibles, con las distinciones específicas que se hacen en cada caso.

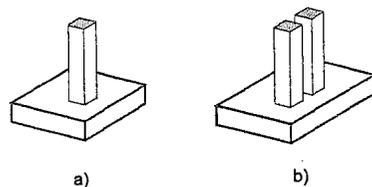


Figura 63-21

A las formas de rotura vistas en 63.4 debe añadirse ahora la ruptura por punzonamiento, según un tronco de pirámide, tal como se indica en la figura 63-22.

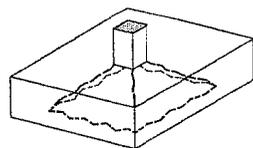


Figura 63-22

### 63.10 MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO PARA ZAPATAS SOMETIDAS A CARGA CENTRADA

Llamamos  $N$  al esfuerzo actuante sobre la zapata<sup>1</sup> (fig. 63-22). La presión transmitida vale, por tanto:

$$\sigma_t = \frac{N}{a_2 b_2} \quad [63.35]$$

y se considera uniformemente repartida.

<sup>1</sup> Excluido por tanto el peso de ésta y el posible relleno sobre ella.

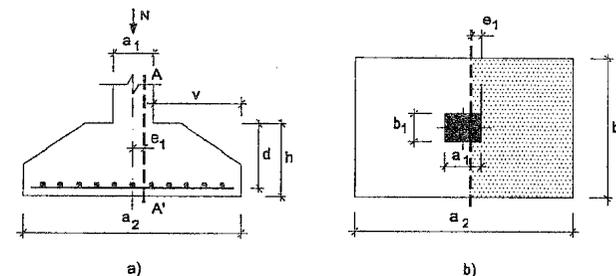


Figura 63-23

#### a) Cálculo a flexión

El cálculo se realiza en cada dirección principal, respecto a una sección de referencia AA' retrasada respecto a la cara del pilar una distancia  $e_1$ , siendo  $e_1 = 0,15 a_1$ .

Si el pilar no es rectangular sino que tiene forma de polígono regular o forma circular, se sustituye a estos efectos por uno cuadrado de la misma área.

El momento flector, en la dirección de  $a_2$ , se calcula aplicando la tensión [63.35] a la zona de la zapata situada hacia afuera de la sección de referencia AA' y vale, por tanto:

$$M_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_d}{a_2} \left( \frac{a_2 - a_1}{2} + e_1 \right)^2 \quad [63.36]$$

El momento actúa sobre una sección de ancho  $b_2$  y canto el de la zapata en cara del pilar, pero no más de  $1,5v$ , siendo  $v$  el vuelo desde la sección considerada.

En caso necesario (zapatas escalonadas), el cálculo debe repetirse en otras secciones, si éstas pueden estar en peores condiciones.

El cálculo debe ser repetido de forma análoga en dirección ortogonal. Préstese atención a que, debido al cruce de armaduras, el canto  $d$  no es el mismo en ambos sentidos. Debe colocarse encima la armadura paralela a la dimensión menor, si es que la zapata no es cuadrada.

En todo caso, si la zapata es cuadrada, la armadura debe distribuirse uniformemente en todo el ancho  $a_2 = b_2$ .

Si la zapata es rectangular (fig. 63-24), la armadura paralela al lado mayor se distribuye uniformemente en el ancho  $b_2$ . Una fracción de la armadura total  $A_s$ , paralela al lado menor ignal a:

$$\frac{2A_s b_2}{a_2 + b_2} \quad [63.37]$$

se distribuye en un ancho  $b_2$ , centrado con el soporte, pero este ancho no se tomará inferior a

$$a_1 + 2h.$$

El resto de la armadura se distribuye uniformemente en el ancho restante.

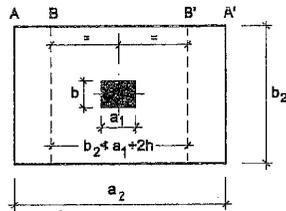


Figura 63-24

En cualquier caso, la armadura en una dirección debe absorber p.m. de ancho un momento no inferior al 20% del que absorbe p.m. de ancho la armadura en dirección ortogonal.

b) *Comprobación de las condiciones de fisuración*

Rige lo dicho en 63.7 b). Existe aquí un factor adicional de seguridad, y es el cosido que cada familia de armaduras ejerce sobre la otra.

c) *Comprobación de las condiciones de anclaje*

De acuerdo con lo que vimos para zapatas corridas en 63.7 c), el fenómeno para zapatas aisladas rígidas ( $v \leq 2h$ ) es análogo en cuanto al funcionamiento como conjunto de bielas y tirantes.

En cada dirección, el anclaje se realiza por tanto de acuerdo con lo visto en los apartados 63.7 c-1) ó 63.7 c-2), según corresponda.

d) *Cálculo a esfuerzo cortante y punzonamiento*

d-1) *Método de EHE*

- **Esfuerzo cortante**

Consideraremos primeramente el método adoptado por EHE. Posteriormente presentaremos un método alternativo unificado para todo tipo de zapatas, adaptado de la Norma Norteamericana ACI 318-95.

1 EHE toma este reparto de ACI-318, que a su vez lo adoptó a la vista de los resultados de ensayos de zapatas reales.

La sección de referencia es la situada a un canto útil  $d$  de la cara del pilar.

El esfuerzo cortante de cálculo resulta, para presión uniforme  $\sigma_i$  y en la dirección  $a_2$

$$V_d = \sigma_i d b_2 \left( \frac{a_2 - a_1}{2} - d \right) \quad [63.38]$$

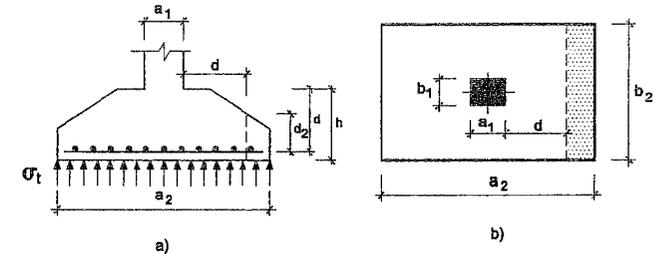


Figura 63-25

siendo  $d$  el canto útil en cara del pilar. (Análogamente se plantea el cálculo para la dirección  $b_2$ ). El esfuerzo cortante de agotamiento  $V_{cu}$  es el proporcionado por 39.2.6 a) (Cortante en losa).

Debe cumplirse

$$V_d \leq V_{cu} \quad [63.39]$$

La comprobación debe repetirse de forma análoga en caso de que existan secciones más alejadas del pilar que estén en peores condiciones, como puede ocurrir en algunos tipos de zapatas escalonadas.

La comprobación debe realizarse también en la otra dirección principal, salvo que resulte evidente que no es necesaria.

Si [63.39] no se cumple, puede disponerse armadura transversal en cada dirección, de acuerdo con la teoría general de esfuerzo cortante en piezas lineales. Es siempre una solución antieconómica y, casi seguro, ilógica. Siempre es preferible aumentar el canto, si es posible.

- **Comprobación a punzonamiento**

Se comprueba la resistencia a punzonamiento, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 43. De acuerdo con EHE la superficie de punzonamiento, es equivalente a la de una superficie  $S_p$  de referencia, prismática, de directriz paralela al eje del pilar y cuyo contorno en planta está formado por rectas y arcos de circunferencia de acuerdo con lo que se indica en la figura 63-26.

La superficie  $S_p$  es el producto del perímetro crítico por el canto <sup>1</sup>. Debe prestarse atención a que el Eurocódigo 2, Parte 3 "Estructuras de hormigón para cimientos" reduce para zapatas la distancia  $2d$  a  $d$ , modificando a la parte general del Eurocódigo 2, que establece la sección crítica a  $1,5d$ .

El valor del esfuerzo de cálculo, siendo  $\sigma_d$  la tensión de cálculo sobre el terreno, vale

$$V_{pd} = \sigma_{td} [a_2 b_2 - A_p] \quad [63.40]$$

donde  $A_p$  es el área encerrada por el perímetro crítico y  $\sigma_{td}$  la tensión sobre el terreno debida a los valores de cálculo de las acciones.

En la fórmula [63.40] puede tomarse como  $d$  la semisuma de los cantos útiles en ambas direcciones.

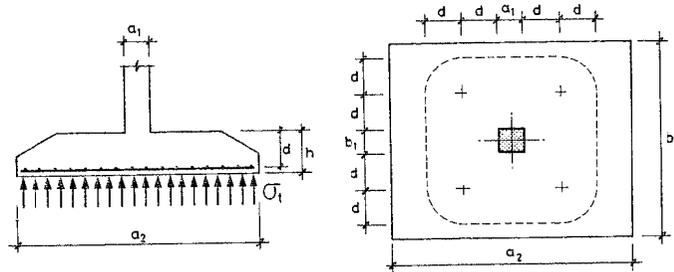


Figura 63-26

Debe cumplirse

$$V_{pd} \leq V_{pu} \quad [63.41]$$

Es evidente que la superficie de perímetro pudiera (fig. 63-27) no ser ABCD, sino el conjunto de dos roturas diagonales planas A'B' y C'D'. Sin embargo, en ese caso, no existe acción biaxial ni propiamente punzonamiento, sino que se trata de roturas por cortante, ya comprobadas en d-1). Puede ocurrir incluso que el perímetro ABCD sea en parte exterior a la zapata, en cuyo caso significa que la comprobación a punzonamiento no es necesaria.

<sup>1</sup> Obsérvese que a lo largo del contorno de  $S_p$ , el canto puede ser variable.

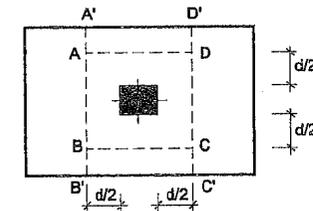


Figura 63-27

Si [63.41] no se cumple, podría disponerse armadura de punzonamiento por cualquiera de los procedimientos expuestos en el Capítulo 43.

Insistimos en el carácter antieconómico y probablemente ilógico (salvo casos muy especiales), de necesitar armadura para absorber el esfuerzo de punzonamiento. Un aumento de canto es siempre preferible.

#### d-2) Método del ACI 318-95

El método que se expone a continuación está adaptado de la Norma Norteamericana ACI 318-95 (63.4). El método unifica las zapatas rígidas y flexibles y lleva muchos años en uso satisfactorio.

#### - Comprobación a corte

Toda zapata, en cada una de las dos direcciones principales, es objeto de comprobación a corte (salvo que alguna de las dos comprobaciones resulte obviamente superflua) en una sección distante  $d$  de la cara del pilar.

Tomando por ejemplo la dirección de  $a_2$  (fig. 63-28).

$$V_d = \sigma_{td} b_2 \left( \frac{a_2 - a_1}{2} - d \right) \quad [63.42]$$

fórmula idéntica, como se ve, a la [63.39].

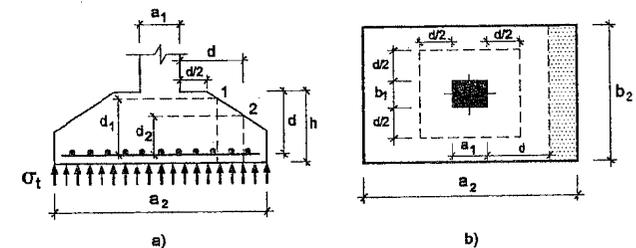


Figura 63-28

El valor de  $V_{cu}$  viene dado por 39.6.2 a) (Fórmula [39.97]).

Debe cumplirse, naturalmente,

$$V_d \leq V_{cu} \quad [63.43]$$

donde  $V_{cu} = 0,16\sqrt{f_{cd}}b_o \cdot d$

El valor de  $V_{cu}$  de [39.97] puede incrementarse, para zapatas armadas, de acuerdo con la fórmula experimental [39.98]

$$V_{cu} = \left[ 0,15\sqrt{f_{cd}} + 13,5p \frac{V_d d}{M_d} \right] b_o \cdot d \geq 0,28\sqrt{f_{cd}}b_o \cdot d \quad [63.44]$$

donde las unidades han de ser  $N$ ,  $mm$  y  $MPa$ .

$M_d$  = Momento flector de cálculo en la misma sección en la que se calcula  $V_d$  y concomitante con él.

$p = \frac{A_s}{b \cdot d}$  cuantía geométrica de la armadura, referida a la sección de cálculo a cortante.

El término  $\frac{V_d d}{M_d}$  en [63.44] no se tomará superior a la unidad.

El cálculo se realiza análogamente en la otra dirección.

#### - Comprobación a punzonamiento

Se realiza tomando el valor de cálculo del esfuerzo de punzonamiento.

$$V_{pd} = \sigma_{td} [a_2 b_2 - (a_1 + d)(b_1 + d)] \quad [63.45]$$

Con este método, el valor de agotamiento viene dado por el menor de los valores siguientes:

$$V_{pu} = 0,09 \left( 2 + \frac{4}{\lambda} \right) \sqrt{f_{cd}} b_o d \quad [63.46]$$

$$V_{pu} = 0,09 \left( \frac{\alpha_s d}{p} + 2 \right) \sqrt{f_{cd}} b_o d \quad [63.47]$$

$$V_{pu} = 0,35\sqrt{f_{cd}} b_o d \quad [63.48]$$

donde  $\lambda$  es la relación del lado mayor al menor de la sección del pilar y  $p$  el perímetro crítico a punzonamiento, y  $\alpha_s$  es un coeficiente que vale 40 para pilares interiores, 30 para pilares de borde y 20 para pilares de esquina.

Obsérvese que en [63.47], en el caso de pilares a valor  $f_{cu}$  de punzonamiento hasta igualarlo al de  $c_r$

er caso

En [34.3] se generaliza el valor de  $\lambda$  para pilares de

e la

Puede aumentarse la resistencia mediante la adición transversal.

### 63.11 ZAPATAS AISLADAS SOMETIDAS A MOMENTOS FLECTOR

El caso más general (fig. 63-29) es de esfuerzo axil  $N$  y momentos  $M_x$ ,  $M_y$  en las dos direcciones principales de la zapata. El caso de pilar no centrado sobre la zapata con excentricidades  $e_x$ ,  $e_y$  respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  de la figura se reduce al anterior con  $N = N$ ,  $M_x = N e_x$ ,  $M_y = N e_y$ .

Si todas las presiones sobre el suelo son de compresión o nulas, la distribución sigue la ley de NAVIER.

$$\sigma_r = \frac{N}{a_2 b_2} \pm \frac{6 M_x}{b_2 a_2^2} \pm \frac{6 M_y}{a_2 b_2^2} \quad [63.49]$$

Las cuatro combinaciones de signos posibles nos dan las presiones en los cuatro vértices.

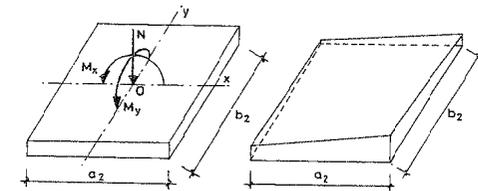


Figura 63-29

Si alguna de las cuatro presenta valor negativo, la fórmula [63.49] no es válida y la zona de respuesta del suelo y los valores de las tensiones deben deducirse mediante la expresión general de las condiciones de equilibrio entre las acciones sobre la zapata y las reacciones del suelo.

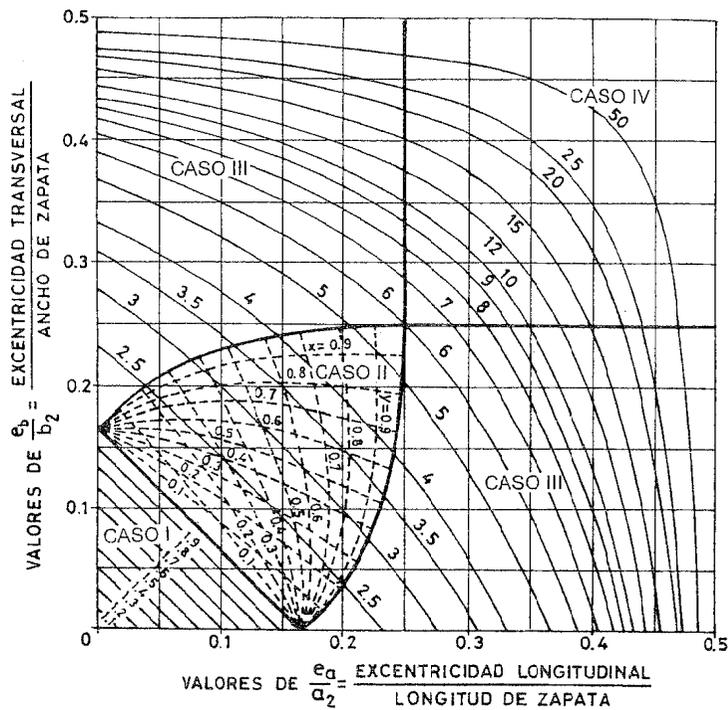
Si uno de los momentos es nulo, las expresiones deducidas para zapatas corridas se generalizan inmediatamente y resultan ( $M_y = 0$ ;  $M_x = M$ ).

Si  $e = \frac{M}{N} \leq \frac{a_2}{6}$ , las tensiones extremas son:

$$\sigma = \frac{N}{a_2 b_2} \pm \frac{6 M}{b_2 a^2} \quad [63.50]$$

si  $e > \frac{a_2}{6}$ , la tensión máxima es:

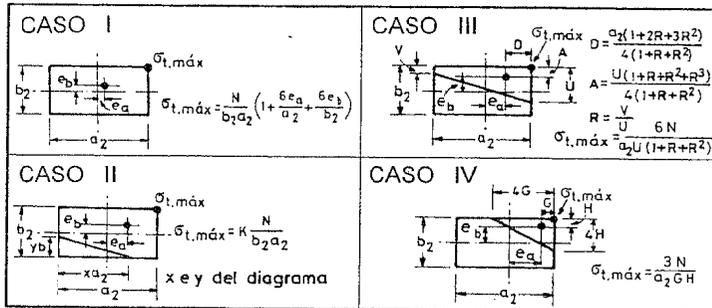
$$\sigma = \frac{2N}{3 \left( \frac{a_2}{2} - e \right) b_2} \quad [63.51]$$



LAS CURVAS DE TRAZO CONTÍNUO DAN LOS VALORES DE  $k$

PRESIÓN MÁXIMA  $\sigma_{t,m\acute{a}x} = k \frac{N}{b_2 \cdot a_2}$

$N$  = CARGA CONCENTRADA SOBRE LA ZAPATA



**ZAPATA RECTANGULAR, DOBLE EXCENTRICIDAD**

Figura 63-30

Si  $M_x \neq 0, M_y \neq 0$ , el problema, aunque sencillo, es laborioso. El ábaco

adjunto, tomado de TENG, referencia (63.5), resuelve directamente cualquier caso (fig. 63-30).

El ábaco proporciona de forma inmediata la presión máxima mediante la expresión:

$$\sigma_{t,m\acute{a}x} = k \frac{N}{BL} \quad [63.52]$$

El valor de  $k$  viene proporcionado por las curvas de trazo continuo de la figura 63.30.

Si la distribución es relativamente uniforme o si en sucesivas hipótesis de combinación de actuaciones de los valores  $N, M_x, M_y$ , la envolvente de presiones pésimas  $\sigma_t$  lo es, resulta frecuente, aunque conservador, calcular los esfuerzo  $\sigma$  para una presión uniforme  $\sigma_t = \sigma_{t,m\acute{a}x}$ . Afortunadamente, la inmensa mayoría de los casos reales de la práctica están en la situación anterior.

Si se está en otro caso, especialmente en los II, III y IV del ábaco, lo anterior conduce a sobredimensionar considerablemente la zapata y para evitarlo el ábaco permite definir completamente el volumen de respuesta  $\sigma_t$  del suelo y realizar el cálculo, tal como vimos para carga uniforme, con las lógicas variantes para la determinación de momentos flectores y esfuerzos cortantes, debidas a la no uniformidad de la carga.

Debe llamarse la atención sobre el hecho de que, si se está en casos tales como II, III y IV, el ábaco permite obtener la información necesaria para el cálculo de los momentos flectores y esfuerzos cortantes, pero no existe ningún método disponible de cálculo para calcular la distribución de estos esfuerzos totales a lo ancho de las secciones respectivas por lo que lo usual es, conservadoramente, calcular para la presión máxima, considerada como uniformemente repartida, como antes dijimos; a veces, se realiza alguna reducción simple a sentimiento.

En relación con las excentricidades muy altas, utilizar disposiciones que conduzcan a los casos II, III o IV constituye una mala práctica, que puede conducir a giros excesivos del cimiento. Volvemos a recomendar la conveniencia de respetar las condiciones [63.33] de que la resultante esté al menos a  $\frac{a_2}{6}$  y  $\frac{b_2}{6}$ , respectivamente, de los bordes, ya que la utilización de excentricidades mayores tiene el inconveniente de que pequeños aumentos de los momentos flectores o errores de replanteo o ejecución, pueden producir grandes incrementos de la tensión máxima en punta.

Por tanto, como normal general, las zapatas deben proyectarse para que presenten la distribución de presiones del caso I del ábaco. En el caso de zapata rectangular, de la condición de que los cuatro valores de [63.49] resulten positivos o nulos, se deduce que la carga vertical  $N$  tiene que incidir sobre la zapata en el núcleo central, que es un rombo de diagonales iguales a  $\frac{1}{3}$  de las dimensiones de la zapata, tal como se indica en la figura 63-31.

Si la libertad de proyecto es completa, la proyección del eje del pilar es  $O$

(fig. 63-32) y las solicitaciones son  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , lo mejor es calcular  $e_x = \frac{M_x}{N}$  y

$e_y = \frac{M_y}{N}$ , con lo que se define el centro  $O'$  de una zapata  $ABCD$ , sometida

a una carga centrada  $N$ , equivalente al conjunto  $(N, M_x, M_y)$ . Con esta disposición, la zapata está sometida a presión  $\sigma$ , uniforme, aunque su pilar esté descentrado.

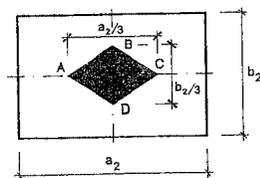


Figura 63-31

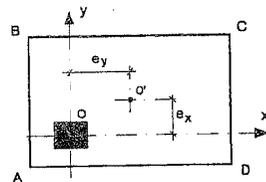


Figura 63-32

Con frecuencia, sobre todo en naves industriales, existen varios conjuntos de valores de combinación  $(N, M_x, M_y)$  y, por tanto, varios centros  $O'$  posibles, por lo que no resultará posible encontrar una zapata que siempre esté sometida a carga centrada y presión uniforme. Sí resultará posible elegir una solución de excentricidad moderada que corresponda al caso I del ábaco o no alejada demasiado de él.

### 63.12 RECOMENDACIONES CONSTRUCTIVAS PARA TODO TIPO DE ZAPATAS

- Bajo la zapata deben disponerse siempre 100 mm de hormigón de limpieza y las armaduras deben apoyarse sobre separadores. La excavación de los 200/300 mm inferiores de terreno no debe ser hecha hasta inmediatamente antes de verter el hormigón de limpieza. Esta recomendación es especialmente importante en suelos cohesivos cuando es posible la aparición de lluvias.
- Siempre son más económicas las zapatas cuanto más flexibles.
- Salvo grandes zapatas, conviene disponer canto constante. Si se adopta canto variable, debe disponerse junto a los paramentos del soporte unas zonas horizontales de, al menos, 100 mm de ancho para montar encofrados del pilar.
- Véase lo dicho en el Capítulo 24 sobre el tratamiento de la junta entre pilar y zapata.
- El canto mínimo en el borde será de 250 mm en zapatas de hormigón armado.
- La separación máxima de armaduras no será superior a 300 mm ni inferior a 100 mm. Si es necesario se agrupan por parejas en contacto.
- En zapatas corridas, en todo caso se considerará una cuantía geométrica mínima en cada dirección de:

-0,0020 para aceros B 400.

-0,0018 para aceros B 500

En la determinación de la cuantía indicada se cuentan todas las armaduras paralelas a la dirección considerada situadas en la cara inferior o la superior y eventualmente en las caras laterales para zapatas aisladas. Por supuesto y además de lo indicado las zapatas deben cumplir con [36.111].

- EHE recomienda no emplear diámetros inferiores a 12 mm, pero no indica el tipo de acero. En nuestra opinión, en zapatas pequeñas puede bajarse a 10 mm en aceros B 400 y B 500.
- El recubrimiento lateral de las puntas de las barras no debe ser inferior a 70 mm, por razón no sólo de protección, sino para asegurarse de que las barras quepan en el pozo excavado con unas tolerancias normales de dimensiones de la excavación y de corte de barras.
- Es recomendable modular las dimensiones horizontales en múltiplos de 250 mm y los cantos en múltiplos de 100 mm, con el fin de facilitar la ejecución. De acuerdo con esto, el canto mínimo expuesto en e) y establecido en EHE pasa a 300 mm.
- En el caso de juntas de dilatación en "diapasón" para soportes o muros contiguos cimentados sobre una misma zapata (fig. 63-33) es siempre conveniente disponer una cierta armadura  $A'_s$  en la cara superior, con el fin de controlar la fisuración que se produce al enfriarse y acortarse la estructura, fenómenos que tienden a "desgarrar" la cara superior de la zapata.
- Para la forma y disposición de la armadura de espera, recuérdese lo dicho en el Capítulo 44.

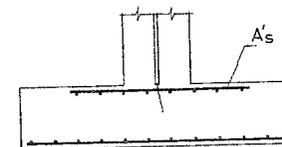


Figura 63-33

### 63.13 PIEZAS DE ATADO ENTRE ZAPATAS

Siempre es conveniente establecer un cierto atado entre zapatas que impida sus desplazamientos horizontales y si la estructura está cimentada en zonas sísmicas con  $a_c \geq 0,16 g$  (véase Capítulo 67) el atado es obligatorio y afecta a todas las zapatas de acuerdo con la Norma Sismorresistente NCS-94 (63.6). Las piezas de atado deben resistir, en tracción y en compresión, un esfuerzo axial igual a  $a_c$  veces el esfuerzo axial correspondiente al más cargado de los dos pilares que enlaza. (Fig. 63-34 b) <sup>1</sup>. Si la cimentación está realizada por pilotes profundos, lo anterior rige aunque  $a_c < 0,16 g$ .

<sup>1</sup>  $a_c$  es el coeficiente de la aceleración sísmica de cálculo. (Ver Capítulo 67).

Si la cimentación está en zona sísmica con  $0,06 g < a_c < 0,16 g$ , a nuestro juicio es suficiente con que cada zapata quede atada en un solo sentido en cada una de las dos direcciones principales, tal como se indica en la figura 63-34 a). Las zapatas perimetrales deben atarse siempre en los dos sentidos a lo largo de las fachadas.

NCS-94 en zonas de sismicidad media admite un atado perimetral solamente si existe losa de hormigón en planta baja. Ello sería correcto si la losa se hormigonara a tope con los pilares, pero como veremos en el Capítulo 70 ello no es correcto y deben disponerse juntas de dilatación alrededor de los pilares, lo que anula la eficacia de la losa a estos efectos.

Llamando  $A_c$  a la sección de la pieza,  $f_{yd}$  el límite elástico de cálculo del acero y  $N_d$  el esfuerzo del soporte más cargado de los dos que enlaza la pieza de atado, se ha de cumplir, en zona sísmica primera

$$\text{Compresión: } 0,85 A_c f_{cd} + A_s f_{yd} \geq a_c N_d \quad [63.53]$$

$$\text{Tracción: } A_s f_{yd} > a_c N_d \quad [63.54]$$

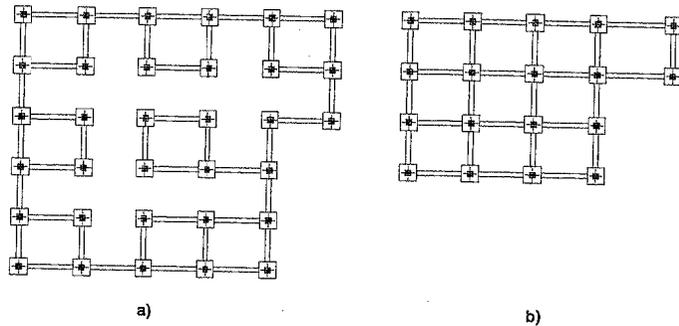


Figura 63-34

La condición [63.54] engloba a la [63.53] y es, por tanto, la determinante para la armadura.

La pieza, para que no requiera comprobación a pandeo, debe tener una esbeltez (siendo  $b$  el lado menor de la sección de la viga):

$$\frac{1/2}{\sqrt{\frac{1}{12} \frac{ab^3}{ab}}} \leq 35 \quad [63.55]$$

lo que conduce a la condición

$$b \geq \frac{1}{20} \quad [63.56]$$

En [63.56]  $\ell$  es la luz libre entre caras de zapatas y la pieza se ha considerado empotrada en ambas zapatas.

Es conveniente establecer unos requisitos mínimos respecto a las dimensiones  $a$  y  $b$  de la pieza de atado (fig. 63-35) dictados por razones constructivas.

Si la pieza se encofra, las dimensiones mínimas pueden ser  $250 \cdot 250$  mm. Si la pieza se hormigona sobre el terreno, el mínimo de ancho  $a$  viene condicionado por posibilidades físicas de excavación con retroexcavadora y de refino de taludes y debe ser  $b \geq 400$  mm. Los recubrimientos en el primer caso son los generales establecidos para piezas encofradas y en el segundo 70 mm lateralmente.

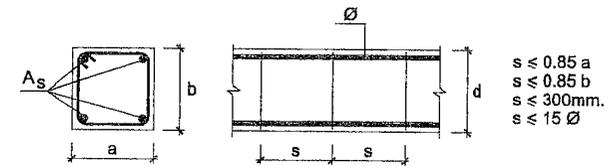


Figura 63-35

En la figura 63-35 se indican las condiciones de separación de estribos.

Si la pieza se hormigona sobre el terreno, debe disponerse una capa de hormigón de limpieza y excavarse el terreno con las mismas precauciones que el de fondo de zapata (fig. 63-36 a)).

La armadura longitudinal de la pieza debe anclarse en ambas zapatas una longitud igual a su longitud de anclaje (fig. 63-36 b)) a partir del eje del soporte, o solapada con la de la pieza del vano adyacente.

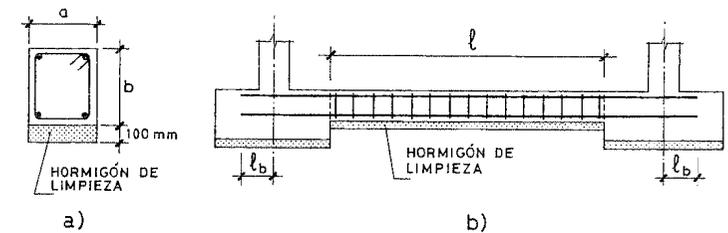


Figura 63-36

La armadura  $A_s$  debe cumplir las condiciones de cuantía mínima respecto a la sección de la pieza de atado.

La tabla GT-139 proporciona directamente piezas de atado de sección cuadrada para diferentes cargas por pilar enlazado. Manteniendo la sección, las armaduras y cargas  $N_d$  por zapata son válidas aunque se cambien las dimensiones transversales. Recuérdese que la luz libre  $\ell$  de la pieza de atado no debe exceder 20 veces su menor dimensión transversal.

### EJERCICIO 63.1

Un pilar de hormigón armado de  $300 \cdot 300$  mm, armado con  $4 \phi 16$ , transmite una carga característica al cimiento  $N_g = 400 \text{ kN}$ ,  $N_q = 200 \text{ kN}$ . El hormigón, tanto del pilar como del cimiento es de resistencia  $25 \text{ MPa}$  y el acero es  $B 400$ . Proyectar una zapata cuadrada, sabiendo que la presión admisible sobre el suelo es de  $0,1 \text{ N/mm}^2$ . Tómesese  $\gamma_g = 1,35$ ,  $\gamma_q = 1,5$ . Se supone la zapata enterrada en suelo húmedo. (Empleese el método del ACI).

Si en un primer tanteo despreciamos el peso propio de la zapata, llamando  $a$  al lado en  $m$ , tendríamos:

$$\frac{600}{a^2} = 100 \text{ kN/m}^2 \quad a = 2,44 \text{ m}$$

Modulando a múltiplos de  $250$  mm, adoptamos  $a = 2,75 \text{ m}$ , y  $h = 0,50 \text{ m}$ , y se obtiene:

$$\sigma'_i = \frac{600}{2,75^2} + 2,5 \cdot 0,5 = 80,6 \text{ kN/m}^2 = 0,0806 \text{ N/mm}^2$$

La condición de punzonamiento conduce a:

$$\frac{840}{2,75^2} [2,75^2 - (0,3 + d)^2] \leq 0,35 \sqrt{16,7} \cdot 10^3 [1,2 + 4d]$$

con lo que  $0,25 \text{ m}$  y modulando a múltiplos de  $0,10 \text{ m}$ ,  $h = 0,40 \text{ m}$ , por razones de flexibilidad.

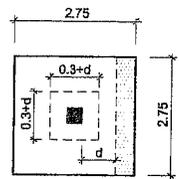


Figura 63-37

Como el vuelo es  $1,225 \text{ m}$ , la zapata resulta flexible y las presiones sobre el terreno resultan

$$\sigma'_i = \frac{600}{2,75^2} + 0,4 \cdot 2,5 = 80,34 \text{ kN/m}^2 = 0,08 \text{ N/mm}^2 < 0,1 \text{ N/mm}^2$$

(Para comprobación de terreno)

$$\sigma'_i = \frac{600}{2,75^2} = 79,3 \text{ kN/m}^2 = 0,0793 \text{ N/mm}^2$$

(Para el cálculo de la zapata)

Hemos elegido la zapata de mínimo canto posible, ya que al no venir impuesta en el enunciado ninguna condición de canto, el mínimo posible conduce a la zapata de menor coste.

Para el cálculo a flexión, partiremos de un recubrimiento de  $30 \text{ mm}$ , con lo que para la armadura el canto útil será del orden de  $360 \text{ mm}$ .

$$\sigma_d = \frac{1,35 \cdot 400 + 1,50 \cdot 200}{2,75^2} = 111 \text{ kN/m}^2$$

$$M_d = \frac{111 \cdot 2,75}{2} (1,225 + 0,15 \cdot 0,30)^2 = 246 \text{ m kN}$$

$$\frac{M_d}{f_{cd} b d^2} = \frac{246 \cdot 10^6}{\frac{25}{1,5} \cdot 2750 \cdot 360^2} = 0,04$$

y con el ábaco GT-82 obtenemos

$$\frac{U_s}{f_{cd} b d} = 0,035 \quad U_s = 0,035 \cdot \frac{25}{1,5} \cdot 2750 \cdot 360 = 577.500 \text{ N}$$

Disponemos  $9 \phi 16$  p.m. en cada dirección.

La comprobación de fisuración, aunque la zapata está en suelo húmedo, resulta satisfactoria de acuerdo con la tabla T-47.4.

Con  $\phi 16$  la longitud de anclaje para acero B 400 y  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$  vale (ver tabla GT-143)

$$l_b = 340 \text{ mm} < 1,225 - 0,81 \cdot 500 - 70 = 750 \text{ mm}$$

luego basta anclaje recto.

La armadura del pilar es  $4 \phi 16$ , luego  $l_b = 340 \text{ mm}$ , como ya vimos. Tal como se indica en la figura, el tramo recto  $AB$  de la armadura de espera es de  $358 \text{ mm}$ , suficiente. (Bastaría con  $\frac{2}{3} \cdot 340 = 227 \text{ mm}$ , según se dijo).

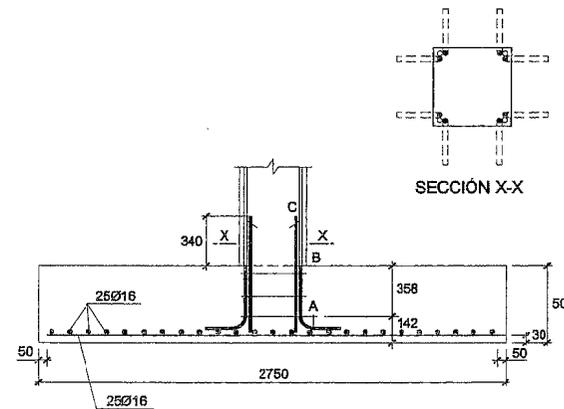


Figura 63-38

### 63.14 ZAPATAS DE MEDIANERÍA

#### a) Generalidades

La necesidad de su uso aparece en cuanto se disponen pilares junto a las lindes de propiedad del terreno en que se va a construir el edificio. Por tanto, las zapatas de medianería son de uso muy frecuente en la práctica.

Existen muy diferentes sistemas para solucionar el problema, que en definitiva es apoyar un pilar de medianería. En la figura 63-39 se indican las soluciones más frecuentes. En el libro citado como referencia (63.1) se analizan en detalle todas estas soluciones. Aquí se exponen únicamente las dos de empleo más frecuente, que son la b) y la e).

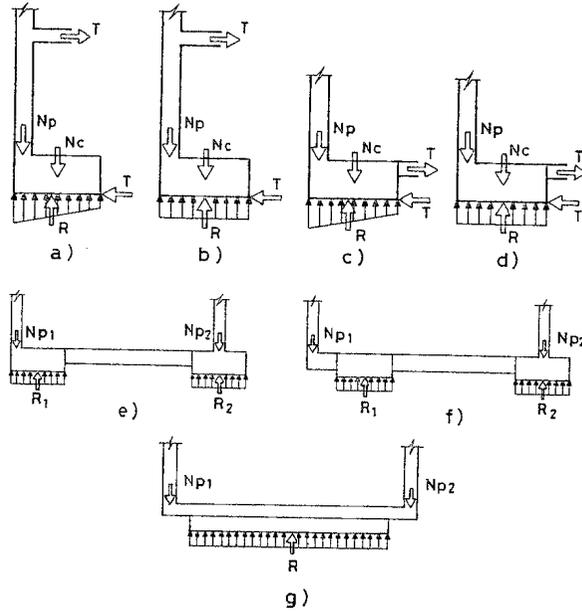


Figura 63-39

Las soluciones a) y b) producen incrementos de flexión importantes en el pilar de fachada. La c) y d) no los producen.

Las soluciones e), f) y g) no producen tampoco incrementos de flexión en los pilares (salvo los pequeñísimos que surgirían de un análisis muy refinado que puede verse en (63.1)) y son por ello las empleadas cuando se trata de pilares sometidos a grandes cargas<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Una solución más es la de zapata combinada, disponiendo una zapata común al soporte de fachada y al inmediato interior.

#### b) Zapata excéntrica con distribución uniforme de presiones y reacción en la estructura del piso.

Se supone que las fuerzas  $T$  centran la carga bajo la zapata (fig. 63-40) resistida por una armadura situada en el dintel de planta baja y por rozamiento entre zapata y suelo bajo el esfuerzo axial del pilar. La presión sobre el suelo vale

$$\sigma'_i = \frac{N_p + N_c}{a_2 b_2} \quad [63.57]$$

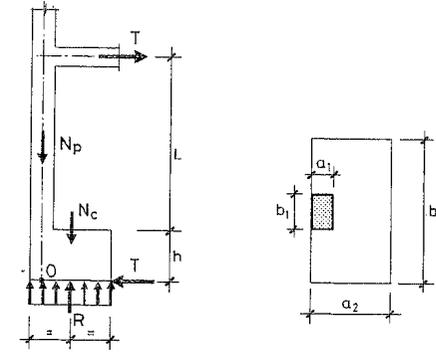


Figura 63-40

Como  $R = N_p + N_c$ , tomando momentos respecto a  $0$ , se tiene

$$R \frac{a_2 - a_1}{2} = T(L + h) + N_c \frac{a_2 - a_1}{2} \quad [63.58]$$

de donde

$$T = \frac{N_p(a_2 - a_1)}{2(L + h)} \quad [63.59]$$

Para que pueda aceptarse una distribución uniforme de presiones bajo la zapata, debe cumplirse<sup>1</sup>

$$\frac{L \lambda L^2 b_2 a_2^2 T}{6 EI (N_p + N_c)} \leq \beta - 1 \quad [63.60]$$

<sup>1</sup> Véase la deducción de esta condición en (63.1).

<sup>2</sup> El equilibrio introducido por el par de fuerzas  $T$  es la explicación de que muchas zapatas de medianería, incorrectamente proyectadas por ignorancia, se hayan comportado satisfactoriamente en apariencia, aunque generalmente con coeficientes de seguridad muy bajos, sobre todo en el pilar.

( $\lambda = 1$  para articulación del pilar a nivel de techo y  $\lambda = 0,75$  para empotramiento). El coeficiente  $\beta$  es el momento aceptable de tensiones reales  $\sigma$ , en el borde de la zapata en la hipótesis de que la distribución real sea lineal pero no uniforme.

NBE-AE-88 autoriza  $\beta = 1,25$  y es bastante corriente tomar  $\beta = \frac{4}{3}$  incluso, con lo que rara vez la condición [63.60] no resultará cumplida.

Es de destacar la extraordinaria sencillez del método, pero no debe olvidarse que tiene el inconveniente de producir un incremento importante de momento en el pilar<sup>1</sup>.

#### Observaciones importantes

- a) La tracción  $T$  en el nivel de primer piso debe ser absorbida disponiendo una armadura adicional  $A_s$ , sobre la ya existente por otros motivos, de valor

$$A_s = \frac{f_d}{f_{yd}} \quad [63.61]$$

donde  $T_d = \gamma_g T_g + \gamma_q T_q (T_g + T_q = T)$

Esta armadura puede disponerse en las vigas o en el propio forjado y debe prolongarse hasta anclarse en puntos que puedan considerarse rígidos.

- b) La fuerza  $T$  de rozamiento entre zapata y terreno puede ser resistida por rozamiento, siempre que

$$C_s T \leq (N_p + N_c) \mu \quad [63.62]$$

donde  $C_s$  es un coeficiente de seguridad que puede tomarse igual a 1,8 y  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento entre hormigón y suelo.

- c) Si el rozamiento no bastase para resistir la fuerza  $T$ , existen dos soluciones:
- Disminuir el valor de  $a_2$  o aumentar  $h$ , para reducir  $T$ .
  - Absorber la fuerza  $T$  con tirantes o tornapuntas anclados o apoyados en puntos adecuados de la estructura (por ejemplo, otras zapatas, comprobando en ellas la seguridad a deslizamiento).
- d) La presión  $\sigma_{t1}$  debe ser comprobada de acuerdo con los datos del Informe Geotécnico.
- e) El pilar debe ser calculado para el momento flector  $M = TL$ , además de los momentos que ya tuviera por el trabajo general de la estructura. (Este momento debe ser tenido en cuenta en el cálculo del entramado).<sup>2</sup>

Este es el inconveniente principal del método, pues obliga a un incremento grande del tamaño del pilar de fachada.

1 Esto puede exigir, bien un cálculo nuevo de esfuerzos, bien un reparto del momento  $M$  a las zonas próximas por alguno de los métodos simplificativos vistos en el Tomo I.  
2 Esto puede exigir, bien un cálculo nuevo de esfuerzos, bien un reparto del momento  $M$  a las zonas próximas por alguno de los métodos simplificativos vistos en el Tomo I.

- f) Para el cálculo de la zapata, cuyo detalle veremos más adelante, se han de manejar las presiones  $\sigma_i$  obtenidas de las  $\sigma'_i$  restándole la parte debida al peso  $N_c$  del cemento y eventual peso de tierras sobre él.

#### c) Dimensionamiento de las zapatas excéntricas

Anteriormente hemos expuesto métodos para la determinación de las dimensiones de la zapata de medianería. A continuación trataremos del cálculo estructural, que presenta diferencias con las zapatas corridas y aisladas.

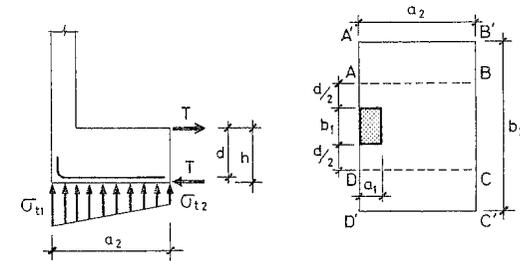


Figura 63-41

En la figura 63-41 se indica la disposición general de la zapata y su ley de tensiones  $\sigma_i$ , sin considerar el peso del propio cemento.

El caso real es extraordinariamente complejo, ya que se trata de una placa, relativamente gruesa, en voladizo desde un sólo apoyo puntual. Un procedimiento satisfactorio es el siguiente:

#### c-1) Cálculo a flexión

- Se considera una viga virtual en voladizo  $ABCD$ , empotrada en el soporte y con vuelo  $a_2 - \frac{a_1}{2}$  y ancho el del soporte  $b_1$  más medio canto a cada lado.
- Sobre esta viga apoya la losa  $A'B'C'D'$ , compuesta de dos losas en voladizo de ancho  $a_2$  y vuelo  $\frac{b_2}{2}$ , sometidas a la correspondiente distribución de presiones  $\sigma_i$ . Sobre la viga virtual actúa también el par  $T$  (fig. 63-41), que debe considerarse también en el dimensionamiento al aislar la zapata del pilar.

#### c-2) Cálculo a esfuerzo cortante

Se realiza de acuerdo con el método general visto en 63.10 d).

El esfuerzo cortante debe comprobarse (fig. 63-42) en las secciones de referencia correspondientes a ambas direcciones ( $A-A$  y  $B-B$ ).

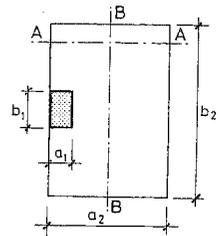


Figura 63-42

Si la zapata es rígida, esta comprobación engloba, como ya vimos, la de punzonamiento.

c-3) Cálculo a punzonamiento

Se realiza de acuerdo con el Capítulo 43 para pilar de borde.

d) Zapata excéntrica con viga centradora

El método consiste en enlazar la zapata de medianería a otra zapata interior, mediante una viga que recibe el nombre de centradora (fig. 63-43) porque, efectivamente, desempeña la misión de centrar la fuerza de reacción del suelo bajo la zapata de medianería.

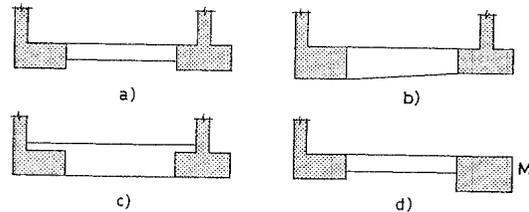


Figura 63-43

La solución más habitual es la indicada en a) con viga de sección constante. La b), aunque puede resultar necesaria en algún caso, presenta una ferralla más complicada, al tener estribos de canto variable. La c) es de hormigonado complicado y usualmente necesita hormigonar la viga en dos etapas, una hasta cara superior de zapatas y otra hasta el enrase definitivo, lo cual exigirá una comprobación adicional del esfuerzo rasante de la junta. En cualquiera de los casos, la carga equilibrante del soporte interior puede ser sustituida por un macizo M (fig. 63-43 d).

El esquema de cálculo se indica en la figura 63-44. Dada la gran rigidez del conjunto zapatas-viga centradora, frente a los pilares, los momentos adicionales producidos en éstos pueden despreciarse y el esquema estructural es el de la figura 63-44 b), es decir, el de una viga simplemente apoyada sometida a la carga  $R'_1$ , a la que aplicamos las condiciones de equilibrio

$$\begin{cases} N_{p1} + N_{c1} + N_{p2} + N_{c2} - R'_1 - R'_2 = 0 \\ N_{p1} - (R'_1 - N_{c1}) c = 0 \end{cases} \quad [63.63]$$

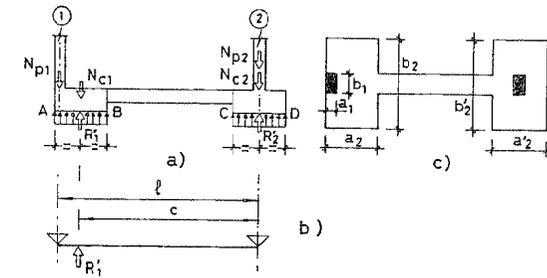


Figura 63-44

Sistema que, resuelto, conduce a:

$$R'_1 = N_{p1} \frac{1}{c} + N_{c1} \quad 1 \quad [63.64]$$

$$R'_2 = N_{p2} + N_{c2} - N_{p1} \left( \frac{1}{c} - 1 \right) \quad [63.65]$$

La primera condición que debe cumplir la solución es que la viga centradora no levante el soporte 2, o lo que es lo mismo  $R'_2 > 0$ , esto es:

$$N_{p2} + N_{c2} - N_{p1} \left( \frac{1}{c} - 1 \right) > 0 \quad [63.66]$$

Un criterio simplificado, del lado de la seguridad, es exigir que [63.64] se cumpla actuando en el soporte 1 la carga permanente más la sobrecarga ( $N_{p1}$ ) y en el soporte 2 sólo la carga permanente ( $N_{g2}$ ).<sup>2</sup>

$$N_{g2} + N_{c2} - N_{p1} \left( \frac{1}{c} - 1 \right) > 0 \quad [63.67]$$

- 1 Obsérvese que [63.64] es superior a  $N_{p1} + N_{c1}$ . Por tanto, el método de la viga centradora, aunque tiene la ventaja de no transmitir momento al soporte, exige una zapata de mayor superficie que el método visto anteriormente.
- 2 Es un criterio simplificado, pues si en el soporte 1 actúa la sobrecarga es porque lo hace en el vano entre los dos soportes, en los distintos pisos y, por tanto, en el soporte 2 aparecería al menos una fracción de la sobrecarga.

La presión  $\sigma'_{i1}$ , en la zapata de medianería, vale

$$\sigma'_{i1} = \frac{R'_1}{a_2 b_2} = \frac{N_{p1} \frac{\ell}{c} + N_{c1}}{a_2} \quad [63.68]$$

y en la zapata interior, descontaremos sólo la reacción de la viga centradora debida a la carga permanente del soporte 1, que denominamos  $N_{g1}$ , con lo que, de acuerdo con [63.65], tenemos:

$$\sigma'_{i2} = \frac{N_{p2} + N_{c2} - N_{g1} \left( \frac{\ell}{c} - 1 \right)}{a_2 b_2} \quad [63.69]$$

Todo lo anterior se ha referido al cálculo de presiones sobre el terreno, debiendo por tanto verificarse

$$\sigma'_{i1} \leq \sigma'_i \text{ adm}$$

$$\sigma'_{i2} \leq \sigma'_i \text{ adm}$$

Para el cálculo de las zapatas y de la viga centradora, de acuerdo con lo ya dicho, no consideraremos los pesos propios de zapatas y viga, con lo que designando sin primas las cargas correspondientes, se tiene:

De [63.64] con  $N_{c1} = 0$

$$R_1 = N_{p1} \frac{1}{c} \quad [63.70]$$

$$\sigma_{i1} = \frac{N_{p1} 1}{a_2 b_2 c} \quad [63.71]$$

De [63.65] con  $N_{c2} = 0$

$$\sigma_{i2} = \frac{N_{p2} - N_{g1} \left( \frac{1}{c} - 1 \right)}{a_2 b_2} \quad [63.72]$$

*Cálculo de la viga centradora*

El esquema de cálculo de la viga centradora es el de la figura 63-45 a).

El momento máximo en viga resulta

$$M_{1d} = -\gamma_f \left[ -R_1 \frac{a_2}{2} + N_{p1} \left( a_2 - \frac{a_1}{2} \right) \right]$$

$$M_{1d} = -\gamma_f \frac{N_{p1}}{2} \left[ a_2 \left( 2 - \frac{1}{c} \right) - a_1 \right] \quad [63.73]$$

1 El signo - en los momentos indica tracciones en cara superior.

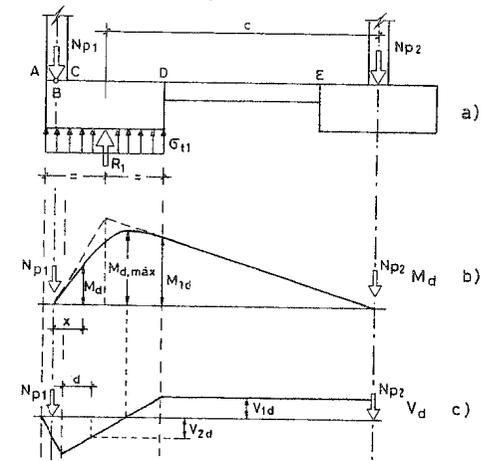


Figura 63-45

El momento máximo ocurre en el interior de la zapata y se determina fácilmente trazando por puntos la ley de momentos.

Lo normal es dimensionar la viga para el momento [63.73], ya que el máximo ocurre en el interior de la zapata y, al ser mucho mayor la sección de hormigón y por tanto mayor el canto útil, la condición crítica suele ser [63.73]. Sólo con cuantías muy bajas en viga (lo cual no es normal precisamente en vigas centradoras), puede ser crítico el valor máximo.

La distribución de momentos flectores se indica en la figura 63-45 b) y es lineal sobre la viga. La distribución de esfuerzos cortantes se indica en la figura 63-45 c) y es constante sobre la viga con valor

$$V_{1d} = -\gamma_f (R_1 - N_{p1})$$

es decir

$$V_{1d} = \gamma_f N_{p1} \left( \frac{1}{c} - 1 \right) \quad [63.74]$$

Considerando la viga como existente de soporte a soporte, con el ensanchamiento que representa la zapata excéntrica, el cortante se comprueba a una distancia  $d$  de la cara y vale

$$V_{2d} = \gamma_f [N_{p1} - a_2 b_2 \sigma_{i1} - d b_2 \sigma_{i1}]$$

y sustituyendo  $\sigma_{ti}$  por [63.71]

$$V_{2d} = (\gamma_g N_{pl,g} + \gamma_q N_{pl,q}) \left[ 1 - \frac{1(a_1 + d)}{a_2 c} \right] \quad [63.75]$$

El cortante  $V_{1d}$  será resistido con la sección de la viga y requerirá por tanto armadura de corte. El cortante  $V_{2d}$  es resistido por la sección de la zapata de ancho  $b_2$  y canto  $d$  y no requerirá habitualmente dicha armadura, excepto si el canto de la viga supera el de la zapata, en cuyo caso el cortante debe ser resistido por la viga.

#### Cálculo de la zapata excéntrica

Dada la existencia de una viga de soporte a soporte, la zapata flexa exclusivamente en sentido perpendicular al plano medio de la viga (fig. 63-46) y su cálculo a flexión, fisuración y anclaje es totalmente idéntico al que vimos para zapatas corridas, considerando el ancho  $b$  de la viga como el de un muro virtual que apoyase en la zapata.

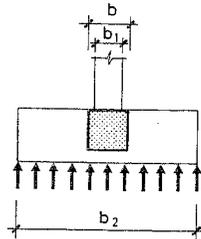


Figura 63-46

La comprobación a cortante en el sentido  $b_2$  se hace también de manera idéntica a como vimos anteriormente.

Dada la estructuración del cimiento, es necesaria la comprobación a punzonamiento. Otra solución es armar la viga a cortante, disponiendo estribos hasta la fachada y cubriendo el valor  $V_{2d}$ <sup>1</sup>. No es entonces necesaria la comprobación a punzonamiento.

#### Cálculo de la zapata interior

Corresponde al caso de zapata aislada. Únicamente debe observarse que la presión de reacción del suelo, debida a la reacción ascendente provocada por la viga centradora, se reduce, de acuerdo con [63.72] a

$$\sigma_{t2} = \frac{N_{p2} - N_{g1} \left( \frac{1}{c} - 1 \right)}{a_2 b_2} \quad [63.76]$$

1 Esta solución permite reducir el canto en estas zapatas, que suelen ser críticas a punzonamiento.

## 63.15 ZAPATAS DE ESQUINA

### a) Generalidades

Este tipo de zapatas aparece en los edificios, bien en las esquinas en que concurren dos medianerías o también en las que concurre una medianería y una fachada en límite de vía pública (fig. 63-47).

Son, por tanto, de uso muy frecuente en construcción urbana y en ciertos tipos de construcciones industriales.

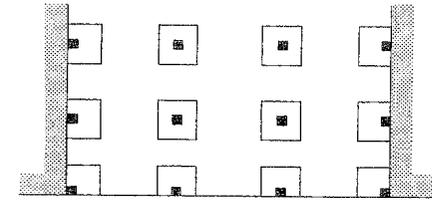


Figura 63-47

Como en el caso de zapatas de medianería, son posibles muchos tipos de soluciones. Desarrollaremos las dos más comunes<sup>1</sup>.

### b) Zapata de esquina con distribución uniforme de presiones y reacción en la estructura del piso

Es un caso semejante al expuesto en 63.14. Analizamos el caso usual que es el de zapata cuadrada<sup>2</sup>.

Se supone que las fuerzas (fig. 63-48) centran la reacción bajo la zapata, de forma que la presión sobre el suelo vale:

$$\sigma_t = \frac{R}{a_2^2}$$

siendo  $R$  la resultante de presiones.

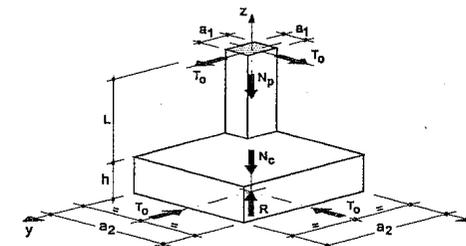


Figura 63-48

1 Véase (63.1) para ampliación del tema.  
2 El planteamiento es válido para zapata rectangular.

Se desarrolla el método, como en el caso anterior, para soporte y zapata cuadrados. Escribiendo las seis ecuaciones de equilibrio para el sólido soporte-zapata (componentes según los tres ejes  $X, Y, Z$  y momentos respecto a los tres ejes iguales a cero) se tiene<sup>1</sup>:

$$\Sigma X = 0 \quad T_o - T_o = 0 \quad [63.77]$$

$$\Sigma Y = 0 \quad T_o - T_o = 0 \quad [63.78]$$

$$\Sigma Z = 0 \quad R - N_p - N_c = 0 \quad [63.79]$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad T_o(L+h) + N_p \frac{a_1}{2} + N_c \frac{a_2}{2} - R \frac{a_2}{2} = 0$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad -T_o(L+h) - N_p \frac{a_1}{2} - N_c \frac{a_2}{2} + R \frac{a_2}{2} = 0$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad T_o \frac{a_1}{2} - T_o \frac{a_1}{2} + T_o \frac{a_2}{2} - T_o \frac{a_2}{2} = 0$$

Sistema cuya solución es

$$R = N_p + N_c$$

$$\sigma'_i = \frac{N_p + N_c}{a_2^2} \quad [63.80]$$

$$T_o = N_p \frac{a_2 - a_1}{2(L+h)} \quad [63.81]$$

Como en 63.14 y por análogos motivos, el método sólo es válido si

$$\frac{K \lambda L^2 a_2^3 T}{6(N_p + N_c)E1} \leq \frac{\beta - 1}{\sqrt{2}} \quad [63.82]$$

donde  $T = T_o \sqrt{2}$ .

( $\lambda = 1$  para articulación a nivel de techo y  $\lambda = 0,75$  para empotramiento).

Vale aquí lo dicho en 63.14 como OBSERVACIONES a) a f) que allí se hicieron.

### c) Cálculo de la zapata

En el caso estudiado, la zapata constituye una placa gruesa empotrada en el pilar por una de sus esquinas, por lo que su funcionamiento es complejo.

<sup>1</sup> La solución es inmediata dando una sección vertical por el plano de simetría. Se ha preferido plantear el sistema general, porque sería el necesario para el caso de soporte y zapata no cuadrados.

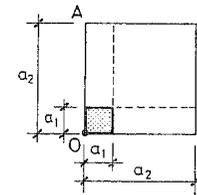


Figura 63-49

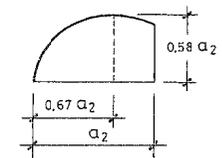


Figura 63-50

### c-1) Cálculo de la placa

**Cálculo a flexión.** A continuación se expone un método simplificado de cálculo basado en suponer dos vigas virtuales en voladizo,  $OA$  y  $OB$ , empotradas en el pilar y sobre estas vigas se considera apoyada una placa cuadrada de lado  $a_2$  sometido a la ley de presiones  $\sigma$ , del terreno. El caso ha sido estudiado en la referencia (63.7) y de su estudio resultan unos momentos máximos, uno en dirección de la diagonal que pasa por el pilar, que produce tracciones en cara inferior, y otro en dirección ortogonal que produce tracciones en cara superior. El valor de estos momentos es prácticamente coincidente, resultando, por unidad de ancho

$$M = \frac{\sigma_i a_2^2}{4,8} \quad [63.83]$$

Como el armado en sentido diagonal complica mucho la ferralla, disponemos la armadura correspondiente al momento  $M$  por metro de ancho en ambas direcciones principales de la zapata. Recuérdese que esta armadura es necesaria en ambas caras de la zapata.

Para el cálculo de las vigas virtuales  $OA$  y  $OB$ , el análisis teórico conduce a una distribución de reacciones de borde como se indica en la figura 63-50, lo que conduce a un momento en cada voladizo

$$M_y = 0,28 \sigma_i a_2^3$$

Como no consideramos las torsiones, adoptaremos para los voladizos el valor

$$M_y = \frac{\sigma_i a_2^3}{3} \quad [63.84]$$

La armadura de la placa se dispone en horquillas como se indica en la figura 63-51 a), con lo que se simplifica el anclaje en el extremo  $A$ . El anclaje en el extremo  $B$  se realiza de acuerdo con lo visto anteriormente.

<sup>1</sup> Si se emplea tirante, al momento  $M_y$  debe añadirse el valor  $M = -T \left( h - \frac{h'}{2} \right)$ . Es recomendable que el momento resultante se absorba con armadura simétrica (horquillas).

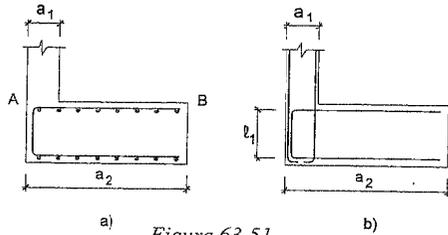


Figura 63-51

Para que las horquillas sean iguales en ambas direcciones, las capas deben colocarse como se indica en la figura.

Los voladizos virtuales  $OA$  y  $OB$  se arman considerando un ancho ficticio igual al del pilar. Su armadura, en su entrega en el pilar, debe solaparse con la armadura de espera o bien ser ella misma armadura de espera.

d) Zapata de esquina con distribución uniforme de presiones, conseguida mediante dos vigas centradoras

El esquema se indica en la figura 63-52. Llamemos  $N_{p1}$ ,  $N_{p2}$ ,  $N_{p3}$  los esfuerzos axiales de los tres soportes y  $N_{c1}$ ,  $N_{c2}$ ,  $N_{c3}$  los pesos de los tres cimientos. Sean  $R_1$  y  $R_2$  las reacciones ascendentes producidas en los pilares 1 y 2 por la reacción  $R$ , centrada bajo el cimiento del pilar de esquina 3.

Aplicamos las ecuaciones de equilibrio al sistema formado por las fuerzas  $N_{p3}$ ,  $N_{c3}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R$ . Las ecuaciones de los momentos respecto a los ejes  $X$ ,  $Y$ , se han sustituido por las correspondientes a los ejes  $X'$ ,  $Y'$  de la figura 63-52.

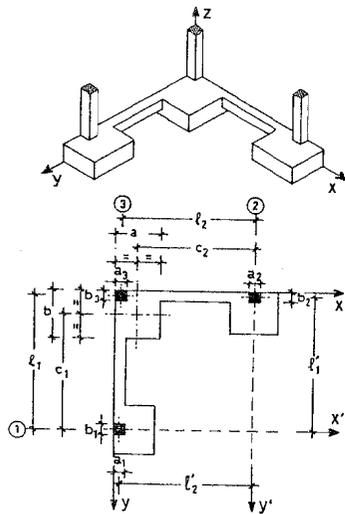


Figura 63-52

lo que simplifica mucho las expresiones

$$\Sigma Z = 0 \quad N_{p3} + N_{c3} + R_1 + R_2 - R = 0$$

$$\Sigma M_{x'} = 0 \quad -N_{p3}l_1 - N_{c3}c_1 - R_2l_1 + R_{c1} = 0$$

$$\Sigma M_{y'} = 0 \quad N_{p3}l_2 + N_{c3}c_2 + R_1l_2 - R_{c2} = 0$$

sistema que, resuelto, conduce a

$$R_1 = N_{p3} \frac{l_2(l_1 - c_1) + c_2(l_1 - l_1)}{l_1c_2 + l_2c_1 - l_1l_2} \quad [63.85]$$

$$R_2 = N_{p3} \frac{l_1(l_2 - c_2) + c_1(l_2 - l_2)}{l_1c_2 + l_2c_1 - l_1l_2} \quad [63.86]$$

$$R = N_{c3} + N_{p3} \frac{l_1l_2 + l_2l_1 - l_1l_2}{l_1c_2 + l_2c_1 - l_1l_2} \quad [63.87]$$

Si los soportes son de tamaños muy parecidos, puede suponerse (ver referencia (63.2),  $l_1 = l_1$ ,  $l_2 = l_2$  y las expresiones anteriores se simplifican y transforman en

$$R_1 = N_{p3} \frac{l_2(l_1 - c_1)}{l_1c_2 + l_2c_1 - l_1l_2} \quad [63.88]$$

$$R_2 = N_{p3} \frac{l_1(l_2 - c_2)}{l_1c_2 + l_2c_1 - l_1l_2} \quad [63.89]$$

$$R = N_{c3} + N_{p3} \frac{l_1l_2}{l_1c_2 + l_2c_1 - l_1l_2} \quad [63.90]$$

La presión bajo la zapata resulta por tanto

$$\sigma_t' = \frac{R}{ab} \quad [63.91]$$

donde  $R$  viene dada por [63.87] o [63.90].

Para el cálculo estructural de la zapata, el valor de  $\sigma_t$  vale

$$\sigma_t = \frac{R - N_{c3}}{ab} \quad [63.92]$$

Es necesario asegurarse que las fuerzas  $R_1$  y  $R_2$  no levantan los pilares. Como hicimos en 63.14 d), adoptaremos la simplificación de que actuando en el pilar 3 la carga permanente más la sobrecarga, no se produzca levantamiento en los pilares 1 y 2, actuando en ellos sólo sus cargas permanentes  $N_{g1}$ ,  $N_{g2}$ , más el peso de sus cimientos,  $N_{c1}$ ,  $N_{c2}$ . Es decir:

$$R_1 \leq N_{g1} + N_{c1} \quad [63.93]$$

$$R_2 \leq N_{g2} + N_{c2} \quad [63.94]$$

#### Cálculo de las vigas centradoras

La viga centradora 2-3 se representa en la figura 63-53, donde  $N_{p3-2}$  representa el esfuerzo axial actuante en el pilar 3 y asignando a la viga centradora 2-3,  $R_{3-2}$  tiene análogo significado.

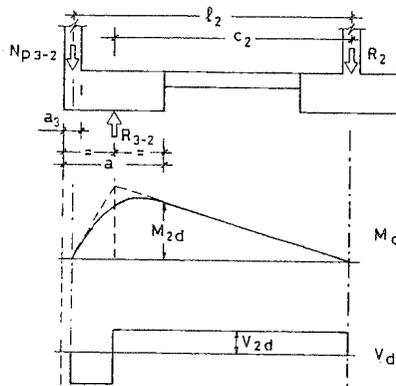


Figura 63-53

Aplicando las ecuaciones de equilibrio

$$N_{p3-2} + R_2 = R_{3-2}$$

$$N_{p3-2} \cdot l_2 - R_{3-2} c_2 = 0$$

de donde

$$R_{3-2} = R_2 \frac{l_2}{l_2 - c_2} \quad [63.95]$$

$$N_{p3-2} = R_2 \frac{c_2}{l_2 - c_2} \quad [63.96]$$

El cálculo de la viga se hace como en 63.14 d). La viga 3-1 se calcula de forma análoga.

#### Cálculo de la zapata de esquina

Se realiza de forma idéntica a lo expuesto en c). La presión  $\sigma$ , para el cálculo, vale

$$\sigma_t = \frac{R - N_{c3}}{a b} \quad [63.97]$$

Obsérvese (fig. 63-54) que al calcular la zapata mediante lo expuesto en c), en el cálculo a corte y punzonamiento, se adoptó un criterio que era correcto para zapatas de esquina aisladas, es decir, sin vigas centradoras. Este criterio es conservador para nuestro caso, ya que despreciamos las reacciones  $R_1$  y  $R_2$  de las vigas sobre la zapata, que naturalmente reducen los esfuerzos cortante y punzonante. No es posible un cálculo más ajustado, ya que no existe un método de cálculo disponible para estudiar el reparto de las fuerzas  $R_1$  y  $R_2$  hacia el interior de la zapata<sup>1</sup>.

#### Cálculo de las zapatas contiguas

Su cálculo debe realizarse descontando de su carga vertical los valores de  $R_1$  y  $R_2$  obtenidos en [63.88] y [63.89] haciendo  $N_{p3} = N_{g3}$  donde  $N_{g3}$  es el esfuerzo axial debido a la carga permanente.

### 63.16 ZAPATAS COMBINADAS

#### a) Generalidades

Se entiende por zapata combinada la que cimenta dos pilares<sup>2</sup>. En general, en este caso, es una buena práctica dimensionar el cimiento de forma que el centro de gravedad de su superficie en planta coincida con el de las acciones. Esto puede conseguirse de varias formas (Fig. 63-55): Una de ellas consiste en construir la zapata de ancho constante, de forma que el centro de gravedad del rectángulo de la planta de la zapata coincida con el punto de paso de la resultante de las cargas de los dos soportes. Esto mismo puede alcanzarse con otras formas de planta, como por ejemplo, la trapezoidal, pero ello tiene el inconveniente de complicar mucho la ferralla, al organizarla con barras de longitud variable, por lo que muy rara vez se recurre a esta solución.

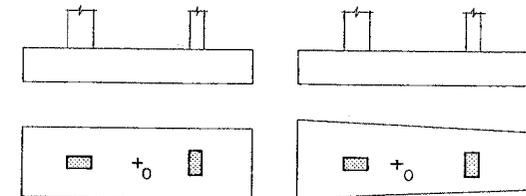


Figura 63-55

- 1 Por supuesto, al existir vigas centradoras no se disponen ni calculan voladizos virtuales. El cálculo se reduce al de la placa apoyada en las vigas centradoras.
- 2 Se excluye naturalmente el caso de pilares contiguos en juntas de dilatación, caso que se trata como el de un pilar único.

Actualmente, por motivos económicos, se tiende a dar a las zapatas combinadas canto constante, aunque a veces, en casos particulares, se emplea la solución indicada en la figura 63-56 con sección en *T* invertida.

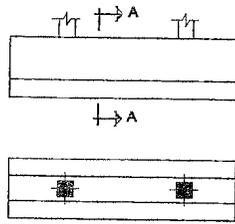


Figura 63-56

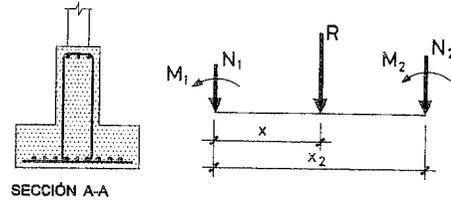


Figura 63-57

El caso más general es el de las dos cargas con dos momentos <sup>1</sup> (fig. 63-57).

Estableciendo el equilibrio con la resultante *R*, se tiene:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = R \\ M_1 + M_2 - N_2 x_2 = -R x \end{cases} \quad [63.98]$$

de donde:

$$R = N_1 + N_2 \quad [63.99]$$

$$x = \frac{N_2 x_2 - M_1 - M_2}{N_1 + N_2} \quad [63.100]$$

con lo que queda definida la magnitud y posición de la resultante.

Si es posible, el cimiento, generalmente rectangular, se dispone concéntrico con *R*, con lo cual se tiene la ventaja de que las presiones sobre el suelo, si el cimiento va a ser rígido, pueden considerarse uniformes.

Si la coincidencia del centro de gravedad en planta del cimiento con el punto de paso de la resultante no puede conseguirse, la distribución de presiones es variable. En ese caso a partir del valor de *R* y de su excentricidad *e* respecto al centro de gravedad de la planta de la zapata, se aplica el método expuesto en 63.11 para calcular dicha distribución.

Una vez dimensionado el cimiento, de acuerdo con la presión admisible, el valor de *R* y su peso propio debe ante todo calcularse su sección para que la pieza pueda ser considerada como rígida. De acuerdo con la teoría de vigas sobre suelo elástico, la sección del cimiento por un plano vertical que pase por los ejes de los pilares debe ser tal (fig. 63-58) que:

$$l_2 < 1,75 \sqrt[4]{\frac{EI}{k b}} \quad [63.101]$$

$$l_1 < 0,88 \sqrt[4]{\frac{EI}{k b}} \quad [63.102]$$

$$l_3 < 0,88 \sqrt[4]{\frac{EI}{k b}} \quad [63.103]$$

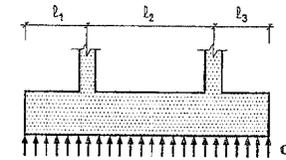


Figura 63-58

Si las tres relaciones anteriores no se cumplen, el cimiento debe ser calculado como flexible por los métodos correspondientes<sup>1</sup>.

La hipótesis de rigidez del cimiento debe ser verificada siempre, salvo que resulte evidente. No debe olvidarse que si dicha hipótesis no resulta cierta las presiones bajo las zonas próximas a los soportes (fig. 63-59) serán mayores que lo previsto y menores en las zonas alejadas. Desde el punto de vista estructural del cimiento, esto es favorable, pues al acercarse, en definitiva, las cargas a los soportes, se reducirán tanto los esfuerzos cortantes como los momentos flectores. Sin embargo, esto es desfavorable desde el punto de vista del suelo, ya que las presiones máximas sobre éste serán mayores de lo previsto.

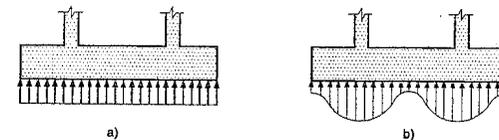


Figura 63-59

#### b) Cálculo a flexión longitudinal

Se calcula como una viga simplemente apoyada con dos voladizos. La armadura resultante se distribuye uniformemente en todo el ancho del cimiento. Usualmente se corre de lado a lado, aunque por supuesto puede interrumpirse parte de la armadura en cara superior o inferior, respetando las reglas generales de anclaje.

Las comprobaciones de fisuración, adherencia y anclaje se realizan de acuerdo con la teoría general de vigas.

<sup>1</sup> En la práctica los momentos en edificación suelen ser de poca importancia y frecuentemente no se consideran para el cálculo del cimiento. Puede no ocurrir así en otros tipos de estructuras, por lo que se trata aquí el caso general.

<sup>1</sup> Véase una exposición general en (63.1).

c) Cálculo a flexión transversal

El tema no es tratado por ninguna Instrucción. Si la pieza es de sección rectangular, una solución práctica (fig. 63-60) es considerar unos voladizos virtuales  $AA'BB'$  y  $CC'DD'$  en cada soporte con ancho el del soporte más dos cantos y considerar concentrada en su superficie toda la reacción del suelo correspondiente a ese soporte. El voladizo se arma a flexión tomando como luz la distancia desde su extremo a la cara del soporte y la armadura se comprueba a fisuración, adherencia y anclaje como vimos en los capítulos correspondientes.

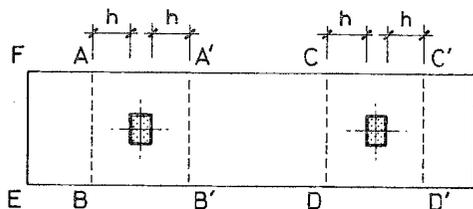


Figura 63-60

En las zonas centrales y en las de voladizo, es decir, en las del tipo  $A'CDB'$  y  $ABEF$ , se dispone como armadura la que cubre un momento igual al 20% del longitudinal correspondiente, es decir, la mínima que EHE establece para placas.

Obsérvese que el método parte de considerar sólo los voladizos como resistentes en sentido transversal, despreciando la resistencia transversal de las zonas restantes.

A primera vista puede resultar extraño que si se ha aceptado la hipótesis de rigidez infinita del cimiento en comparación con la del terreno, para la flexión longitudinal, no se acepte la misma hipótesis para la flexión transversal. La razón se aprecia claramente en la figura 63-61 a) en la que figura una zapata combinada de sección rectangular. Si se acepta la hipótesis de reparto rígido para la flexión transversal, como la armadura de flexión longitudinal no está situada en la línea de soportes, sino uniformemente repartida en el ancho de la zapata, la escasa armadura transversal en la zona del soporte no es capaz de encauzar hacia éste las cargas (caminos  $1 \rightarrow 2$  y  $1 \rightarrow 3$  en la fig. 63-61 a). De ahí el método anteriormente adoptado que asegura adecuadamente la transmisión.

En cambio si se emplea la zapata de sección  $T$  invertida, el encauzamiento está asegurado  $1 \rightarrow 2$  y  $1 \rightarrow 3$  en la figura 63-61 b) y la armadura transversal debe repartirse uniformemente a lo largo de la zapata.

Los estribos de corte de los que luego trataremos pueden ser, en sus ramas horizontales, utilizados simultáneamente como armadura de flexión transversal.

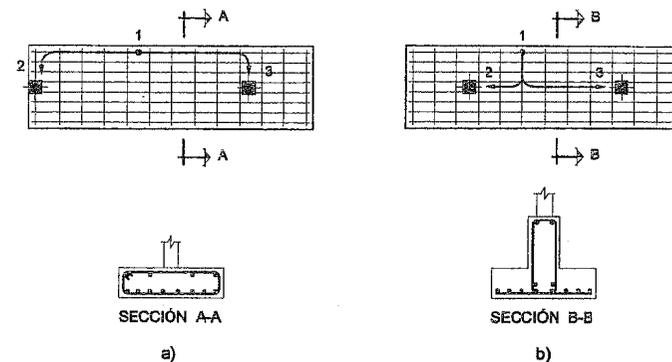


Figura 63-61

d) Cálculo a esfuerzo cortante

La comprobación a cortante se realiza como una pieza lineal (fig. 63-62), comprobando el cortante en las secciones de referencia situadas a una distancia  $d$  de la cara del soporte.

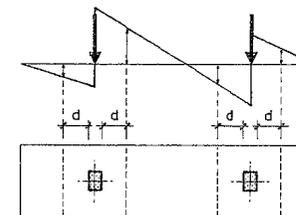


Figura 63-62

En este tipo de cimientos, si son necesarios estribos, su disposición conviene que se ajuste a los esquemas a) o b) (fig. 63-63) si la cota indicada supera la longitud de solape  $l_b$ .

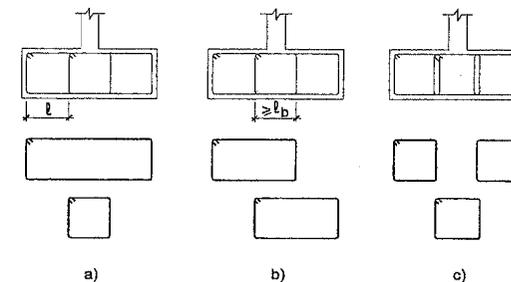


Figura 63-63

En ambos casos, las ramas horizontales de los estribos son útiles como armadura de flexión transversal, cosa que no ocurre en la solución c).

e) *Cálculo a punzonamiento*

Debe realizarse de acuerdo con lo indicado en el Capítulo 43.

### 63.17 VIGAS DE CIMENTACIÓN

Se entiende por viga de cimentación aquella sobre la que apoyan tres o más pilares (fig. 63-64 a)). De nuevo aquí la sección transversal puede ser rectangular (fig. 63-64 b)) o bien adoptar la forma de *T* invertida (fig. 63-64 c)) con economía de hormigón y acero, pero con un mayor coste de encofrados y mano de obra. La tendencia actual es hacia secciones rectangulares, salvo en grandes cimentaciones, en las que las formas más complicadas pueden compensar desde un punto de vista económico.

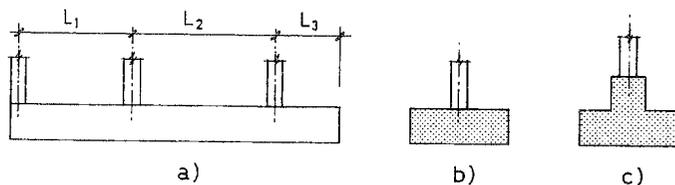


Figura 63-64

Una ventaja a considerar en este tipo de cimentaciones reside en la menor sensibilidad que presentan, con respecto a las zapatas aisladas, frente a un posible defecto local del terreno, oquedad, etc.

El cálculo de este tipo de cimentación es extraordinariamente complejo, y sólo puede ser abordado por métodos aproximados. El ordenador puede representar una ayuda importante, pero tampoco su uso puede conducir a una gran exactitud. El proyectista deberá por tanto desarrollar en todo lo que sigue su propio criterio en muchos aspectos.

La complejidad del problema surge en primer lugar del conjunto suelo-cimiento.

Actualmente existen tres niveles de precisión en el cálculo general de este tipo de cimentaciones:

- a) El primero (fig. 63-65) supone el cimiento rígido y, por tanto, indeformable, de manera que bajo la acción de las cargas desciende sin flectar. El terreno no directamente situado bajo el cimiento se supone que no experimenta deformaciones. Este método es el que hemos venido aceptando para zapatas corridas y centradas. Como veremos más adelante, incluso para zapatas, si los vuelos exceden mucho al doble del canto, la hipótesis de rigidez no es exacta; sin embargo, la práctica habitual de hacerlo así durante muchos años, se ha mostrado como satisfactoria; por otra parte, las tendencias actuales a una mayor prudencia en los cálculos, a esfuerzo cortante y punzonamiento de la que se tuvo en el pasado, conducen a zapatas menos flexibles de lo que era habitual, por lo que la práctica de aceptar el reparto lineal se sigue considerando válida para zapatas aisladas.

Para zapatas combinadas, vimos que la hipótesis de rigidez del cimiento no podía ser aceptada "a priori" ni por tanto el reparto lineal y tuvimos que imponer las condiciones [63.101], [63.102] y [63.103] para poder establecerla.

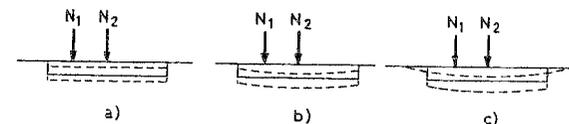


Figura 63-65

- b) Un segundo nivel de precisión en el cálculo es el indicado en la figura 63-65 b), supone que la deformación, común al terreno y al cimiento, es proporcional a la presión producida. También acepta que el terreno no situado bajo el cimiento no se deforma.
- c) El tercer nivel, hoy con estudios avanzados pero de difícil aplicación a la práctica, plantea el problema en forma general, en función de las características tensión-deformación del terreno, de la deformabilidad del cimiento y de la deformabilidad del edificio que apoya en el cimiento (y no sólo de su estructura). El terreno que rodea el cimiento experimenta, como realmente ocurre, deformaciones bajo la acción de éste.

Otra fuente importante de incertidumbre surge al considerar la deformabilidad relativa del suelo, el cimiento y la estructura. Esto se indica esquemáticamente en la figura 63-66.

En el caso indicado en la figura 63-66 a), que corresponde a un cimiento muy rígido y a una estructura muy flexible, la distribución de presiones varía según el tipo de suelo, pero con razonable aproximación puede considerarse un reparto de acuerdo con el módulo de balasto.

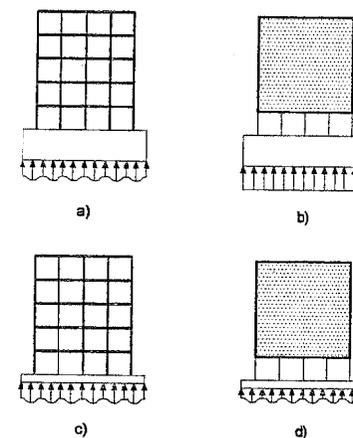


Figura 63-66

En el caso de la figura 63-66 b), tanto el cimiento como la estructura son rígidos<sup>1</sup> y la distribución de presiones puede suponerse linealmente variable.

En el caso c) de la misma figura, estamos ante una estructura flexible y cimiento flexible. Es de aplicación de nuevo el método del módulo de balasto<sup>2</sup>.

En el caso de la figura 63-66 d), el cimiento es flexible y la estructura rígida. No existe un procedimiento riguroso de cálculo, aunque sí aproximado.

Los procedimientos correspondientes de cálculo exceden al espacio aquí disponible. (Véase (63.1).

### 63.18 EMPARRILLADOS DE CIMENTACIÓN

Si la disposición en planta de los soportes presenta una distribución apropiada (fig. 63-67), es posible adoptar la distribución de vigas indicada en la figura que por supuesto pueden combinarse con los restantes tipos vistos en los capítulos anteriores.

De nuevo aquí debe considerarse la posibilidad de utilizar secciones rectangulares o en T invertida, existiendo la tendencia a la sección rectangular por su economía en encofrado y su mayor sencillez de ferralla.

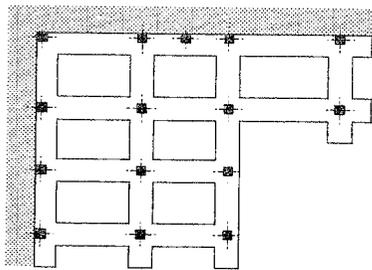


Figura 63-67

Como en el caso de vigas de cimentación, los emparrillados presentan la ventaja adicional de ser menos sensibles que las zapatas aisladas a la existencia imprevista de una oquedad o defecto local aislado del terreno.

Siempre que sea posible, sobre todo en vigas flexibles, interesa disponer voladizos, aunque en este caso ello no resulta posible en las vigas que acometen a límites de propiedad.

Las vigas en cada dirección presentan la misma clasificación y tienen los mismos métodos de resolución vistos en 63.17, con el problema adicional de reparto de la carga de cada pilar en las dos vigas que lo reciben.

- 1 Insistimos de nuevo en que lo que importa no es realmente la rigidez de la estructura, sino la del conjunto de la construcción, que puede ser mucho más elevada. Sin embargo, no debe olvidarse que parte de la rigidez extraestructural de muchas construcciones proviene de partes (tabiquería, por ejemplo) que pierden su rigidez, por fisuración, mucho antes de que la estructura y el cimiento alcancen su estado límite último, por lo que se debe ser prudente al contar con ella, salvo en condiciones de servicio, etapa en la que siempre pueden ser consideradas.
- 2 Una flexibilidad excesiva del conjunto puede conducir a una incompatibilidad de los elementos no estructurales de la construcción, en el conjunto cimiento-estructura.

### 63.19 PLACAS DE CIMENTACIÓN

Como caso límite del emparrillado, se plantea la solución de placa de cimentación. Generalmente, se recomienda que cuando la superficie de cimentación mediante zapatas aisladas supera el 50 por ciento de la planta de la construcción se estudie el posible interés de una cimentación por placa. Es obvio lo relativo de una regla simplificada de este tipo, establecida con independencia de la presión de cimentación y de las luces entre pilares.

Las ventajas de esta solución son evidentes en cuanto a minimizar la importancia de un defecto u oquedad aislada del terreno. Sin embargo, la idea de que la cimentación por placa es la panacea de cualquier problema es sumamente errónea. La placa presenta problemas estructurales y geotécnicos que deben ser estudiados con especial cuidado.

La tipología básica se indica en la figura 63-68.

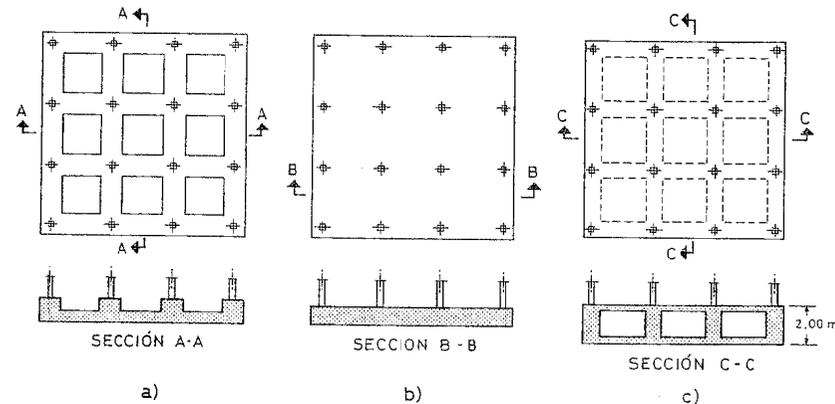


Figura 63-68

La solución a) surge como evolución natural del emparrillado, constituyendo una placa nervada. La solución b) es una nueva evolución de la a), fruto de la tendencia hacia la supresión del encofrado y la simplificación de la ferralla. La solución c) constituye una versión extraordinariamente aligerada, pero presenta evidentes complicaciones constructivas y sólo puede considerarse para casos muy especiales. Para casos normales, la solución b) es habitualmente la más interesante.

En la figura 63-68 los pilares se han dibujado con distribución rectangular de sus ejes en planta. Aun en ese caso, el cálculo estructural presenta serias dificultades y es muy trabajoso por procedimientos manuales. Si como es frecuente la distribución en planta de los pilares no se ordena en malla rectangular, el cálculo con ordenador resulta obligado.

De nuevo debemos considerar los cuatro casos indicados en la figura 63-69.

En el caso de cimientos rígidos y estructura rígida, la interacción cimiento-estructura, que se inició en el caso de vigas y emparrillados de cimentación, considerados anteriormente, se acentúa de forma extraordinaria.

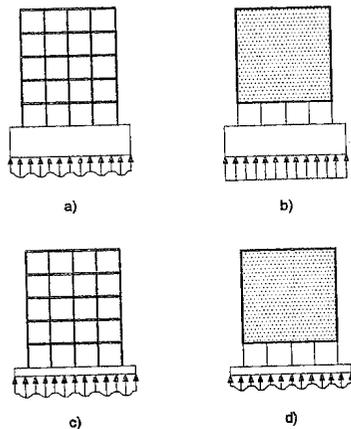


Figura 63-59

### 63.20 ZAPATAS DE HORMIGÓN EN MASA

Se detallan en el Capítulo 69.

### 63.21 CIMENTACIONES DE HORMIGÓN PRETENSADO

La solución expuesta en el Capítulo 55 para placas es directamente aplicable a las placas de cimentación. Por supuesto la técnica del pretensado es también aplicable a cimientos en general.

Veremos alguna aplicación en el Capítulo 68.

### 63.22 PILOTES

En general el cálculo del pilote como pieza en compresión centrada se hace con criterios conservadores.

Es evidente el hecho de que en pilotes perforados el vertido y en general la pieza no sean observables, de que el propio vertido se realiza en condiciones difíciles. Por todo ello se sugiere emplear  $\gamma_c = 1,7^{-1}$ , con lo que la fórmula de comprobación resulta:

$$N_d \leq N_u = 0,85 f_{cd} \cdot A_c + A_s f_{yd} \quad [63.104]$$

De acuerdo con el Eurocódigo 2, Parte 3 (63.2) para el dimensionamiento de pilares hormigonados "in situ" sin camisa de chapa, para el cálculo debe emplearse un diámetro de cálculo igual a 0,95 veces el nominal,  $d_{nom}$ , cumpliendo además las condiciones siguientes:

$$d_{nom} - 50 \text{ mm} \leq d_{cal} = 0,95 d_{nom} \leq d_{nom} - 20 \text{ mm}$$

1 La creencia de que el peso del hormigón fresco sobre las capas inferiores incrementa la resistencia y que el terreno al absorber agua del hormigón aumenta su resistencia, son de valor relativo y casi inexistentes en la zona superior del pilote.

Deben respetarse las excentricidades accidentales previsibles para lo que sugerimos los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} e &= 50 \text{ mm en obras bajo control intenso} \\ e &= 100 \text{ mm en obras bajo control normal} \\ e &= 150 \text{ mm en obras bajo control reducido} \end{aligned} \right\} [63.105]$$

### 63.23 ENCEPADOS

Conviene analizar los casos siguientes:

#### 63.23.1 ENCEPADOS DE UN SOLO PILOTE (Fig. 63-70)

La comprobación se reduce a la de un macizo de apoyo, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 60. Las excentricidades previstas en [63.105] exigen que este tipo de encepados lleven, como más adelante expondremos, vigas centradoras en las dos direcciones ortogonales.

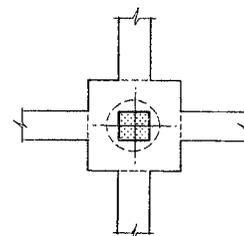


Figura 63-70

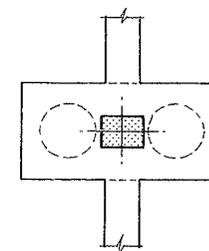


Figura 63-71

#### 63.23.2 ENCEPADOS DE DOS PILOTES. (Fig. 63-71)

Este tipo exige vigas centradoras en sentido ortogonal al plano definido por los dos ejes de los dos pilotes.

De acuerdo con EHE, el encepado puede calcularse por el método de bielas y tirantes (fig. 63-72).

$$T_d = \frac{N_d(v + 0,25a)}{0,85d} \quad [63.106]$$

$$A_s = \frac{T_d}{f_{yd}} \quad [63.107]$$

$$(f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2)$$

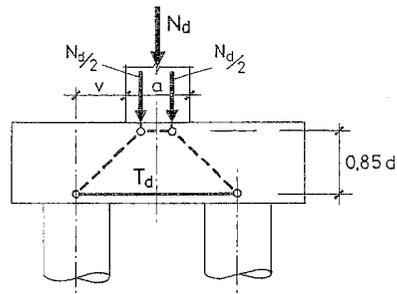


Figura 63-72

Para el anclaje de las armaduras es especialmente interesante el empleo de barras transversales selladas, considerando la presión de reacción del pilote.

Deben disponerse las armaduras  $A_s$  y  $A'_s$  indicadas en la figura 63-73. La armadura superficial en forma de estribos verticales y horizontales  $e_v$  y  $e_h$  y su área será igual al menos al 4‰ de la sección del encepado perpendicular a su dirección.

Si en la cepa del pilar actúa un momento  $M$ , es necesario emplear una celosía adicional, como en el caso 63.6.1. pero la fórmula [63.107] sigue siendo válida (Fig. 63-74).

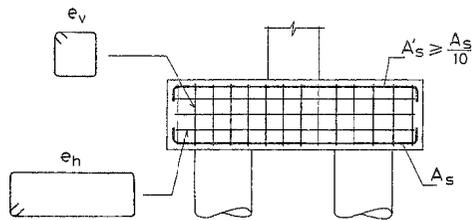


Figura 63-73

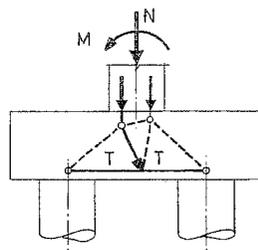


Figura 63-74

### 63.23.3 ENCEPADOS DE TRES PILOTES

No necesitan vigas de atado, salvo que lo requieran las condiciones sísmicas, que rigen para encepados en idéntica forma a lo expuesto en 66.13 para zapatas.

La armadura principal (fig. 63-75) para el caso de tres pilotes cuyos ejes están en los vértices de un triángulo equilátero es de deducción inmediata

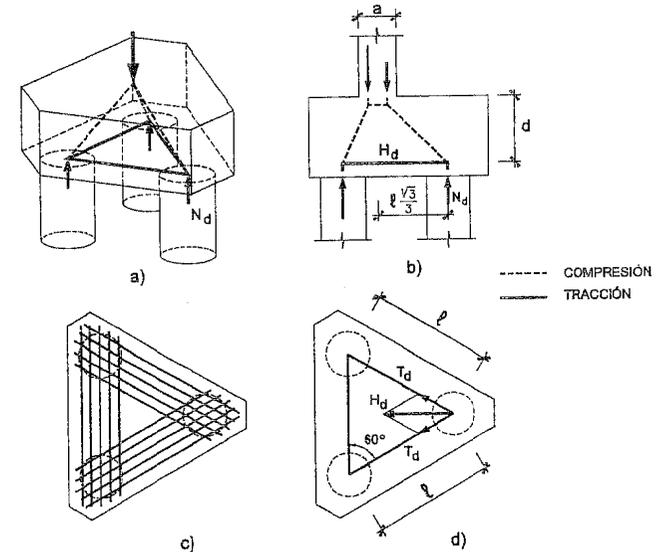


Figura 63-75

y viene dada por:

$$A_s = \frac{0,68}{f_{yd}} \cdot \frac{N_d}{d} (0,58\ell - 0,25a) \quad [63.108]$$

$$(f_{yd} \geq 400 \text{ N/mm}^2)$$

donde:

$N_d$  = Esfuerzo axial del pilote más cargado

$\ell$  = Distancia en horizontal entre ejes de pilotes

$a$  = Lado del pilar

Debe disponerse una armadura en retícula cuya capacidad mecánica en cada sentido no sea inferior a la de las fajas de área  $A_s$ .

### 63.23.4 ENCEPADOS DE CUATRO PILOTES

El desarrollo es análogo al de los casos anteriores y si los ejes ocupan los vértices del rectángulo (Figura 63-76) de dimensiones  $\ell_1$  y  $\ell_2$ ,

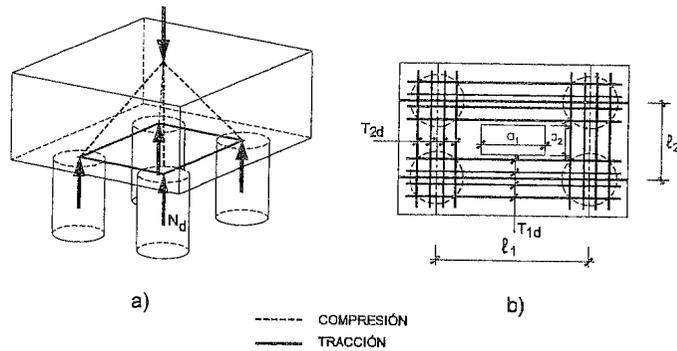


Figura 63-76

se tiene:

$$T_{1d} = A_{s1} f_{yd} = \frac{N_d}{0,85d} (0,5\ell_1 - 0,25a_1) \quad [63.109]$$

$$T_{2d} = A_{s2} f_{yd} = \frac{N_d}{0,85d} (0,5\ell_2 - 0,25a_2) \quad [63.110]$$

( $f_{yd} \neq 400 \text{ N/mm}^2$ )

En [63.109] y [63.110]  $N_d$  es el esfuerzo axial del pilote más cargado.

### 63.23.5 ENCEPADOS DE SERIES GRANDES DE PILOTES

Es el caso indicado en la figura 63-77.

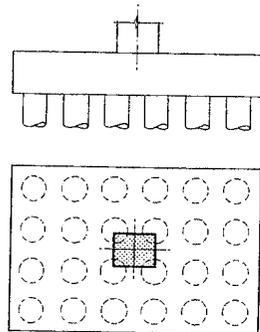


Figura 63-77

El cálculo puede organizarse como el de una zapata, con la precaución adicional de verificar el punzonamiento.

### 63.24 VIGAS CENTRADORAS

En los casos de encepados de un solo pilote y de dos pilotes, indicamos la necesidad de disponer vigas centradoras.

En el caso de encepados a un solo pilote, son necesarias vigas centradoras en las dos direcciones. Llamando  $e$  a la excentricidad en la dirección de la viga centradora considerada y siendo  $N$  el esfuerzo axial del soporte y  $M$  el momento en su pie en la dirección considerada (fig. 63-78), el valor del momento a transmitir es

$$M_{1d} = \pm(M_d + N_d e) \quad [63.111]$$

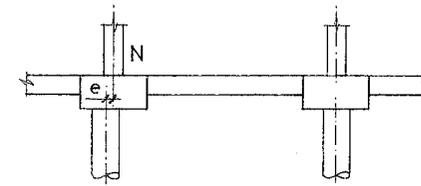


Figura 63-78

y dado que la viga se arma uniformemente basta asignar la mitad del momento a cada viga, si son de rigideces iguales o repartirlo en proporción a las rigideces si son diferentes. Si hay viga a un solo lado, el momento se le asigna a ella.

La viga centradora en el otro sentido se calcula en forma análoga, considerando su excentricidad correspondiente. Es obvio que lo anterior no considera la posibilidad de superposición de defectos de centrado en soportes consecutivos en la misma dirección, pero la probabilidad de que eso ocurra queda, en nuestra opinión, compensada por las posibilidades de plastificación de las vigas. En cambio, creemos que la viga centradora no debe dimensionarse nunca para un momento inferior a:

$$M_{2d} = \pm \frac{1}{1,2} \ell^2 \quad (\text{unidades en } m \text{ y } kN) \quad [63.112]$$

que equivale a aceptar una carga ascendente o descendente de 10 kN/m, que cubra posibles efectos imprevistos ( $\ell$  es la luz entre ejes de encepados). 1, 2.

$$V_{1d} = \frac{M_{1d}}{L} \quad [63.113]$$

$$V_{2d} = \frac{L}{0,2} \quad (\text{unidades en } m \text{ y } kN) \quad [63.114]$$

- 1 La armadura longitudinal total de la viga no debe ser inferior a la de la pieza de atado que corresponda de acuerdo con lo visto en el Capítulo 3, apartado 3.10.
- 2 La carga de 10 kN/m es una regla práctica que cubre las situaciones normales. Si se prevé maquinaria pesada de compactación, posibles asientos de pilotes, expansividad del terreno, etc., la situación debe ser analizada en detalle.

tomándose el que resulte mayor. Las vigas centradoras se arman con armadura simétrica  $A_s = A'_s$  y por tanto

$$A_s = A'_s = \frac{M_d}{d'} \quad [63.115]$$

siendo  $d'$  el canto entre armaduras.

El esfuerzo cortante se considera constante en toda la luz. El ancho  $b$  de la viga no será inferior a  $\frac{\ell}{20}$  ni el canto a  $\frac{\ell}{12}$  (12.6).

Las armaduras principales se solapan en los encepados de acuerdo con las reglas generales de EHE.

En el caso de encepados de tres o más pilotes, aunque las vigas centradoras no son necesarias, sí deben disponerse piezas de atado de acuerdo con lo que se indicó anteriormente, con las consideraciones que allí se hicieron, según la sismicidad de la zona en que va a construirse la cimentación.

### EJERCICIO 63.2

Dos pilotes de  $\phi = 550$  mm armados con  $6 \phi 12$  de acero B 400, transmiten la carga de un pilar de  $500 \cdot 500$  mm, armado con  $8 \phi 16$  y sometido a un esfuerzo axial de  $N_g = 500$  kN y  $N_q = 400$  kN. Calcular su encepado con  $f_{ck} = 25$  MPa y acero B 400, sabiendo que la separación entre los ejes de pilotes es de 1,65 m ( $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,15$ ).

De acuerdo con las dimensiones mínimas, los vuelos deben ser iguales al radio del pilote = 275 mm, con lo que las dimensiones en planta son de  $1,10 \cdot 2,75$  m. Adoptamos  $h = 800$  mm con lo que teniendo en cuenta el descabezado de los pilotes  $d \approx 700$  mm.

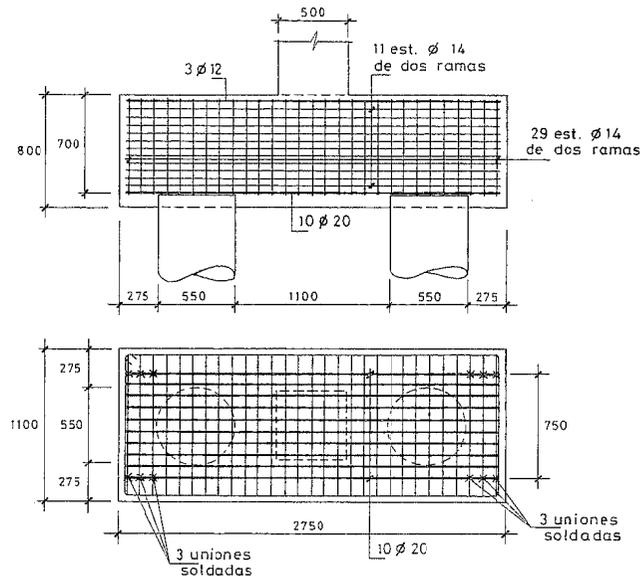


Figura 63-79

De acuerdo con [63.106]

$$T_d = \frac{900 \cdot 10^3 (575 + 125)}{0,85 \cdot 700}$$

$$T_d = 1.059 \cdot 10^3 \text{ N} = 1.059 \text{ kN}$$

$$\langle \rangle 10\phi 20$$

La armadura superior ha de ser

$$A'_s = \frac{1.059 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10}}{348} = 304 \text{ mm}^2 \langle \rangle 3\phi 12$$

Los estribos en cada dirección han de proporcionar áreas

$0,004 \cdot 800 \cdot 1.100 = 3.520 \text{ mm}^2$  repartidos en  $800 \text{ mm} \langle \rangle 115$  e  $\phi 14$  de 2 ramas dispuestos horizontalmente, a 65 mm de separación

$0,004 \cdot 800 \cdot 2.750 = 8.800 \text{ mm}^2 \langle \rangle 29$  e  $\phi 14$  verticales de 2 ramas, a 90 mm de separación.

El anclaje se soluciona sin prolongación disponiendo los tres últimos estribos soldados a la armadura longitudinal en cada extremo. (Ver Capítulo 46 para anclaje por soldadura).

### 63.25 RECOMENDACIONES CONSTRUCTIVAS PARA PIEZAS DE ATADO Y VIGAS CENTRADORAS

Como habitualmente estas piezas están situadas a poca profundidad, sufren cargas especiales apreciables debidas a la acción de la maquinaria de compactación. Tanto la referencia (63.1) como la (63.2) recomienda considerar una carga característica de 10 k N/m debidas a este efecto, salvo que se haga un estudio específico.

Un excelente resumen del tema de Cimentaciones, puede verse en VILLEGAS (63.8).

## BIBLIOGRAFÍA

- (63.1) CALAVERA, J.: "Cálculo de Estructuras de Cimentación". 3ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1991.
- (63.2) ENV 1992-3: Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 3: concrete Foundations. Aug. 1998.
- (63.3) ROBINSON, J.R.: "Éléments constructifs spéciaux du béton armé". Eyrolles. París. 1975.
- (63.4) ACI 318-95: "Buildings Code Requirements for Structural Concrete". American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (63.5) TENG, W.C.: "Foundation Design". Prentice-Hall. New Jersey. 1962.
- (63.6) Norma Sismorresistente NCS-94. Norma de Construcción Sismorresistente. (Parte general y Edificación). Dirección General del Instituto Geográfico Nacional. 1994.
- (63.7) STIGLAT, K., WIPPEL, I.H.: "Placas". Instituto Eduardo Torroja. Madrid. 1968. (Traducción de J. Batanero y F. Morán, Ingenieros de Caminos).
- (63.8) VILLEGAS, L.: "Infraestructuras y forjados". GTED. Santander. 1977.

## CAPÍTULO 64

### MUROS DE CONTENCIÓN <sup>1</sup>

#### 64.1 INTRODUCCIÓN

Consideramos en este capítulo únicamente los muros destinados a la contención de tierras. Aquellos otros que además de esta función desempeñan la de servir como viga de cimentación de cargas verticales recibidas de la estructura serán considerados en el capítulo 65.

El tipo más general de muro de contención se expresa en la figura 64-1, en la que se indican también las designaciones habituales.

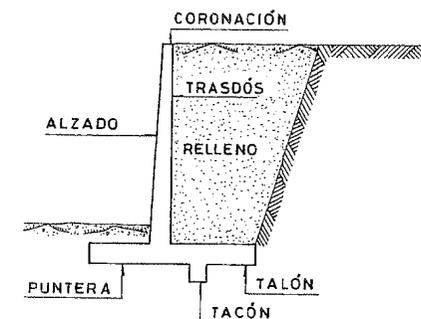


Figura 64-1

<sup>1</sup> Los temas de este capítulo pueden ampliarse en mi libro "Muros de Contención y Muros de Sótano". INTEMAC. Madrid, 2ª Edición. 1990. (64.1).

Según los requisitos de proyecto, el muro puede adoptar las formas indicadas en la figura 64-2:

- El muro sin puntera es de uso poco frecuente en edificación.
- El muro con puntera y talón representa habitualmente la solución más económica del problema de contención.
- El muro sin talón se usa cuando el terreno del trasdós es de propiedad ajena. En este caso el muro, además de los inconvenientes técnicos que esta forma encierra, arrastra otros debidos a que el terreno puede no estar drenado, la impermeabilización del trasdós no suele ser posible y, por tanto, la impermeabilidad del muro será difícil de garantizar y el empuje del terreno puede ser de difícil evaluación.

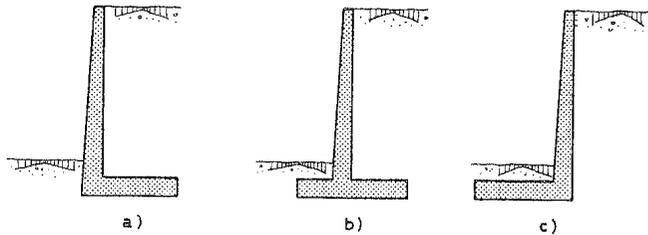


Figura 64-2

Un muro de cualquiera de los tipos indicados es denominado "muro en ménsula", debido a la forma de funcionamiento de su alzado. Debe considerarse como una solución intermedia entre los pesados muros de gravedad, usuales antiguamente, y las soluciones de muros de contrafuertes y muros de bandejas, propias de muros de gran altura (fig. 64-3).

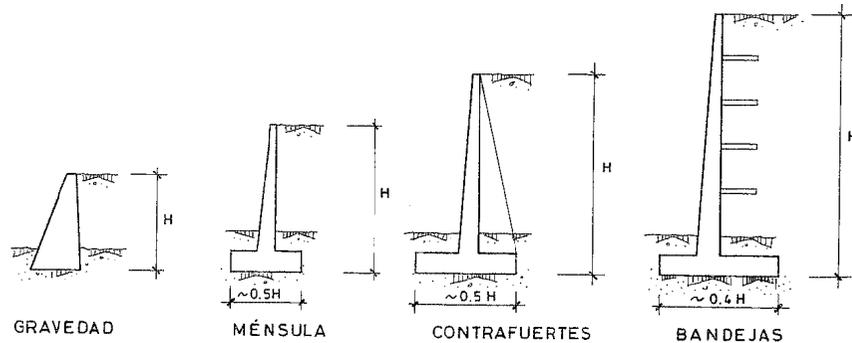


Figura 64-3

El muro de gravedad es siempre más caro que el ménsula, salvo en países de mano de obra muy barata. Puede estar justificado si no existe ferralla en otros tajos de obra, y se trata de un volumen pequeño de hormigón. En otro caso, es siempre más

barato el muro ménsula, hasta alturas de unos 12 m como máximo. Para alturas mayores puede interesar el muro de contrafuertes y para alturas muy grandes el de bandejas, que con diferentes esquemas estructurales reducen los momentos flectores en el alzado<sup>1</sup>. Estas dos últimas soluciones conducen a un ahorro importante de material a costa de una mayor complejidad de encofrados y ferralla.

El proyecto de un muro presenta tres etapas bien diferenciadas:

- *Cálculo de los empujes.* En lo que sigue adoptaremos el Método de RANKINE, aceptable para las alturas habituales de muros. Una gran altura o una gran longitud de muro, aunque la altura sea media, justifican la realización de un estudio geotécnico y un cálculo de empujes más riguroso, pues puede conducir a ahorros importantes.
- *Predimensionamiento.* Es esencial disponer de un método, pues en otro caso es necesario proceder por tanteos, lo cual puede consumir bastante tiempo.
- *Dimensionamiento.* Todos los problemas de dimensionamiento que plantean los muros de contención han sido resueltos en capítulos anteriores.

## 64.2 FUNCIONAMIENTO

El funcionamiento se indica en la figura 64-4 y esencialmente es el de tres losas monolíticamente unidas que sostienen y se apoyan en el terreno.

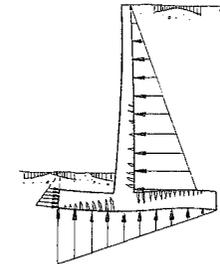


Figura 64-4

Las posibles formas de fallo de un muro de contención se indican en la figura 64-5.

El caso a) corresponde al fallo de la estructura como pieza de hormigón armado. Las formas de fallo pueden afectar al alzado, a la puntera o al talón y pueden provenir de cualquier estado límite último o de corrosión por fisuración excesiva. Es válido aquí lo que anteriormente se dijo para las cimentaciones en el Capítulo 63, respecto a que la fisuración en estas estructuras no es observable, lo cual aconseja una prudencia suplementaria.

<sup>1</sup> Para grandes alturas, una solución a estudiar como alternativa es la de muros anclados.

El fallo del tipo b) es debido a desplazamiento. El c) a un problema de vuelco. Habitualmente se supone que el vuelco se produce alrededor del borde de la puntera, aunque en realidad el giro suele producirse alrededor de un centro de rotación situado a mayor profundidad que el cimientado del muro. El fallo de tipo d) corresponde a un deslizamiento profundo.

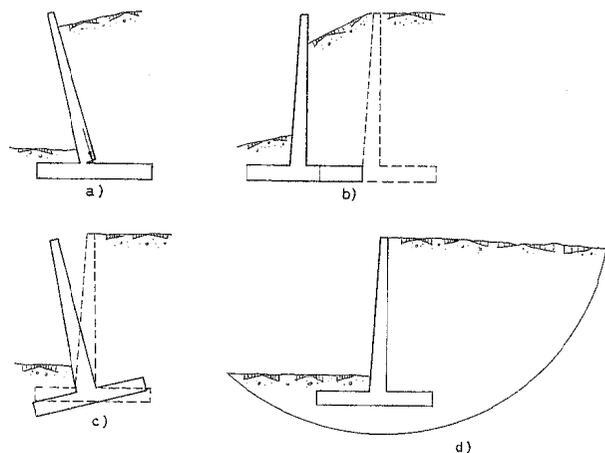


Figura 64-5

### 64.3 CÁLCULO DEL EMPUJE

Para lo que sigue adoptaremos para el cálculo de los empujes la teoría de RANKINE:

En general, en el caso de un macizo de tierras limitado por un muro, pueden darse tres situaciones de empuje:

- Si el muro puede girar y deformarse (del orden del 0,5% de la altura del muro) se produce una situación de empuje llamada de *empuje activo*, que es el valor mínimo que puede alcanzar el empuje, si se moviliza.
- Si el muro se traslada presionando contra el terreno, el empuje alcanza su valor máximo, llamado *empuje pasivo*.
- Si el muro es rígido e indeformable, pero no se traslada, se produce la situación denominada de *empuje al reposo*, intermedio entre el activo y el pasivo.

En el resto de este capítulo adoptaremos la situación de empuje activo, salvo que se indique otra cosa, lo cual supone que el muro puede girar y deformarse.

Para el caso de terreno horizontal a nivel de la coronación, la presión activa a una profundidad  $x$  (fig. 64-6) viene dada según RANKINE por la expresión<sup>1</sup>

$$P_{ax} = \gamma x \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad [64.1]$$

siendo

$P_{ax}$  = Presión activa en kN/m<sup>2</sup> por m.l de muro, a la profundidad  $x$ .

$\gamma$  = Densidad del relleno, en kN/m<sup>3</sup>.

$\varphi$  = Ángulo de rozamiento interno del relleno.

$x$  = Profundidad en m.

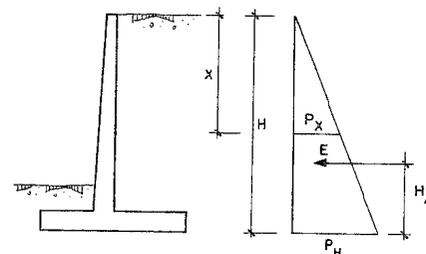


Figura 64-6

La distribución de presiones sigue una ley triangular con resultante situada a profundidad  $x_s = \frac{2}{3}x$ , de valor

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma x^2 \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad [64.2]$$

La ley de presiones pasivas viene dada por:

$$P_{px} = \gamma x \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \quad [64.3]$$

y su resultante, situada también a la profundidad  $\frac{2}{3}x$ , vale

$$P_p = \frac{1}{2} \gamma x^2 \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi}{1 - \operatorname{sen} \varphi} \quad [64.4]$$

<sup>1</sup> La teoría de RANKINE coincide con la de COULOMB si se supone rozamiento nulo entre terreno y muro, por lo que, en general, es conservadora. Para el cálculo del empuje pasivo resulta muy conservadora.

Para  $x = H$ , el empuje activo resulta

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad [64.5]$$

Si sobre el terreno actúa una sobrecarga uniformemente repartida de valor  $q$  kN/m<sup>2</sup>, puede considerarse equivalente a una altura de tierras.

$$h_o = \frac{q}{\gamma} \quad [64.6]$$

y la ley de presiones (fig. 64-7), resulta trapezoidal.

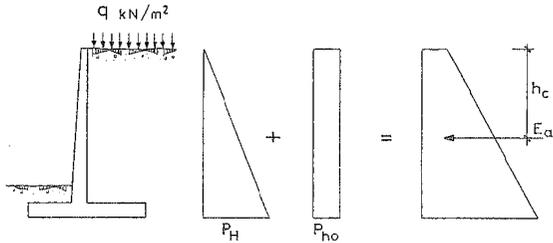


Figura 64-7

El valor del empuje activo en este caso resulta

$$E_a = \frac{1}{2} P_H \cdot H + P_{ho} \cdot H$$

donde

$$P_H = \gamma H \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}$$

$$P_{ho} = \gamma h_o \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi}$$

y sustituyendo

$$E_a = \frac{1}{2} (\gamma H^2 + 2 q H) \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} \quad [64.7]$$

El empuje  $E_a$  actúa a una profundidad

$$X_g = \frac{H}{3} \cdot \frac{2 H + 3 h_o}{H + 2 h_o} \quad [64.8]$$

Se recuerda que la teoría simplificada expuesta supone un relleno drenado, con la red filtrante funcionando, es decir, con la filtración establecida. Si no se drena el relleno, los empujes pueden fácilmente duplicar los obtenidos anteriormente.

#### 64.4 COMPROBACIÓN EN SERVICIO Y COMPROBACIÓN BAJO EMPUJE MAYORADO

Un punto que debe tenerse especialmente en cuenta en el proyecto de muros es el siguiente (fig. 64-8).

Con los métodos habituales de proyecto de muros, se comprueba que el muro presenta seguridad suficiente a vuelco y deslizamiento y además que la presión  $\sigma$  en puntera no rebasa una tensión admisible fijada por razones de asientos y/o seguridad a rotura del suelo.

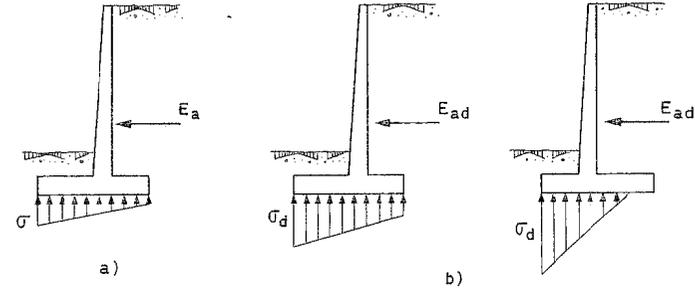


Figura 64-8

Si se supone un empuje mayorado

$$E_{ad} = \gamma_f E_a \quad [64.9]$$

la tensión en puntera  $\sigma$  pasará a  $\sigma_d$ .

Sin embargo, ocurre que dos muros con seguridad adecuada a deslizamiento y vuelco y el mismo valor  $\sigma$  de la presión en puntera en condiciones de servicio, pueden para un mismo valor de  $\gamma_f$ , presentar una muy diferente sensibilidad en cuanto al incremento de  $\sigma$ , dependiendo (fig. 64-8 b)) de las dimensiones y posición de la zapata. Por tanto, la teoría clásica de dimensionamiento, con comprobación sólo de la tensión en puntera bajo condiciones de servicio, no es suficiente. En general, debe comprobarse además que al aumentar  $E_a$  hasta  $\gamma_f E_a$ , el incremento de  $\sigma = \sigma_{adm}$  no superará  $k \sigma_{adm}$ <sup>1</sup>.

El tema está poco estudiado y en ausencia de normas concretas tomaremos en lo que sigue  $\gamma_f = 1,5$  y  $k = 2$ .

<sup>1</sup> Para una discusión más detallada, véase J. CALAYERA y A. CABRERA, "Un método para el proyecto de muros de contención" (64.2).

## 64.5 PREDIMENSIONAMIENTO

Es esencial proceder a un predimensionamiento correcto, con el fin de que la seguridad a vuelco y a deslizamiento sea suficiente y la presión en puntera próxima a la admisible sin rebasarla. Con ello la comprobación posterior se limitará a verificar lo anterior y a dimensionar la estructura de hormigón. Lo contrario puede conducir a una serie innecesaria de tanteos. El tema está estudiado en detalle por J. CALAVERA y A. CABRERA en la publicación (64.2). Los ábacos que siguen proceden de (64.1) y (64.2), donde pueden encontrarse series de ábacos más completas.

Habitualmente se exige una seguridad a deslizamiento  $C_{sd} \geq 1,5$  y a vuelco  $C_{sv} \geq 1,8$ .

En el caso de muros con puntera y talón las dimensiones de la propia estructura suelen elegirse con un espesor del alzado en el arranque de  $\frac{1}{8}$  a  $\frac{1}{10}$  de altura total  $H$ .

Análogo espesor suele darse al cimiento. Estas dimensiones conducen a un muro cercano al óptimo económico.

Análogas dimensiones suelen darse a los muros sin puntera.

En los muros sin talón suele darse el mismo espesor al alzado, pero mayor en cimiento dada la necesidad de proporcionar peso al muro con su propio peso.

### a) Muros con puntera y talón

Éste es el tipo de muro que se debe diseñar si las circunstancias de su ubicación lo permiten, ya que presenta una relación de base a altura  $\frac{B}{H}$ , en

general, de tipo medio. La resultante de acciones verticales y empujes tiene una inclinación media respecto a la vertical, las presiones bajo cargas de servicio suelen ser por consiguiente altas, y bajo el empuje activo mayorado muy altas. La seguridad al vuelco y deslizamiento es aceptable.

Por otro lado, estos muros presentan la ventaja, frente a otros que no tienen talón, de que al ser necesario excavar el trasdós para la realización de aquél, se puede disponer en éste un buen sistema de drenaje, fundamental para la buena conservación del muro. Otras ventajas frente a los muros sin talón es que no se corre el riesgo de que se hormigone el muro contra el terreno, cosa que nunca es beneficiosa para el hormigonado y las armaduras, ya que con frecuencia no se respetan los recubrimientos de éstas y quedan en contacto con el terreno, con el consiguiente riesgo de oxidación. Además el sistema permite impermeabilizar el trasdós del muro.

Con frecuencia los muros son objeto de un dimensionamiento previo que, a continuación, se comprueba y corrige por aproximaciones sucesivas. El método que se expone a continuación permite una selección previa de dimensiones que, en la mayoría de los casos, no requiere modificaciones al ser comprobadas.

El proyecto del muro, para los rellenos usuales con  $\phi = 30^\circ$ , se realiza con el diagrama de la figura 64-9.

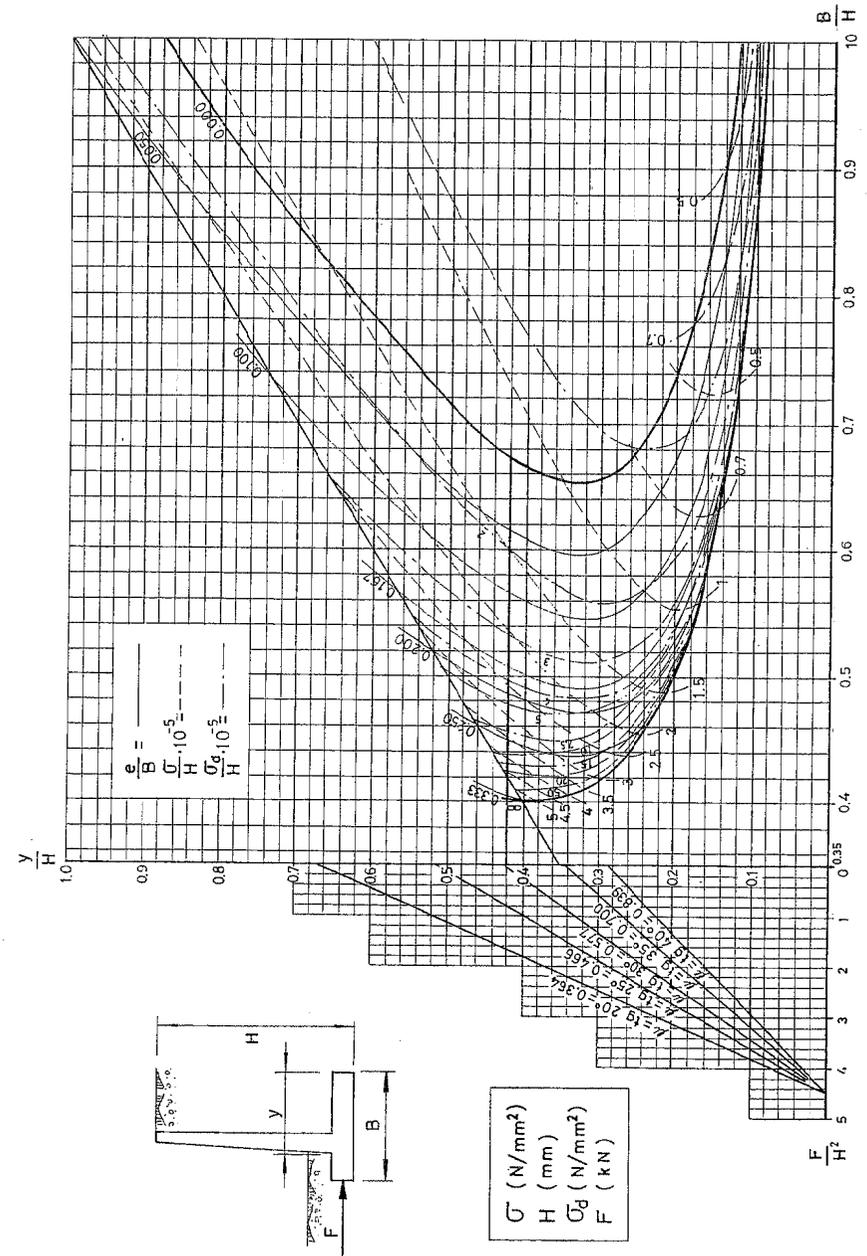


Figura 64-9

Como puede verse, dicho diagrama consta de dos ejes de valores  $y/H$ ,  $B/H$ , y de tres familias de curvas, una de las cuales proporciona los valores de la excentricidad relativa  $e/B$ , otra la tensión de servicio relativa  $\sigma/H$ , y otra la tensión mayorada relativa  $\sigma_d/H$ , correspondiente esta última al caso en que se mayorada el empuje al valor  $E_{ad} = \gamma_f E_a$ , siendo  $E_a$  el empuje del terreno en condiciones de servicio y  $\gamma_f$  un coeficiente de mayoración que se ha tomado con valor 1,5.

La razón del análisis del muro bajo la actuación del empuje mayorado es debida a que existen muros cuyas tensiones en servicio son moderadas, pero en los que basta una ligera mayoración del empuje para que la tensión correspondiente  $\sigma_d$  sea muy alta. Es evidente que esta sensibilidad del muro a la mayoración del empuje puede ser peligrosa y que este tipo de peligro no se evita con las comprobaciones clásicas de tensiones en servicio y seguridad a vuelco.

El gráfico de la figura 64-9 permite, para una altura dada  $H$ , una vez elegidos los valores  $B$  e  $y$ , y calculadas las relaciones  $B/H$  e  $y/H$ , obtener inmediatamente los valores de  $e/B$ ,  $\sigma/H$  y  $\sigma_d/H$  y, por tanto,  $e$ ,  $\sigma$  y  $\sigma_d$ .

A la izquierda del gráfico figura un haz de rectas, relativas a los distintos coeficientes de rozamiento, en correspondencia con una escala inferior de valores  $F/H^2$ .  $F$  es la fuerza, por metro lineal de muro, no absorbida por el rozamiento entre cimiento y suelo. Si se desea proyectar el muro, de forma que la seguridad a deslizamiento sea obtenida íntegramente por rozamiento entre cimiento y suelo, en ese caso  $F = 0$ , y por tanto  $F/H^2 = 0$ , y el punto correspondiente en la recta de valor  $u$  dado, es el de intersección con el eje de valores  $y/H$ . Es decir, que todos los muros posibles en el diagrama  $y/H$ ,  $B/H$ , están representados por puntos de la recta dada  $y/H = cte$ . Los valores máximos admisibles de  $\sigma/H$  y  $\sigma_d/H$  y la  $e/B = 0$ , delimitan una zona que, en general, define un segmento en la recta  $y/H = cte$ , obtenida, cuyos puntos corresponden a soluciones posibles. El muro de coste mínimo viene representado por el punto de ese segmento de menor valor  $B/H$ .

Si, por el contrario, se puede contar con una cierta fuerza  $F$  exterior que colabore a impedir el deslizamiento, se calculará  $F/H^2$  y en la recta de valor  $m$  dado, a ese valor de  $F/H^2$  le corresponderá un valor  $y/H$  (menor que el obtenido en el caso anterior) y para ese valor de  $y/H$ , la zona de posibles valores de  $\sigma/H$  y  $\sigma_d/H$  y la  $e/B = 0$ , delimita un segmento de puntos posibles, siendo el de menor valor  $B$  el que proporciona un coste mínimo.

Debe observarse que pueden existir diversas formas de conseguir la fuerza  $F$  que colabore a impedir el deslizamiento. Por ejemplo, si existe una estructura adyacente, o una solera hormigonada contra el muro, pueden proporcionar un cierto valor de  $F$ . Éste puede conseguirse también por la consideración del empuje pasivo sobre el frente de la puntera, lo que exige estimar previamente el canto del cimiento del muro. El resto de la fuerza necesaria para impedir el deslizamiento habrá de ser conseguida mediante el rozamiento. También existe la posibilidad de no contar con el rozamiento para impedir el deslizamiento, bien porque basten las fuerzas resistidas por estructuras exteriores, o bien porque se disponga un tacón que, junto con el frente de la puntera, proporcionen el empuje pasivo suficiente. En este caso las soluciones posibles  $y/H$ ,  $B/H$ , son los puntos de la zona limitada por las curvas  $e/B = 0$  y las correspondientes a los valores límites  $\sigma/H$ ,  $\sigma_d/H$ , de acuerdo con las tensiones  $\sigma$  y  $\sigma_d$  máximas admisibles.

También debe notarse que la zona de valores  $y/H$  pequeños, es decir, la inferior del gráfico de la figura 64-9 que coincide prácticamente con la de muros sin talón, corresponde a muros, en general, muy sensibles a la mayoración del empuje. Es decir, muros con tensiones  $\sigma$  en servicio, relativamente moderadas, pero con variaciones de  $\sigma_d$  muy fuertes. Por otra parte, en esta zona la precisión del gráfico es escasa y deben manejarse los ábacos que más adelante se indican.

#### EJEMPLO 64.1

En el terreno cuyo ángulo de rozamiento interno es  $\varphi = 30^\circ$  necesitamos disponer un muro de 10 m de altura.

Sabiendo que la tensión máxima admisible en servicio del terreno de cimiento es de  $0,2 \text{ N/mm}^2$  y que la tensión máxima mayorada de dicho terreno es  $0,4 \text{ N/mm}^2$ , se desea dimensionar el muro sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre cimiento y suelo es  $\mu = \tan 30^\circ = 0,577$ . Tómese  $\gamma_f = 1,5$ .

*Solución (Fig. 64-10)*

1º. Si queremos que todo el deslizamiento sea absorbido por el rozamiento entre cimiento y suelo, el gráfico auxiliar de la figura 64-10 nos dice que:

$$\frac{y}{H} = 0,42 \quad \text{para } \mu = \tan 30^\circ$$

Como

$$\frac{\sigma}{H} = \frac{0,2 \text{ N/mm}^2}{10 \cdot 10^3 \text{ mm}} = 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\sigma_d}{H} = \frac{0,4 \text{ N/mm}^2}{10 \cdot 10^3 \text{ mm}} = 4 \cdot 10^{-5}$$

La zona de muros posibles por tensiones sería la comprendida entre dichas curvas y la  $e/B = 0$ . Por deslizamiento, los muros posibles estarían sobre la recta  $y/H = 0,42$ , siendo los puntos del segmento  $\overline{AB}$  los que cumplen, simultáneamente, todas las condiciones.

El punto A nos daría el muro con el valor de  $B$  más pequeño, que sería, por tanto, el indicado. Al punto A le corresponden los valores

$$\frac{B}{H} = 0,534 \quad ; \quad \frac{e}{B} = 0,14 \quad ; \quad \frac{\sigma}{H} = 2 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad \frac{\sigma_d}{H} = 2,98 \cdot 10^{-5}$$

1 La figura 64-10 es reproducción de la 64-9.

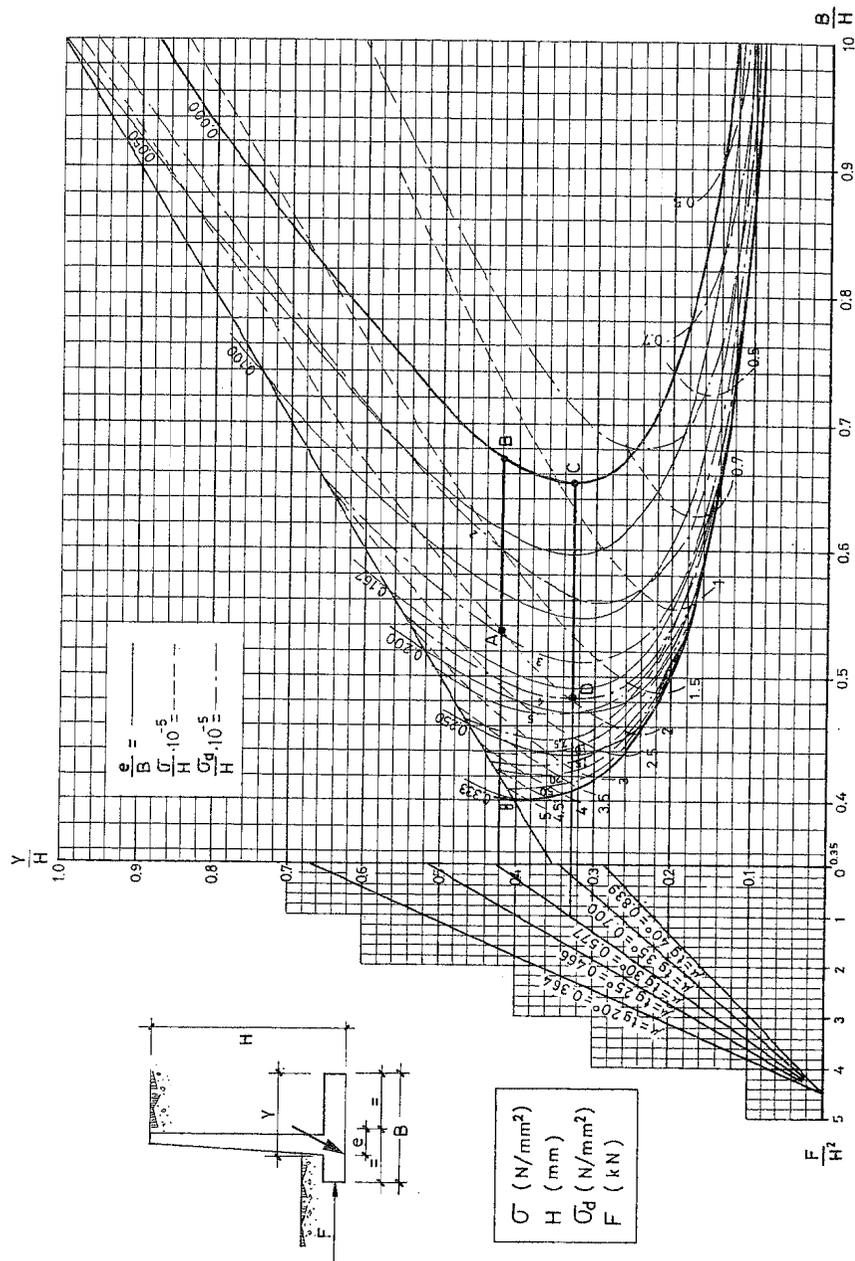


Figura 64-10

o lo que es igual

$$y = 10 \cdot 0,42 = 4,2 \text{ m}$$

$$B = 10 \cdot 0,534 = 5,34 \text{ m}$$

$$e = 5,34 \cdot 0,14 = 0,75 \text{ m}$$

$$m = \frac{B}{2} - e = 2,67 - 0,75 = 1,92 \text{ m}$$

$$\sigma = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^3 = 0,2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_d = 2,98 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^3 = 0,3 \text{ N/mm}^2$$

Si comprobamos este muro directamente obtenemos:

$$\sigma = 0,202 \text{ N/mm}^2$$

$$m = 1,95 \text{ m}$$

$$\sigma_d = 0,3 \text{ N/mm}^2$$

$$C_{sd} = 1,55$$

$$C_{sv} = 2,53$$

2º. Supongamos que podemos absorber parte del deslizamiento debido a la existencia de una solera apoyada contra la puntera del muro, capaz de soportar 100 kN por metro lineal de muro. Para obtener 1,5 de coeficiente de seguridad al deslizamiento, suponiendo  $u = \text{tg } 30^\circ$ , entraremos en el gráfico auxiliar con un valor:

$$\frac{F}{H^2} = \frac{100}{100} = 1 \text{ que para la recta } \mu = \text{tg } 30^\circ \text{ da: } \frac{y}{H} = 0,328$$

Como las tensiones siguen siendo  $\sigma \leq 0,2 \text{ N/mm}^2$  y  $\sigma_d \leq 0,4 \text{ N/mm}^2$  las curvas:

$$\frac{\sigma}{H} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ y } \frac{\sigma_d}{H} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ limitan la zona de muros posibles por tensiones,}$$

junto con la  $\frac{e}{B} = 0$ .

La recta  $y/H = 0,328$  representa los muros posibles por deslizamiento y el punto D de ella es el correspondiente al muro de base mínima que cumple simultáneamente las condiciones de tensiones y deslizamiento. A dicho punto le corresponden los valores:

$$\frac{\sigma}{H} = 1,95 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{B}{H} = 0,485; \quad \frac{e}{B} = 0,18$$

MUROS SIN PUNTERA  
TENSIÓN UNIFORME SOBRE EL SUELO

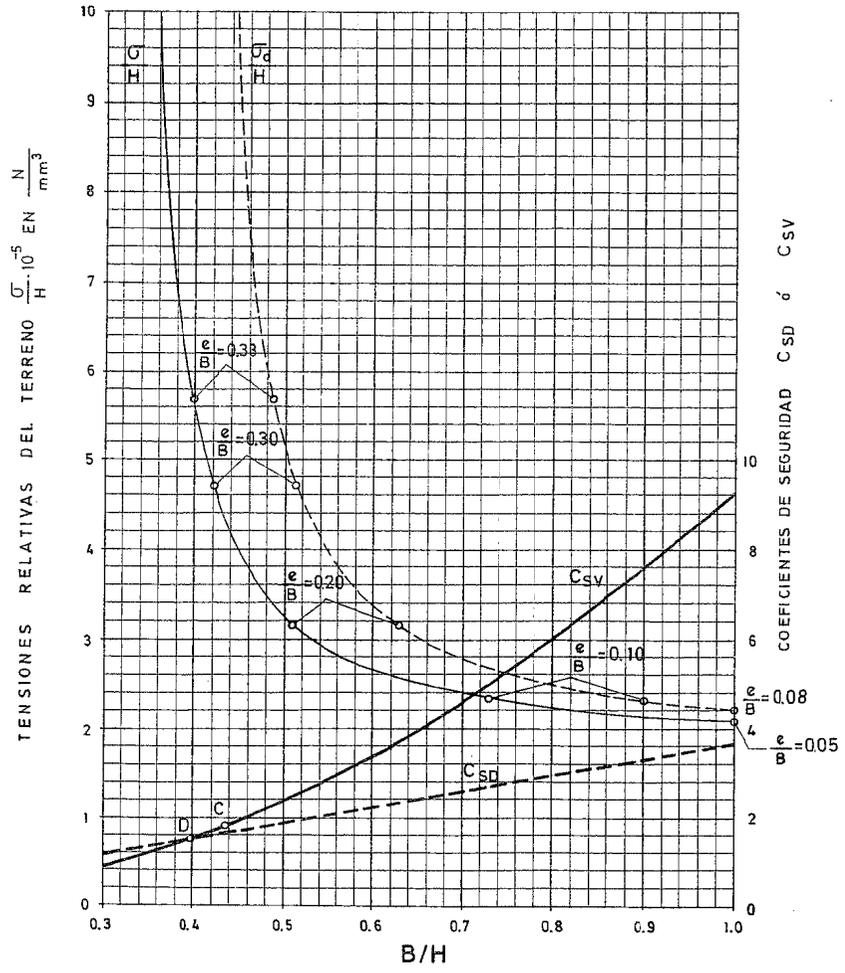
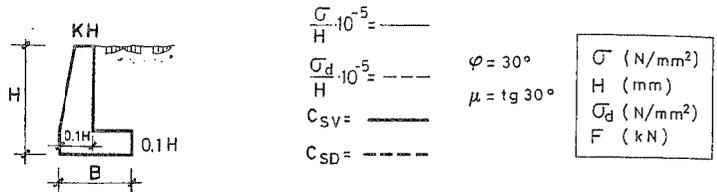


Figura 64-11

o también

$$y = 10 \cdot 0,328 = 3,28 \text{ m}$$

$$B = 10 \cdot 0,485 = 4,85 \text{ m}$$

$$e = 0,18 \cdot 4,85 = 0,873 \text{ m}$$

$$m = \frac{B}{2} - e = 2,42 - 0,873 = 1,547 \text{ m}$$

$$\sigma = 10 \cdot 10^3 \cdot 1,95 \cdot 10^{-5} = 0,195 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_d = 10 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-5} = 0,4 \text{ N/mm}^2$$

b) Muros sin puntera

Análogamente, el gráfico de la figura 64-11 permite un predimensionamiento directo una vez fijados los valores de  $C_{sd}$ ,  $C_{sv}$ ,  $\frac{\sigma}{H}$  y  $\frac{\sigma_d}{H}$ , de lo que resulta directamente  $\frac{B}{H}$  y, por tanto,  $B$ .

El gráfico da los valores  $e/B$  de la excentricidad relativa del punto de paso de la resultante respecto al punto medio de la base, bajo las acciones  $E_a$  y  $E_{at}$ .

c) Muros sin talón

Este tipo de muros, como se dijo antes, surge como respuesta a la necesidad de solucionar el problema de contención en límites de propiedad. Estos muros tienen como problema esencial su falta de peso, lo que hace precaria su seguridad a deslizamiento. El problema puede solucionarse, bien añadiendo peso al propio muro, bien mediante el uso de un tacón como el indicado en la figura 64-12 1.

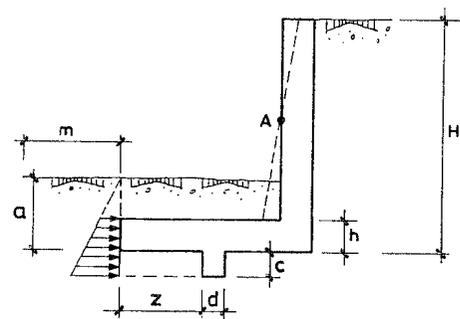


Figura 64-12

1 En muchos casos una alternativa a estudiar es la de muros pantalla.

Conviene cuidar en este tipo de muros las condiciones siguientes:

1.  $a \geq 1 \text{ m}$
2.  $a - h \geq 0,5 \text{ m}$
3. El terreno frente a la puntera debe existir por lo menos en una longitud  $m \geq 2 h_{\min}$ , con características no inferiores a las del terreno de cimentación.
4. El terreno frente a la puntera no debe haber sido excavado. Debe por tanto hormigonarse el cimientto contra él.
5.  $z \geq 2 c$ .

El gráfico de la figura 64-13 permite el predimensionamiento inmediato una vez fijados los valores  $\frac{\sigma}{H}$ ,  $\frac{\sigma_d}{H}$ ,  $C_{sd}$  y  $C_{sv}$ , proporcionando los valores de

$\frac{B}{H}$  y por tanto el de  $B$ .

El gráfico da también en función de  $\frac{B}{H}$  el valor  $\frac{10F}{H^2}$  de la fuerza  $F_p$  p.m.l.

de muro que es necesario oponer al dimensionamiento para obtener un valor

de  $C_{sd}$  igual a 1,5, de lo que se deduce:

$$\frac{P \mu + F}{E_a} = 1,5 \quad [64.10]$$

donde  $P$  es la resultante de todas las acciones verticales sobre el muro, incluido su peso propio. Tomaremos  $\mu = \text{tg } 30^\circ$  como coeficiente de rozamiento entre cimiento y suelo a falta de otros datos.

Puede observarse que es imposible obtener  $C_{sd} \geq 1,5$  con valores razonables de  $B$ . Por tanto, es necesario conseguir la seguridad a deslizamiento por apoyo en otra estructura o empuje pasivo frente a la puntera y/o frente a un posible tacón.

El gráfico proporciona también la excentricidad relativa  $e/B$  del punto del paso de la resultante, bajo la acción  $E_a$  y  $E_{ad}$ , respecto al punto medio de la base.

Aunque el gráfico presupone un espesor uniforme del alzado igual a  $0,1 H$ , puede darse el mismo canto variable girando el intradós alrededor del punto medio  $A$  (fig. 64-12).

#### EJEMPLO 64.2

Muro de 9 metros de altura y 0,90 metros de espesor constante en el alzado. Zapata de canto  $h = 0,15 H = 1,35 \text{ m}$ ;  $\sigma_{adm} = 0,2 \text{ N/mm}^2$ ;  $\sigma_d = 0,4 \text{ N/mm}^2$ ;  $C_{sv} \geq 1,8$ ;  $C_{sd} \geq 1,5$ ;  $\mu = \text{tg } 30^\circ$ ;  $\varphi = 30^\circ$ .

Peso específico del terreno  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ . Altura del relleno sobre la puntera 0,50 m

$$\frac{\sigma_{adm}}{H} = \frac{0,2 \text{ N/mm}^2}{9 \cdot 10^3 \text{ mm}} = 2,22 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\sigma_d}{H} = \frac{0,4 \text{ N/mm}^2}{9 \cdot 10^3 \text{ mm}} = 4,44 \cdot 10^{-5}$$

da mayor  $\frac{B}{H}$  la tensión mayorada.

Para

$$\frac{\sigma_d}{H} = 4,44 \cdot 10^{-5} \rightarrow \frac{\sigma}{H} = 1,42 \cdot 10^{-5} \rightarrow \frac{B}{H} = 0,55 \rightarrow C_{sv} = 1,80; C_{sd} = 0,9 \rightarrow \frac{10F}{H^2} = 1,85 \cdot 10^{-5}$$

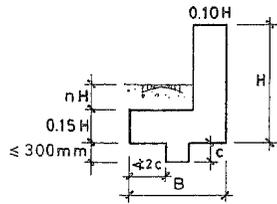
$$B = 0,55 \cdot 9 = 4,97 \text{ m}; \quad F = \frac{1,85 \cdot 10^{-5} \cdot (9 \cdot 10^3)^2}{10} = 149,8 \text{ kN}$$

$$\sigma = 1,42 \cdot 10^{-5} \cdot 9 \cdot 10^3 = 12,8 \cdot 10^{-2} = 0,13 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_d = 4,44 \cdot 10^{-5} \cdot 9 \cdot 10^3 = 39,96 \cdot 10^{-2} = 0,40 \text{ N/mm}^2$$

# MUROS SIN TALÓN

TENSIÓN UNIFORME SOBRE EL SUELO



$$\frac{\sigma}{H} \cdot 10^{-5} = \text{---}$$

$$\frac{\sigma_d}{H} \cdot 10^{-5} = \text{---}$$

$$C_{sv} = \text{---}$$

$$\frac{10F}{H^2} = \text{---}$$

$$C_{sd} = \text{---}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\mu = \text{tg } 30^\circ$$

$$\sigma \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$H \text{ (mm)}$$

$$\sigma_d \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$F \text{ (kN)}$$

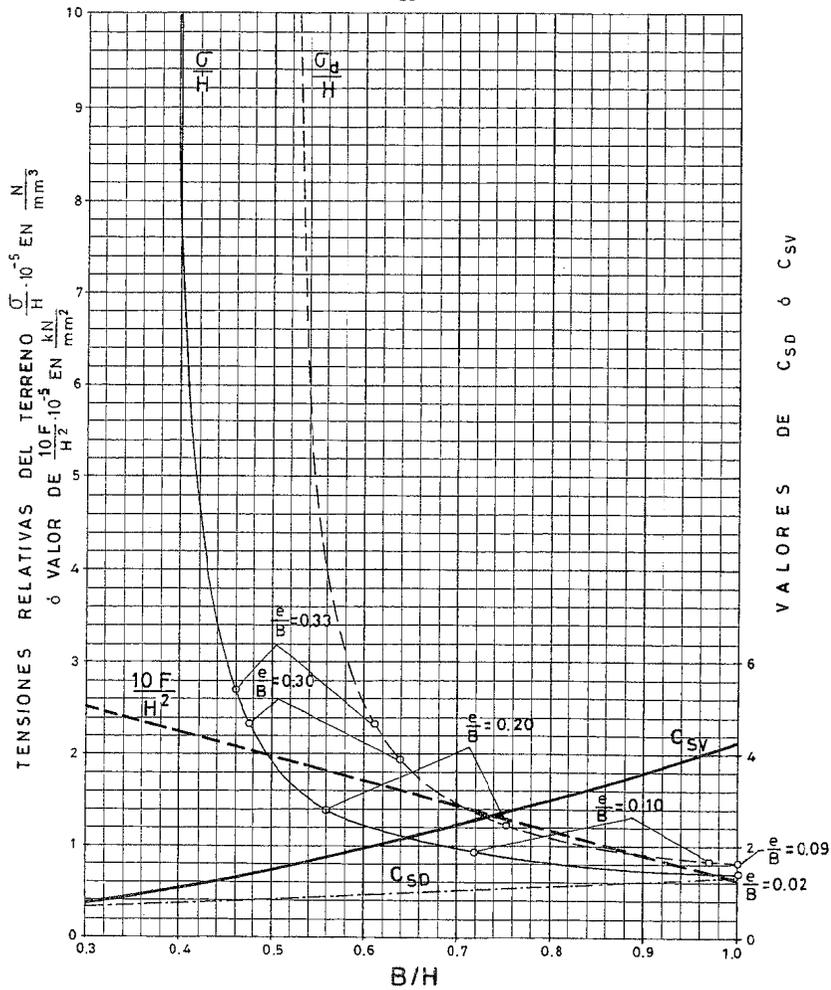


Figura 64-13

Cálculo del canto del tacón:

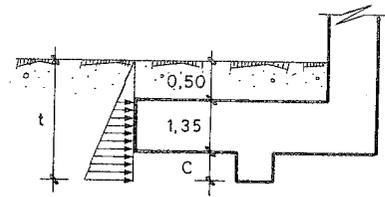


Figura 64-14

$$E_p = \frac{1}{2} \gamma t^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \gamma 0,5^2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \gamma (t^2 - 0,5^2) = 27(2,35 + c)(1,35 + c)$$

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma 9^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} - 9 \cdot 81 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 81 = 243 \text{ kN}$$

$$P = 25(7,65 \cdot 0,90 + 4,97 \cdot 1,35) + 18 \cdot 0,50 \cdot 4,07 = 376,5 \text{ kN}$$

$$1,5 = \frac{P\mu + E_p}{E_a}$$

$$1,5 \cdot 243 = 376,5 \cdot 0,577 + E_p$$

$$E_p = 147,3 = 27(2,35 + c)(1,35 + c)$$

$$147,3 = 85,7 + 63,5c + 36,5c + 27c^2$$

$$c^2 + 3,7c - 2,28 = 0; c = \frac{-3,7 \pm \sqrt{13,69 + 9,12}}{2} = 0,54$$

$$c = 0,54 \text{ m}$$

El muro calculado directamente nos hubiera dado los siguientes resultados:

$$B = 5 \text{ m}; \sigma = 0,129 \text{ N/mm}^2; \sigma_d = 0,381 \text{ N/mm}^2; C_{sv} = 1,81; c = 0,55 \text{ m}$$

## 64.6 DIMENSIONAMIENTO

### 64.6.1 VERIFICACIÓN DEL PREDIMENSIONAMIENTO

En esta etapa se verifica que los coeficientes de seguridad a vuelco y deslizamiento no son inferiores a los establecidos y que las tensiones  $\sigma$  y  $\sigma_d$  no superan los límites fijados. Veremos el proceso en un ejemplo.

#### EJEMPLO 64.3

Comprobemos el muro de la figura, que es el predimensionado en el EJEMPLO 64.1, para un ángulo de relleno  $\varphi = 30^\circ$ , densidad del hormigón  $24 \text{ kN/m}^3$ , densidad del terreno  $18 \text{ kN/m}^3$ , coeficiente de rozamiento entre suelo y cemento  $\mu = \text{tg. } 30^\circ = 0,577$ ,  $\sigma_{adm} = 0,2 \text{ N/mm}^2$ .

a) Valor del empuje

$$E = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 10^2 \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = 300 \text{ kN}$$

b) Resultante y punto de actuación de las cargas verticales

Tomando momentos respecto al punto A, se obtienen los resultados indicados en el cuadro:

Zona	Peso (kN)	Distancia de A al c.d.g. de la zona (m)	Momento (mkN)
Zapata	$5,30 \cdot 1 \cdot 24 = 127,2$	2,65	337,1
Alzado	$0,5 \cdot 0,75 \cdot 9 \cdot 24 = 8,1$	1,85	150,0
	$0,25 \cdot 9 \cdot 24 = 54$	2,225	120,2
Relleno delantero	$0,5 \cdot 1,35 \cdot 18 = 12,1$	0,675	8,2
Relleno del trasdós	$2,95 \cdot 9 \cdot 18 = 477$	3,825	1824,5

$$P = \sum P = 751,3$$

$$\sum M_e = 244,00$$

$$\overline{AD} = \frac{\sum M}{\sum P} = \frac{2440}{751,3} = 3,25 \text{ m}$$

y de la semejanza de los triángulos  $OPF$  y  $OCD$  (fig. 64-15)

$$\frac{\overline{E_a}}{P} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} ; \frac{300}{751,3} = \frac{\overline{CD}}{3,33}$$

luego:

$$\overline{CD} = 1,33 \text{ m}$$

y por tanto:

$$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = 3,25 - 1,33 = 1,92 \text{ m}$$

siendo C el punto de paso de la resultante.

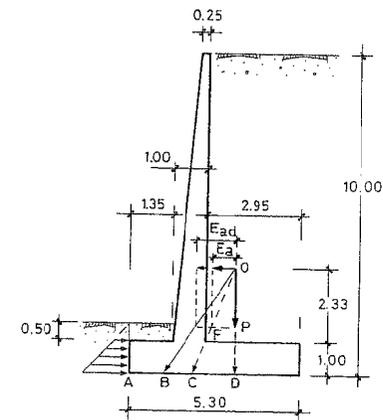


Figura 64-15

La distribución de presiones de acuerdo con la teoría tradicional es lineal, con diagrama trapezoidal o triangular según que la resultante quede dentro o fuera del tercio central (fig. 64-16 a) y b)).

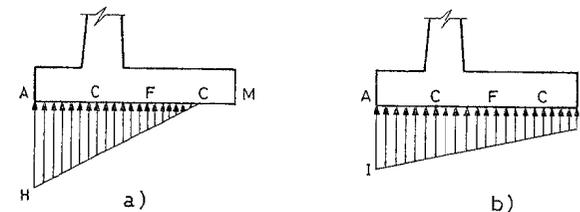


Figura 64-16

Se suele aceptar que la presión máxima en el borde no rebase 1,25 veces la estimada como admisible siempre que la tensión media  $\frac{\overline{AI} + \overline{MJ}}{2}$  no supere la admisible.

Veamos la tensión cuando el empuje se mayor hasta el valor

$$E_{ad} = 1,5 E_a = 1,5 \cdot 300 = 450 \text{ kN}$$

De acuerdo con la figura 64-15, el punto B es el de paso de la nueva resultante:

$$\frac{E_{ad}}{P} = \frac{\overline{BD}}{3,33}$$

$$\overline{BD} = \frac{450 \cdot 3,33}{751,3} = 2 \text{ m}$$

$$\text{y } \overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD} = 3,25 - 2 = 1,25 \text{ m}$$

y la nueva presión

$$\sigma_a = \frac{P}{2 \cdot \overline{AB}} = \frac{751,3}{2,50} = 300,5 \text{ kN / m}^2$$

se admite  $\sigma_a \leq 2 \sigma_{adm}$

d) Seguridad a deslizamiento

El coeficiente de seguridad correspondiente viene dado por la expresión:

$$C_{sd} = \frac{P \cdot \mu + E_p}{E_a}$$

siendo  $E_p$  el empuje pasivo sobre el frente de la puntera que vale

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} \cdot 1,5^2 - 18 \cdot 0,5 \cdot \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} \cdot 0,5^2 = 54 \text{ kN / m}$$

$$C_{sd} = \frac{751,3 \cdot 0,577 + 54}{300} = 1,63$$

Normalmente se estima suficiente  $C_{sd} \geq 1,50$

e) Seguridad a vuelco

El momento estabilizador es como hemos visto:

$$M_e = 2440 + 27 \cdot \frac{1}{3} + 27 \cdot \frac{1}{2} = 2462,5 \text{ mkN}$$

y el momento de vuelco

$$M_v = 300 \cdot 3,33 = 1000 \text{ mkN}$$

siendo por tanto el coeficiente de seguridad a vuelco:

$$C_{sv} = \frac{2462,5}{1000} = 2,46$$

Normalmente se estima suficiente  $C_{sv} \geq 1,8$

## 64.6.2 DIMENSIONAMIENTO DE LA ESTRUCTURA

El cálculo no plantea problemas nuevos. Refiriéndonos a la figura 64-15 se tiene lo siguiente:

- Conocida la ley de empujes mayorados,  $E_{ad}$  se puede dimensionar el alzado. La pequeña compresión del peso propio del alzado suele despreciarse. (En caso contrario debe procederse al dimensionamiento en flexión compuesta). El problema es idéntico al de una losa de canto variable. Para muros de altura superior a 4 m conviene cortar parte de la armadura vertical.
- Conocida la ley de presiones sobre el suelo bajo la acción del empuje  $E_{ad}$  se dimensiona a flexión la puntera.
- Análogamente, pero teniendo en cuenta el momento flector negativo que ocasiona el peso mayorado del relleno actuante sobre él, se calcula el talón.

## 64.7 DETALLES CONSTRUCTIVOS

a) Armado

Los esquemas generales se indican en la figura 64-17 para los tres casos. La armadura X es el emparrillado de retracción y temperatura de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 51. Obsérvese que las armaduras Y necesitan alguna armadura auxiliar (tipo "pie de pato"), para ser mantenidas en posición durante el hormigonado.

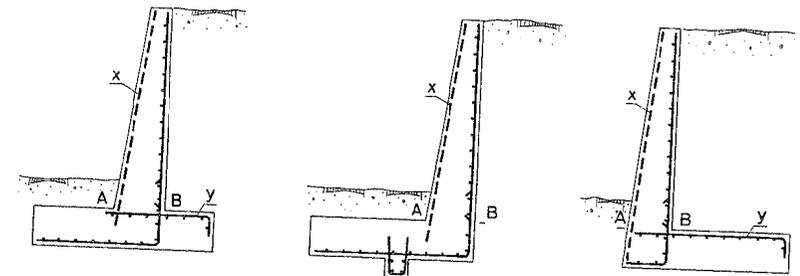


Figura 64-17

En la coronación y para evitar la concentración de fisuras de retracción y temperatura, conviene disponer como armadura suplementaria dos redondos.

Como el plano AB es de junta, la armadura vertical del alzado ha de empalmarse con la de espera. Atención a la longitud del solapo en función del porcentaje de armadura empalmado en la misma sección. Normalmente se empalma el 100%.

b) Excavación de cimientos

Por las mismas razones que se expusieron al hablar de zapatas, conviene no excavar los últimos 200 mm del terreno de apoyo del cimiento hasta que se vaya a verter el hormigón de limpieza.

c) *Junta de hormigonado entre cimiento y alzado*

Su esquema se indica en la figura 64-18. Se trata de una junta en zona de máximo momento flector y máximo esfuerzo cortante. A la vista de los ensayos realizados en los últimos años y de otras investigaciones en marcha, puede establecerse que dejando el hormigón en la zona de junta con su rugosidad natural, evitando la formación de capa de lechada, la junta tiene un funcionamiento satisfactorio. La costumbre de marcar una muesca en la cara superior del cimiento, tal como se indica en la figura 64-18, representa una ventaja puramente psicológica y si la muesca queda con su superficie lisa puede ser peor que la junta horizontal.

d) *Recubrimiento de las armaduras*

Por las mismas razones expuestas en el caso de cimentaciones, el recubrimiento debe ser de 25 a 40 mm. En casos de hormigonado contra el terreno el recubrimiento debe ser de 70 mm.

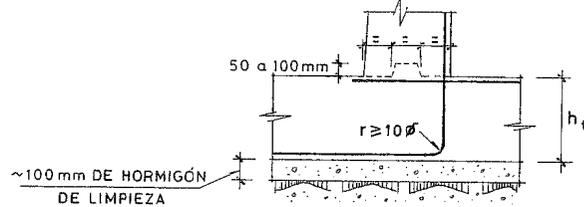


Figura 64-18

e) *Junta vertical de contracción*

En la figura 64-19 se indica el tipo más usual. La junta afecta al cuerpo pero no al cimiento.

Se deben disponer de acuerdo con lo indicado en la Tabla T-64.1.

TABLA T-64.1

DISTANCIA ENTRE JUNTAS VERTICALES DE CONTRACCIÓN EN EL ALZADO

ALTURA DE MURO	DISTANCIA RECOMENDADA ENTRE JUNTAS VERTICALES DE CONTRACCIÓN
$H \leq 2,40 \text{ m}$	3 H
$2,40 < H \leq 3,60 \text{ m}$	2 H
$H > 3,60 \text{ m}$	H <sup>(1)</sup>

Si se requiere una gran impermeabilización, puede disponerse una banda de impermeabilización, tal como se expone para juntas de dilatación. (Ver tipos variados de juntas en las referencias (64.1) y (64.3)).

<sup>1</sup> Sugerimos no pasar de 7,50 m si H superase ese valor.

f) *Junta de dilatación*

Deben disponerse en los puntos siguientes:

- Usualmente se disponen cada 20 m (30 m como máximo).
- En donde cambie la profundidad del plano de cimentación.
- En donde cambie la altura del muro.
- En todo el cambio de dirección en planta.

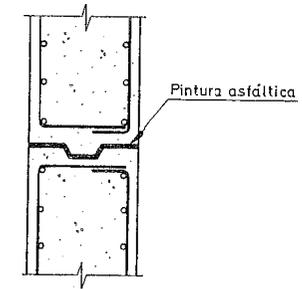


Figura 64-19

La disposición de juntas de dilatación en las zonas de cambio de dirección en planta se debe a que de otra forma se producen momentos flectores y esfuerzos axiales sobre el alzado, en dirección horizontal. Esto es especialmente grave en situaciones como la indicada en la figura 64-20 b), en la que el esfuerzo axil horizontal, si no se disponen las juntas J-J, sería de tracción.

Si el muro no cambia ni de dirección, ni de sección (altura del muro o profundidad del plano de cimentación), la junta puede afectar sólo al alzado, pero no al cimiento. En otro caso debe afectar *también al cimiento*, salvo que se estudien los esfuerzos introducidos en éste, en especial los momentos torsores.

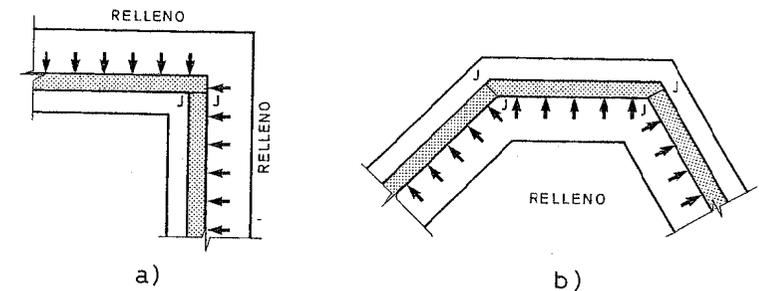


Figura 64-20

La figura 64-21 indica un tipo frecuente de junta. Si la garantía de impermeabilidad ha de ser alta, conviene disponer la banda de impermeabilización indicada. En este caso los sellados asfálticos no son necesarios, bastando en todo caso disponer un tapajuntas, en intradós por motivos estéticos y en trasdós para evitar que el suelo del relleno colmate y bloquee la junta.

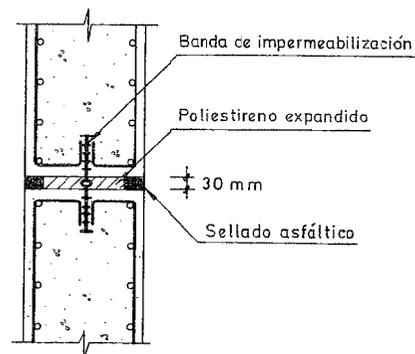


Figura 64-21

Si los requisitos de impermeabilidad no son altos, puede eliminarse la banda y disponer sólo los sellados. Sin embargo, esta solución requerirá conservación durante la vida del muro.

g) Impermeabilización del trasdós

Si no se dispone, no es posible garantizar la impermeabilidad del muro, con los problemas estéticos y/o funcionales que ello supone y que deberán ser considerados y solucionados. Si ello no importa, la impermeabilización puede suprimirse.

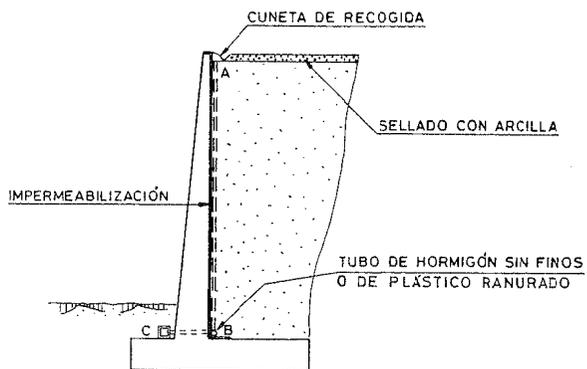


Figura 64-22

Una solución simple y muy económica es la de dar una pintura asfáltica sobre toda la superficie del trasdós.

Cuando se desea una garantía alta de impermeabilidad, debe disponerse una lámina asfáltica. Si es de temer que durante la ejecución del relleno se dañe la impermeabilización, conviene protegerla con una capa de mortero. Junto a la coronación (fig. 64-22), es conveniente disponer una cuneta de recogida y una capa de arcilla compactada y con ligera pendiente, que reduzca la entrada de agua de lluvia al relleno del trasdós.

h) Drenaje

Como anteriormente dijimos es necesario garantizar la posibilidad de establecimiento de la red filtrante de drenaje del relleno del trasdós. La solución habitual es la de emplear tubos de hormigón sin finos (preferibles a los tubos con agujeros o con juntas abiertas, que suelen ocasionar arrastre de finos y requieren filtros graduados) o tubos de plástico ranurados, placas de hormigón sin finos o geotextiles. En general, los tubos de hormigón sin finos basta con que estén rodeados de una arena limpia del tipo de la utilizable en hormigón. El relleno en sí ha de ser también permeable (fig. 64-22). Si el muro es muy alto o el relleno no muy permeable, pueden disponerse drenes verticales a 5 ó 6 m de separación (fig. 64-23).

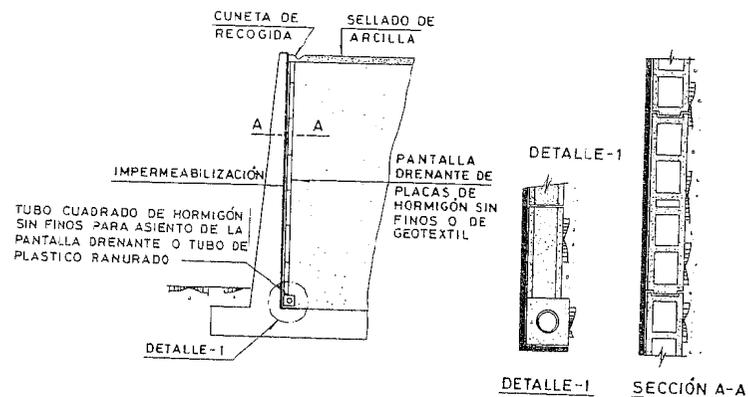


Figura 64-23

En casos especiales puede recurrirse a la solución de revestir el trasdós completo con placas de hormigón sin finos adosadas a la impermeabilización, o con un geotextil.

Para el empleo de geotextiles y tubos de plástico ranurados como drenaje de muros véase (64.3).

El coste del drenaje es muy bajo en el coste total del muro. Su influencia sobre el valor del empuje y sobre la impermeabilidad del muro son, en cambio muy importantes.

## BIBLIOGRAFÍA

- (64.1) CALAVERA, J. "Muros de contención y muros de sótano". INTEMAC. Madrid, 2ª Edición. 1990.
- (64.2) CALAVERA, J.; CABRERA BELMONT, A. "Un método para el proyecto de muros de contención". Informes de la Construcción, nº 210. 1969.
- (64.3) CALAVERA, J. "Manual de detalles constructivos en obras de hormigón armado". INTEMAC. Madrid. 1993.
- (64.4) CALAVERA, J.; JALVO, J.; LEY, J.; LUZÓN, J.M.; TAPIA, J. "Drenaje de plantas bajas de edificios y drenaje e impermeabilización de sótanos". Monografía Nº 1. INTEMAC. MADRID. 1998.

## CAPÍTULO 65

### MUROS DE SÓTANO<sup>1</sup>

#### 65.1 INTRODUCCIÓN

Los muros de sótano presentan diferencias considerables con los muros de contención estudiados en el Capítulo anterior. La figura 65-1 indica un muro de sótano que, simultáneamente, recibe cargas verticales, generalmente transmitidas por pilares de la estructura y frecuentemente también por algún forjado, y cargas horizontales producidas por el empuje de tierras. Aparte de esta diferencia, existe otra fundamental y es que el muro no trabaja como una ménsula, sino que se enlaza al forjado de planta baja y funciona como una losa.

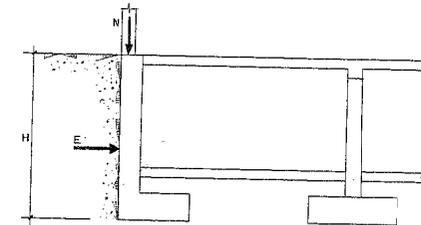


Figura 65-1

#### 65.2 CÁLCULO DEL EMPUJE

Al estar impedido el corrimiento del muro en coronación y cimiento, su deformabilidad es muy reducida y estamos, de acuerdo con lo expuesto al hablar de empujes en el Capítulo 64, en un caso de empuje al reposo.

<sup>1</sup> El texto resume lo esencial del Capítulo correspondiente de mi libro "Muros de Contención y Muros de Sótano" (65.1).

Suponemos que el muro se encofra a dos caras y una vez construidos tanto el muro como el forjado, se procede a la ejecución del relleno con material granular. Por supuesto, el método de cálculo es general y puede aplicarse a cualquier otra hipótesis de empuje.

Para el caso de relleno granular de densidad  $\gamma \text{ kN/m}^3$  y sobrecarga  $q \text{ kN/m}^2$  sobre el relleno, la distribución de presiones se indica en la figura 65-2a). Para lo que nos ocupa, podemos, dentro de una precisión aceptable, sustituir la ley trapezoidal por la rectangular indicada en la figura 65-2b) para el caso de un sótano y por la indicada en la figura 65-2c) para el caso de dos sótanos.

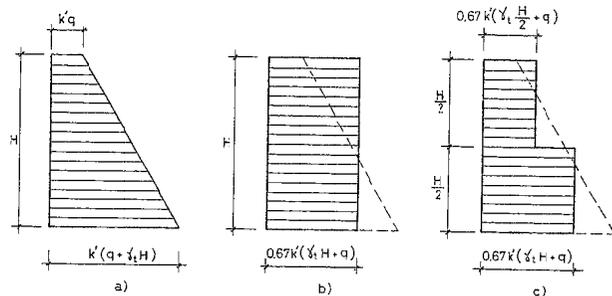


Figura 65-2

El valor del coeficiente al reposo en suelos no sobreconsolidados viene dado por la expresión

$$k' = 1 - \text{sen } \varphi \quad [65.1]$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de rozamiento interno del relleno <sup>1</sup>.

### 65.3 ESQUEMA DE FUNCIONAMIENTO

El esquema de funcionamiento del muro es considerablemente distinto del de los muros de contención vistos hasta el momento. Consideramos el caso del muro de la figura 65-3. Aceptaremos, por el momento, que bajo las acciones  $E_r$  de empuje del terreno y  $\Sigma N$ , suma de  $N$ , carga de la estructura sobre muro,  $N_m$ , peso de alzado del muro,  $N_c$ , peso del cimiento y  $N_t$ , peso eventual del terreno, soleras y pavimento sobre el cimiento, el equilibrio del muro se consigue por la fuerza,  $T_1$ , reacción del forjado sobre el muro,  $T_2$ , de rozamiento del suelo de cimentación sobre el cimiento, y una tensión  $\sigma_t$  bajo el cimiento, uniformemente repartida bajo el mismo. Todos los esfuerzos se consideran por m.l. de muro.

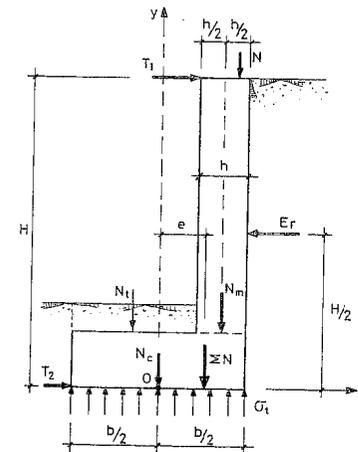


Figura 65-3

Expresando las condiciones de equilibrio, respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y el punto  $O$ , con fuerzas y excentricidades consideradas positivas en los sentidos positivos de los ejes, se tiene:

$$\Sigma N + \sigma_t b = 0 \quad [65.2]$$

$$T_1 + T_2 + E_r = 0 \quad [65.3]$$

$$e \Sigma N - \frac{H}{2} E_r - H T_1 = 0 \quad [65.4]$$

y resolviendo el sistema

$$\sigma_t = \frac{\Sigma N}{b} \quad [65.5]$$

$$T_1 = \frac{e \Sigma N - \frac{H}{2} E_r}{H} \quad [65.6]$$

$$T_2 = -\frac{\frac{H}{2} E_r + e \Sigma N}{H} \quad [65.7]$$

<sup>1</sup> La forma de ejecución del relleno puede, en casos concretos, hacer que el empuje sea inferior al valor correspondiente al empuje al reposo, que aquí se adopta.

<sup>1</sup> De acuerdo con los ejes de la figura 65-3,  $\Sigma N$  y  $E_r$  tendrán signo negativo.

Siempre que  $e \Sigma N - \frac{H}{2} E_r > 0$  el valor de  $T_1$  corresponderá a apoyo del muro sobre el forjado, En caso contrario, el muro se ancla en el forjado. Esto ocurriría en particular si no se movilizase el empuje  $E_r$ <sup>1</sup>.

También para que el muro no deslice

$$\mu \Sigma N \geq C_{sd} T_2 \quad [65.8]$$

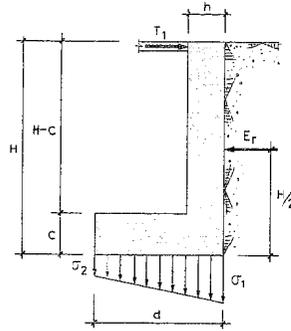


Figura 65-4

donde  $C_{sd}$  es el coeficiente de seguridad a deslizamiento y  $\mu$  el coeficiente de rozamiento entre el cimiento y el terreno. Habitualmente se toma  $C_{sd} = 1,5$ . (Para terrenos cohesivos deberá tenerse en cuenta la adherencia además del rozamiento).

En lo anterior, se ha supuesto un reparto uniforme de presiones bajo el cimiento. Esto es muy aproximadamente cierto en este tipo de muros. En CALAVERA (65.2) se demuestra que, analizando los giros del cimiento y del muro en función de las deformabilidades del terreno y del hormigón y aceptando una distribución lineal de tensiones  $\sigma_i$  sobre el terreno (fig. 65-4), la relación

$$\frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{med}} = \frac{\sigma_1}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}$$

viene dada la expresión

$$\frac{\sigma_1}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}} = 1 - \frac{2k(H-c)^2 b^2 \left( T_1 + \frac{E_r (H-c)}{2H} \right)}{E_c h^3 \Sigma N}$$

1 Es evidente que el empuje pasivo podría restablecer el equilibrio, pero en general no puede contarse con ello, pues exigiría deformaciones del muro incompatibles con la del forjado y el resto de la estructura.

Si no se moviliza ningún empuje, la tracción en el forjado se obtiene haciendo  $E_r = 0$  en [65.6].

válida para valores por m.l. de muro y donde:

$k$  = Módulo de balasto del terreno para ancho  $b$  de cimiento.

$T_1$  = Valor de la reacción a nivel de forjado, que viene dado por [61.6].

$E_c$  = Módulo de deformación del hormigón del muro.

Las demás variables han sido ya definidas o se indican en la figura 65-4.

Aceptando

$$\frac{\sigma_1}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}} \leq 1,33$$

lo cual es un criterio habitual, la condición anterior se transforma en la siguiente:

$$1 - \frac{2k(H-c)^2 b^2 \left( T_1 + \frac{E_r (H-c)}{2H} \right)}{E_c h^3 \Sigma N} \leq 0,33 \quad [65.9]$$

que resulta cumplida para todos los muros utilizados en la práctica, aún con terrenos de valores del módulo de balasto  $k$  muy altos. En todo caso [65.9] puede utilizarse como fórmula de comprobación en cada caso.

## 65.4 CÁLCULO DE MURO EN SENTIDO TRANSVERSAL

Aunque en el apartado anterior hemos expuesto lo fundamental del método de cálculo, lo hemos hecho con la intención de detallar la forma en que el muro resiste las acciones actuantes sobre él. A continuación, exponemos el método general de cálculo de esfuerzos en forma más adecuada para el cálculo práctico y referido a muros de uno o dos sótanos<sup>2</sup>.

### 65.4.1 CASO DE UN SOLO SÓTANO

Adoptamos las designaciones y ejes indicados en la figura 65-5a) y un muro genérico que abarca, por tanto, la solución de zapata centrada (fig. 65-5b)) y la de zapata excéntrica (fig. 65-5c)). De acuerdo con 65.2, la resultante del empuje al reposo la suponemos situada a la mitad de la altura  $H$ . Designamos como  $T$  y  $-T$ , las reacciones a nivel de forjado y fondo de cimiento, que equilibran el momento  $e \Sigma N$ , donde  $\Sigma N$  es la suma de todas las cargas actuantes sobre el muro y  $e$  su excentricidad. Designamos por  $R$  las reacciones a nivel de forjado y fondo de cimiento, que equilibran el empuje al reposo,  $E_r$ . Separamos ambos conjuntos de reacciones porque responden a acciones no necesariamente simultáneas. ( $E_r$  se considera positiva de acuerdo con los ejes de la figura 65-5. Por tanto en la figura sería negativa).

1 Recuérdese que, en general, con los signos de las figuras 65-3 y 65-4,  $T_1$  y  $E_r$  resultan negativos.

2 El método es generalizable a cualquier número de sótanos, pero para más de dos existen soluciones más económicas, en especial de muros-pantalla.

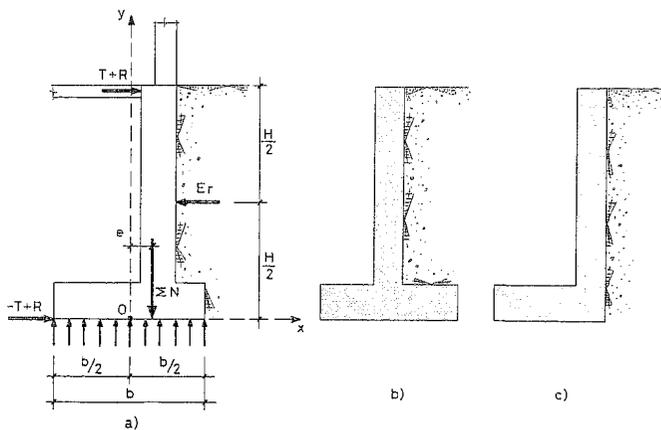


Figura 65-5

Por lo que se refiere al cálculo de  $\Sigma N$ , este valor se compone generalmente de:

- Carga transmitida por la estructura al muro.
- Peso del muro.
- Peso del terreno, solera y pavimento situados verticalmente sobre el cimiento.
- Peso del cimiento.

Planteando las ecuaciones de equilibrio respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y el punto  $O$ , se tiene para una longitud unidad de muro

$$\Sigma N + \sigma_1 b = 0 \quad [65.10]$$

$$T - T + R + R + E_r = 0 \quad [65.11]$$

$$e \Sigma N - \frac{H}{2} E_r - H(T + R) = 0 \quad [65.12]$$

y resolviendo el sistema

$$\sigma_1 = -\frac{\Sigma N}{b} \quad [65.13]$$

$$R = -\frac{E_r}{2} \quad [65.14]$$

$$T = \frac{e \Sigma N}{H} \quad [65.15]$$

Es necesario, en principio, hacer tres hipótesis.

a) No se produce empuje y las cargas verticales alcanzan su valor máximo  $\Sigma N$ .

En este caso  $R = 0$ .

$$\sigma_1 = -\frac{\Sigma N}{b}$$

$$T + R = \frac{e \Sigma N}{H}$$

Por tanto, el muro tira del forjado, si  $e > 0$  como es lo usual.

La reacción en el fondo del cimiento vale

$$-T + R = -\frac{e \Sigma N}{H}$$

y debe verificarse

$$\mu \Sigma N \geq C_{sd} \left| \frac{e \Sigma N}{H} \right|$$

de donde

$$e \leq \frac{\mu}{C_{sd}} \cdot H \quad [65.16]$$

b) Se produce empuje, pero las cargas verticales alcanzan su valor mínimo  $\Sigma N_{min}$ .

Habitualmente, esta situación corresponde a ausencia de sobrecargas en la estructura o a una etapa de construcción

$$\sigma_1 = -\frac{\Sigma N_{min}}{b} \quad [65.17]$$

$$T + R = -\frac{E_r}{2} + \frac{e \Sigma N_{min}}{H} \quad [65.18]$$

$$-T + R = -\frac{E_r}{2} - \frac{e \Sigma N_{min}}{H} \quad [65.19]$$

- Si  $2 e \Sigma N - H E_r > 0$ , el muro se apoya en el forjado <sup>1</sup>.

- Si  $2 e \Sigma N - H E_r < 0$ , el muro tira del forjado <sup>1</sup>.

La condición de no deslizamiento en fondo de cimiento conduce a:

$$\mu \Sigma N \geq C_{sd} \left| \frac{E_r}{2} - \frac{e \Sigma N_{min}}{H} \right| \quad [65.20]$$

<sup>1</sup> Se supone que  $e$  es positiva, como es lo usual.

c) Se produce empuje y las cargas verticales alcanzan su valor máximo  $\Sigma N_{m\acute{a}x}$ .

Análogamente obtenemos

$$\sigma_1 = - \frac{\Sigma N_{m\acute{a}x}}{b} \quad [65.21]$$

$$T + R = - \frac{E_r}{2} + \frac{e \Sigma N_{m\acute{a}x}}{H} \quad [65.22]$$

$$-T + R = - \frac{E_r}{2} - \frac{e \Sigma N_{m\acute{a}x}}{H} \quad [65.23]$$

- Si  $2 e \Sigma N_{m\acute{a}x} - H E_r > 0$ , el muro se apoya en el forjado <sup>1</sup>.

- Si  $2 e \Sigma N_{m\acute{a}x} - H E_r < 0$ , el muro tira del forjado <sup>1</sup>.

La condición de no deslizamiento conduce a:

$$\mu \Sigma N \geq C_{sd} \left| \frac{E_r}{2} - \frac{e \Sigma N_{m\acute{a}x}}{H} \right| \quad [65.24]$$

d) *Hipótesis pésima*

Resumiendo los apartados a), b) y c), se tiene:

*Presión sobre el terreno.* Se produce bajo la acción de las máximas cargas verticales, con independencia de que actúe o no el empuje del terreno.

$$\sigma_1 = - \frac{\Sigma N}{b} \quad [65.25]$$

*Reacción en el forjado.* La máxima tracción se produce si no actúa el empuje y las cargas verticales alcanzan su valor máximo <sup>1</sup> y vale:

$$T = \frac{e \Sigma N_{m\acute{a}x}}{H} \quad [65.26]$$

La máxima compresión (si existe compresión) se produce para el caso de empuje de terreno y mínima carga vertical y vale:

$$T + R = - \frac{E_r}{2} + \frac{e \Sigma N_{m\acute{a}x}}{H} \quad [65.27]$$

La máxima reacción en fondo de cemento se produce para empuje del terreno y máxima carga vertical y conduce a la condición

$$\mu \Sigma N \geq C_{sd} \left| \frac{E_r}{2} - \frac{e \Sigma N_{m\acute{a}x}}{H} \right| \quad [65.28]$$

<sup>1</sup> Se supone que  $e$  es positiva, como es lo usual.

e) *Esfuerzos.* Es necesario considerar tres hipótesis distintas:

e-1) Actúa sólo el peso propio a nivel de muro (es decir, peso propio, rellenos y carga permanente del forjado) y el empuje de tierras.

Esta situación se presenta durante la construcción. El relleno del trasdós no debe, por tanto, realizarse hasta que no se ha construido el forjado.

En la figura 65-6 se indican los diagramas de flexión simple y flexión compuesta y los diagramas finales de momentos flectores y esfuerzos axiales.

Como simplificación puede calcularse el muro, en esta hipótesis, despreciando las cargas verticales, es decir, sometido sólo a flexión simple.

En cualquier caso, es prudente cubrir también la ley de momentos correspondiente a la situación de muro apoyado en coronación y empotrado en la base (fig. 65-6), pues en caso de cimientos grandes y suelos rígidos, la situación real puede aproximarse a ella.

e-2) Actúan el empuje de tierras y las cargas verticales máximas. En la figura 65-7 se representan los diagramas correspondientes.

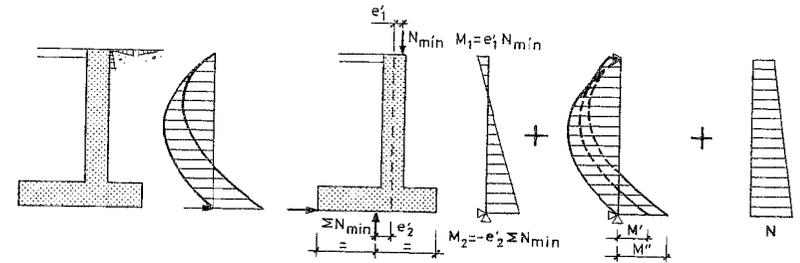


Figura 65-6

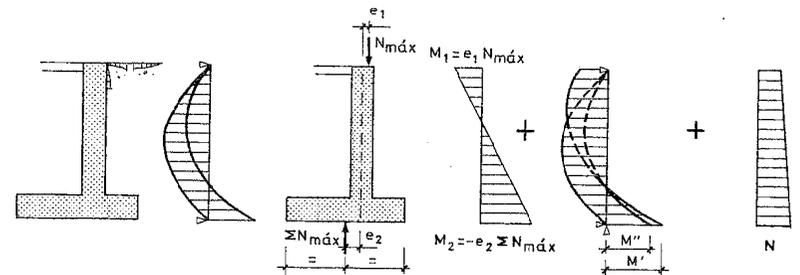


Figura 65-7

e-3) Actúan sólo las cargas verticales máximas. El diagrama se indica en la figura 65-8.

Sin embargo, en cualquier caso, los momentos negativos (tracciones en el trasdós) deben ser, bien la suma de los de cargas verticales más los del

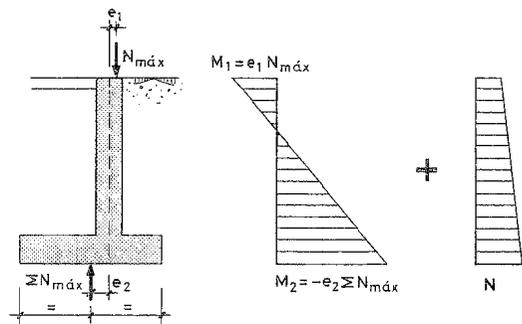


Figura 65-8

empuje en la hipótesis de simple apoyo ( $M'$ ) o los de la hipótesis de empuje con empotramiento en la base, sin cargas verticales ( $M''$ ).

Dada la manera de armar los muros, usualmente las hipótesis que rigen el dimensionamiento de armaduras son las e-1) y e-2). Es interesante, en este caso, la optimización de suma de armaduras de las dos caras, de acuerdo con los gráficos GT-107 y GT-108.

#### 65.4.2 CASO DE DOS SÓTANOS

El método es idéntico, aunque el problema, al ser hiperestático, requiere un cálculo algo más laborioso.

En la figura 65-9a) se indica el muro con las acciones en sus extremos. Bajo la acción de los momentos  $M_1$  y  $M_2$  en dichos extremos, producidos por las fuerzas verticales con sus excentricidades correspondientes, el muro funciona como una viga continua sometida a estos dos momentos (Fig. 65-9b)).

Bajo la acción del empuje al reposo (Fig. 65-9c)), el muro funciona también como viga continua.

Los diagramas de momentos flectores y el de esfuerzos axiales se indican en la figura 65-9 d) y e).

Caben las mismas hipótesis que en el caso de un solo sótano y, análogamente, para el dimensionamiento en flexión compuesta, conviene optimizar la suma de armaduras de las dos caras.

De nuevo aquí conviene considerar también la hipótesis de muro empotrado en la zapata, con las consideraciones que allí se hicieron.

#### 65.5 CÁLCULO DEL MURO COMO VIGA DE CIMENTACIÓN

El muro, en dirección longitudinal, funciona como una viga de cimentación. Un cálculo preciso puede ser estudiado en el libro de la referencia (65.1). Si la estructura es flexible, el cálculo del muro puede hacerse como viga flotante, que es el método más

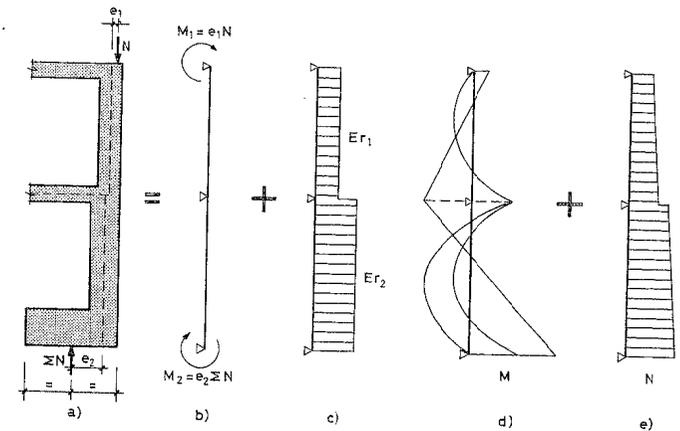


Figura 65-9

correcto. Como simplificación, si la estructura es flexible y en todo caso si es rígida, puede aplicarse el siguiente método simplificado <sup>1</sup>.

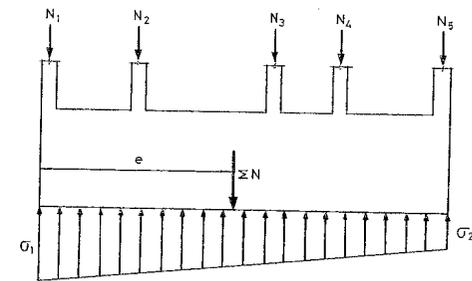


Figura 65-10

- Se considera el muro como un cuerpo rígido (fig. 65-10), sometido a las cargas  $N_i$  de los pilares (y forjado en su coronación) y a su peso propio.
- Se halla la resultante  $\Sigma N$  de todas estas cargas y su distancia  $e$ .
- Con  $e$  y  $\Sigma N$  se obtiene la distribución lineal de presiones, variando de  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ . (En la mayoría de los casos, la distribución resultará sensiblemente uniforme).
- Conocidas las acciones y reacciones sobre la viga, se calculan los momentos flectores y esfuerzos cortantes. (Este método es conservador. Ver referencia (65.1)).

<sup>1</sup> Para una clasificación de si la estructura (conjunto de superestructura y cimiento) es rígida o no con respecto al terreno, véase J. CALAVERA (65.1).

e) Aunque en sentido estricto el muro suele ser una viga pared y debería por tanto ser calculado de acuerdo con ello, en general las armaduras mínimas de retracción y temperatura son importantes y reducen la armadura necesaria para resistir los momentos flectores resultantes.

La armadura horizontal de retracción y temperatura dispuesta en ambas caras, puede ser tenida en cuenta, simultáneamente, para resistir los momentos flectores. Véanse para ello los ábacos GT-25 y GT-26.

El método se aclara a continuación con un ejemplo.

### EJEMPLO 65.1

Un muro de 4 m de altura y 400 mm de espesor soporta las cargas indicadas en la figura 65-11. Se dispone una armadura de retracción y temperatura en dirección horizontal simétrica en ambas caras. Calcular la armadura suplementaria en las zonas superior e inferior de la sección.  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ . Acero B 400.  $\gamma_{fs} = \gamma_{fq} = 1,6$ ,  $\gamma_c = 1,5$ ,  $\gamma_s = 1,10$ . Se supone que la estructura es de gran rigidez.

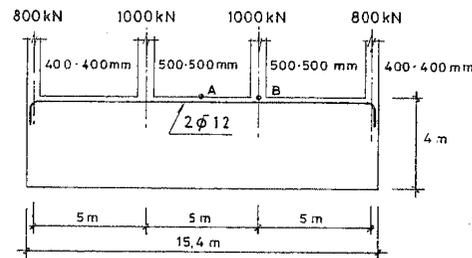


Figura 65-11

Como la viga es obviamente rígida, se acepta una distribución uniforme. La reacción p.m.l es

$$p = \frac{800 + 1000 + 1000 + 800}{15,40} + 0,4 \cdot 4,00 \cdot 2,5 = 273,8 \text{ kN/m}$$

El momento en B vale

$$M_B = \frac{5,2^2 \cdot 273,8}{2} - 800 \cdot 5 - 40 \cdot \frac{5,2^2}{2} = -839 \text{ mkN}$$

El momento en A vale

$$M_A = \frac{7,7^2 \cdot 273,8}{2} - 1000 \cdot 2,50 - 800 \cdot 7,50 - 40 \cdot \frac{7,7^2}{2} = -1569 \text{ mkN}$$

Por sencillez constructiva, armamos todo el muro con la misma armadura, por lo que adoptamos

$$M_A = -1569 \text{ mkN}$$

$$M_{Ad} = 1,6 \cdot 1569 = 2510,4 \text{ mkN}$$

Con acero B 400, la cuantía mínima de armadura horizontal de retracción y temperatura es:

$$q = \frac{2}{1.000} \cdot 400 \cdot 4000 = 3200 \text{ mm}^2$$

y por tanto

$$\omega = \frac{3200 \cdot \frac{400}{1,15}}{400 \cdot 4000 \cdot \frac{25}{1,5}} = 0,042$$

que con  $v = 0$ , el ábaco GT-100, nos da  $\mu \approx 0,03$ , o sea

$$M_d = 0,03 \cdot 400 \cdot (4.000)^2 \cdot \frac{25}{1,5} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ mmN} = 3.200 \text{ mkN}$$

que cubre el momento máximo. Se disponen 2  $\phi 12$  en coronación para controlar la fisuración.

### 65.6 DIMENSIONAMIENTO DEL MURO

En el apartado 65.4 se ha partido de que la carga  $N$  en coronación está uniformemente distribuida a lo largo de la misma, en cuyo caso el dimensionamiento se realiza en flexión compuesta, de acuerdo con los diagramas de esfuerzos que allí vimos. Es interesante siempre la optimización de la armadura mediante el empleo de los ábacos GT-107 y GT-108.

Si parte de la carga se introduce en la coronación a través de pilares, la carga de los pilares puede aceptarse que se difunde con un ángulo  $\alpha$  tal que  $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$

(fig. 65-12). En tal situación debe comprobarse el muro a distintos niveles con los momentos flectores y esfuerzos axiales correspondientes al empuje y a las cargas verticales constantes a lo largo del muro, repartidas a lo largo del mismo, y los esfuerzos axiales y los momentos flectores debidos a las cargas puntuales, repartidos según el esquema de la figura 65-12. Esto requiere el dimensionamiento a esos diferentes niveles en flexión compuesta con los esfuerzos totales, para determinar las armaduras máximas. De nuevo el empleo de los ábacos GT-107 y GT-108 permite la optimización de las armaduras. Usualmente las armaduras del muro se mantienen constantes a lo largo de toda su longitud.

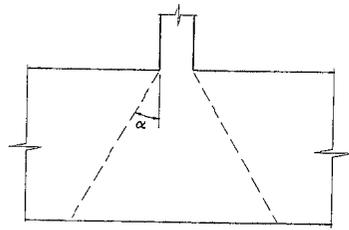


Figura 65-12

Los métodos de dimensionamiento de la puntera y el talón son idénticos a los expuestos para muros ménsula en el Capítulo 64.

### 65.7 OBSERVACIONES GENERALES

a) El apoyo de los pilares en el muro (fig. 65-13) se hace mediante la correspondiente armadura de espera. Si el pilar es del mismo ancho del muro, la armadura de espera se ata a la del muro (fig. 65-13b)). Si es de ancho menor (fig. 65-13c)), se necesita disponer unos trozos de despunte *A* para sujetarla. En cualquier caso, la armadura de espera no suele necesitar más longitud que la de anclaje,  $l_b$ , y debe llevar estribos salvo que el muro, por ambos lados, exceda notablemente al pilar. Si el pilar sobresale del muro, entonces naturalmente la armadura debe bajar con el pilar y anclarse en el cimiento, disponiéndose allí las esperas correspondientes.

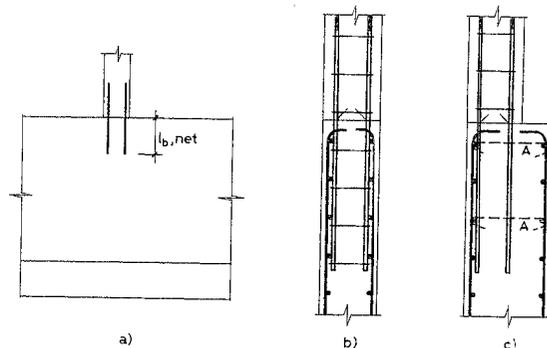


Figura 65-13

b) En todo lo anterior se ha supuesto que los pilares transmiten al muro cargas axiales pero no momentos. Si éstos no son despreciables, basta trasladar, a efectos de cálculo, el eje del pilar las cantidades  $e_x = \frac{M_x}{N}$ ,  $e_y = \frac{M_y}{N}$  y operar con esa nueva posición, con el pilar sometido a carga centrada.

c) Las cuantías geométricas mínimas de armadura vertical y horizontal de muros de sótano deben regirse por lo siguiente (65.2) <sup>1</sup>.

*Armadura vertical*

0,0012 para barras corrugadas de diámetro no superior a 16 mm.

0,0015 para barras corrugadas de diámetro superior a 16 mm.

0,0012 para mallas soldadas.

*Armadura horizontal*

0,0020 para barras corrugadas de diámetro no superior a 16 mm.

0,0025 para barras corrugadas de diámetro superior a 16 mm.

0,0020 para mallas electrosoldadas.

Las cuantías citadas rigen distribuyéndolas de forma que en la cara expuesta se disponga del 50% al 66%.

La separación máxima entre armaduras no será superior a 300 mm.

No se necesita armadura transversal para evitar el pandeo de la armadura vertical si su cuantía geométrica no es superior a 0,01 ó si la armadura vertical no es necesaria como armadura comprimida.

Si las condiciones anteriores no se cumplen, deben seguirse las reglas siguientes:

- Si la armadura vertical es de diámetro no superior a 12 mm se dispondrán estribos con separaciones verticales y horizontales no superiores a 500 mm (fig. 65-14).

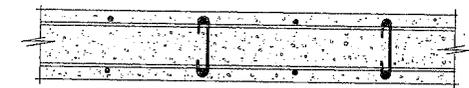


Figura 65-14

- Si la armadura vertical es de diámetro superior a 12 mm, se dispondrán estribos en todos los cruces, sin rebasar en dirección vertical la separación de 15 veces el diámetro de la armadura.

d) El enlace del forjado al muro debe dimensionarse para el esfuerzo de tracción o compresión resultante del cálculo (fig. 65-15). (No se olvide que *AB* suele ser junta de hormigonado).

Análogamente se procede si son vigas las que se acometen al muro.

e) Normalmente la fuerza horizontal transmitida por el muro al forjado no requiere precauciones especiales, pero debe atenderse a lo siguiente:

<sup>1</sup> Los requisitos son los correspondientes al Código ACI 318-95 y son algo más exigentes que los de EHE.

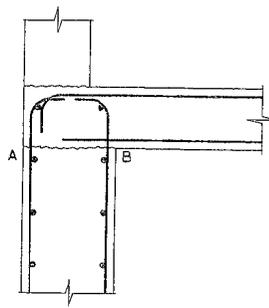


Figura 65-15

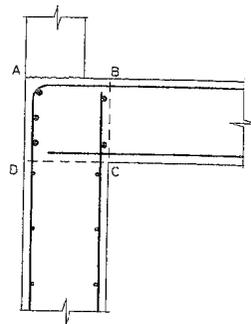


Figura 65-16

- Dicha fuerza debe ser resistida por pilares, pantallas, etc. solidarios con la zona de forjado interesada. (Atención a posibles juntas de dilatación). La rigidez del conjunto debe ser claramente superior a la del muro.
- Si la fuerza es de tracción, la armadura necesaria para resistirla debe prolongarse hasta que la fuerza transmitida esté debidamente anclada.
- Si al muro acometen vigas (fig. 65-16) y el forjado es unidireccional y paralelo al muro, no debe suponerse al forjado ninguna resistencia importante en su plano. La mejor solución es materializar en la coronación del muro una viga ABCD que resista en dirección horizontal la reacción del muro y la transmita a las vigas. Para pequeñas reacciones la losa superior del forjado y su armadura pueden resultar suficientes.

f) Normalmente, la resistencia por rozamiento en el fondo del cimiento es suficiente para asegurarlo contra el deslizamiento. El llevar la solera de hormigón del sótano a tope hasta el muro no es, por tanto, necesario y en cambio impide, en caso de aumento de temperatura, la libre expansión de la solera, deteriorándola rápidamente. En la figura 65-17 se indica la solución correcta. Entre la solera de hormigón y la cara superior del cimiento, deben interponerse 150 ó 200 mm, como mínimo, de subbase granular compactada. De otra forma, la solera experimenta el asiento normal general que en cambio se impide sobre el cimiento, fisurándose la solera sobre la arista del cimiento. (Véase el Capítulo 70).

### 65.8 TRACCIONES HORIZONTALES PRODUCIDAS EN EL MURO POR LA CARGA CONCENTRADA DE LOS PILARES

De acuerdo con lo indicado en la figura 65-18, la carga  $N_d$  transmitida por el pilar produce en la zona superior del muro una zona de compresiones horizontales y en todo el resto de la altura, tracciones horizontales (véase J. CALAVERA (65.2)). La resultante de estas tracciones puede ser evaluada por la fórmula

$$T = 0,3 N_d \left( 1 - \frac{d}{L_2} \right) \quad [65.29]$$

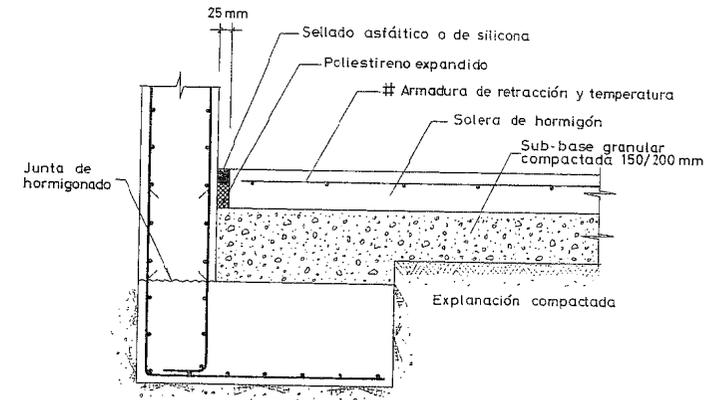


Figura 65-17

siendo  $L_2$  la mayor de las dos luces continuas al pilar considerado.

De acuerdo con ello, el área de armadura distribuida uniformemente en el canto  $H$  del muro, o en una profundidad  $L_1$  por debajo de la coronación si  $L_1 < H$  (recuérdese que  $L_1 \leq L_2$ ), debe ser

$$A_s f_{yd} = 0,3 N_u \left( 1 - \frac{d}{L_2} \right) \quad [65.30]$$

La armadura de retracción y temperatura especificada en 65.6.d) puede considerarse simultáneamente a estos efectos y en la mayoría de los casos es suficiente.

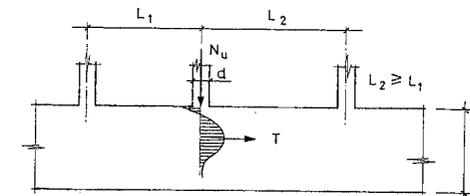


Figura 65-18

### 65.9 EFECTO DE ESQUINA EN MUROS DE SÓTANO

Frecuentemente los muros de sótano presentan disposiciones como la indicada en la figura 65-19 y se presenta un efecto de esquina al empotrarse un muro en el otro. Una solución es evitarlo creando una junta de dilatación tal como la MN, pero en muchas ocasiones resulta preferible no disponer tal junta y es necesario resistir la flexión horizontal que el efecto de esquina produce.

La situación puede asimilarse a la de una placa con un borde vertical empotrado, correspondiente a la esquina. La situación de los apoyos horizontales, el superior de enlace al forjado y el inferior de enlace a la cimentación, si se trata de un muro para un

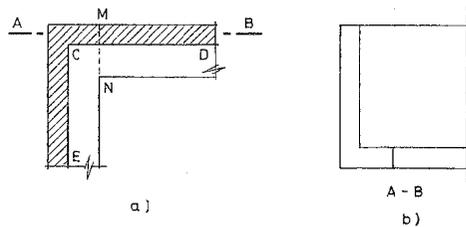


Figura 65-19

solo sótano, o de apoyo continuo en otro forjado, si se trata de varios sótanos, es mucho más imprecisa y de hecho puede variar desde el simple apoyo al empotramiento casi perfecto. El caso pésimo corresponde al de ambos apoyos horizontales asimilables a simples apoyos y a él corresponde (65.2) un momento flector por unidad de altura de muro igual a

$$M_h = 0,12 p H^2 \quad [65.31]$$

donde  $p$  es la presión de acuerdo con los diagramas de la figura 65-2 y  $H$  es la distancia vertical entre apoyos del muro. Este momento produce tracciones en las caras del trasdós de los muros y puede considerarse constante en toda la altura del muro. En sentido longitudinal puede admitirse que se anula a una distancia de la esquina igual a  $H$ .

### 65.10 ESQUEMAS DE ARMADO

En las figuras 65-20a) y b) se indican esquemas estándar de armado según la posición de la zapata.

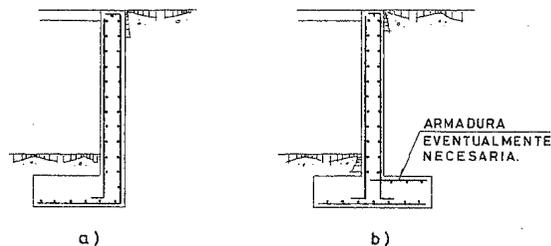


Figura 65-20

### BIBLIOGRAFÍA

- (65.1) CALAVERA, J. "Muros de Contención y Muros de Sótano", 2ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1990.
- (65.2) CALAVERA, J. "Cálculo de Estructuras de Cimentación", 3ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1991.

## CAPÍTULO 66

### PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LOS EDIFICIOS DE GRAN ALTURA

#### 66.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Al margen de las consideraciones estéticas, sociales e incluso antropológicas que el tema de los edificios de gran altura plantea, y ciñéndonos a los aspectos puramente técnicos, es sorprendente la velocidad de su desarrollo, tan pronto estuvieron disponibles los métodos para el cálculo de las complejas estructuras necesarias y los materiales adecuados.

Es, naturalmente, muy convencional el definir la frontera a partir de la cual un edificio debe ser considerado como "alto". La referencia (66.1) establece esta frontera en las diez plantas <sup>1</sup>.

El desarrollo histórico se resume, a grandes rasgos, en la figura 66-1.

Para la debida valoración de lo que el desarrollo del cálculo estructural de estos edificios ha tenido de audacia, es bueno recordar que la primera publicación de H. CROSS, sobre su método, es de 1930 (66.2).

El estado actual puede evaluarse a la vista de la tabla T-66.1, que recoge los edificios de mayor altura, con indicación de la misma, de su emplazamiento y del tipo de estructura empleado.

Como puede verse, en general, los edificios de alturas excepcionales se han proyectado tradicionalmente con estructura metálica, pero el hormigón, a través del empleo de hormigón de alta resistencia, ocupa ya el primer lugar.

<sup>1</sup> El "COUNCIL ON TALL BUILDINGS AND URBAN HABITAT" define como "edificio alto" el que tiene diez o más plantas. Recientemente se tomó también el acuerdo de medir la altura de los edificios hasta la cara superior del elemento resistente más alto.

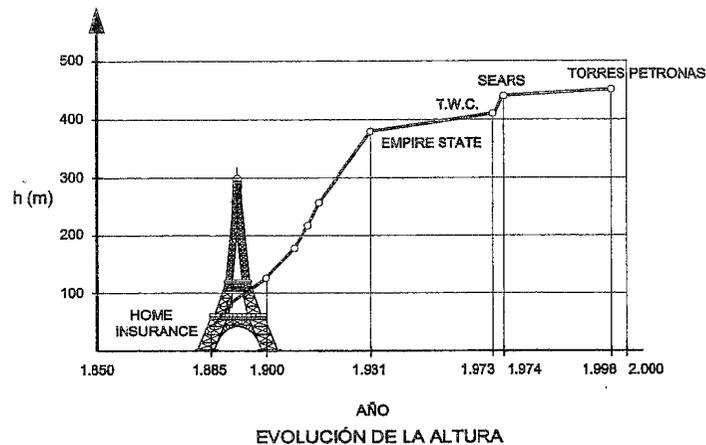


Figura 66-1

TABLA T-66.1 - LOS DIEZ EDIFICIOS MÁS ALTOS (1998)

Puesto	Edificio	Ciudad	Año de terminación	N.º de pisos	Material	Altura
1	Petronas Tower	Kuala Lumpur	1997	88	Hormigón	452 m
2	Sears Tower	Chicago	1974	110	Metálica	442 m
3	Jin Mao Building	Shangai	prev. 1998	88	Mixta	421 m
4	World Trade Center	New York	1972	110	Metálica	417 m
5	Plaza Rakyat	Kuala Lumpur	prev. 1998	77	Hormigón	382 m
6	Empire State Building	New York	1931	102	Metálica	381 m
7	Central Plaza	Hong Kong	1992	78	Hormigón	374 m
8	Bak of China Tower	Hong Kong	1989	70	Mixta	369 m
9	T&C Tower	Kaoshiung	prev. 1997	85	Metálica	348 m
10	Amoco Building	Chicago	1973	80	Metálica	346 m

(\*) En Europa, el edificio más alto es el Messeturm, de 70 pisos y 260 m de altura, situado en Frankfurt. Es de estructura de hormigón y está destinado a oficinas.

Empleando la palabra edificio en sentido extenso, el más alto del mundo es la CNR TOWER de Toronto (ver fotografía 1-8), con 553 m de altura. Se trata de una torre de comunicaciones. Fuera del campo de los edificios, la construcción más alta es la antena de radio Varsovia, en PLOCK, con 645 m de altura, en estructura metálica con vientos. Esta estructura sufrió un accidente hace pocos años en la zona superior y está en discusión su posible reconstrucción.

En relación con la dualidad estructura metálica-estructura de hormigón, la competencia es muy dura. Una ventaja que habitualmente se atribuye al acero es la de que los pilares metálicos ocupan menos área en planta que los de hormigón armado.

Sin embargo, la comparación debe realizarse correctamente. En la figura 66-2 a) y b), si el pilar metálico va a quedar visto, la comparación es directa. Si va a ir chapado, es necesario comparar las dimensiones definitivas y no las de los perfiles metálicos.

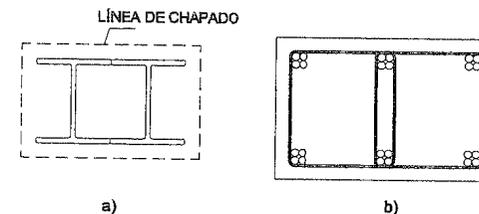


Figura 66-2

Como los pilares de hormigón son más baratos que los metálicos, puede sacrificarse parte de la economía con el empleo de cuantías altas y hormigones de alta resistencia. Ello conduce a pilares de gran capacidad de carga, con escuadrías pequeñas. El pilar de la figura 63-3, construido ya hace muchos años en Viena, tiene una carga de servicio de 21.000 kN.

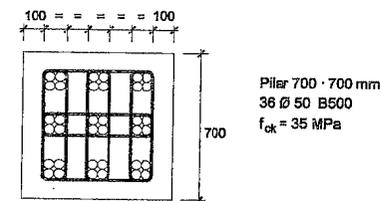


Figura 66-3

El edificio de gran altura ha planteado una problemática específica desde múltiples puntos de vista: su impacto estético, a pesar de las bellísimas realizaciones conseguidas, ha encontrado enemigos furibundos (66.3). Su influencia sobre los seres humanos que los habitan, aunque sea un tema insuficientemente estudiado, no es asunto desdeñable. Véase para una iniciación al tema el libro de la referencia (66.4). El aspecto estructural ha sido quizá el más tratado y la figura del ingeniero norteamericano FAZUR R. KHAN, fallecido hace pocos años, destaca como una de las más trascendentes en el desarrollo de los edificios de gran altura. También la albañilería y las instalaciones de todo tipo, sin olvidar la protección contra incendios, han requerido estudios muy especiales (66.1).

Un aspecto que no debe olvidarse es el de los particularísimos problemas que este tipo de edificios plantea desde el punto de vista de la seguridad de sus ocupantes frente a acciones criminales. Véase (66.5) y (66.6).

Sobre el futuro de estos y otros tipos de edificios, véase TASSIOS (66.7).

## 66.2 ACCIONES

En sentido estricto, el que un edificio sea de gran altura no motiva la actuación de acciones diferentes. Sin embargo, aparecen dos aspectos nuevos:

- Dada la flexibilidad que generalmente tienen estos edificios, algunos aspectos de escasa importancia en otras construcciones tienen aquí una importancia grande. Por ejemplo, comportamiento aerodinámico, frecuencia de vibración, etc.
- La trascendencia económica de la evaluación de las acciones es aquí muy acusada. Un estudio aerodinámico en modelo, o al menos un estudio profundo de la bibliografía especializada, pueden conducir a ahorros importantes. La reducción de sobrecargas, en función del número de plantas, merece siempre en estos casos un estudio especial <sup>1</sup>.

Análogamente, un estudio específico de los valores de los coeficientes  $\gamma_f$  adecuados para cada tipo de acciones puede resultar interesante.

- El proyecto de un edificio de gran altura es siempre una lucha contra el peso. Por tanto, la búsqueda de la ligereza es una norma general, no sólo en la estructura sino también en las fachadas. El muro cortina y en general las fachadas ligeras se imponen, además de entrañar otras ventajas de las que hablaremos en el apartado siguiente.

## 66.3 EL PROBLEMA DE LA DEFORMABILIDAD

Es siempre un problema que debe ser considerado con un cuidado especial en los edificios de gran altura.

De hecho, la deformabilidad produce dos tipos de problemas:

### a) Deformación lateral

Afecta a la estabilidad, según vimos en el capítulo 45, al tratar el estado último de pandeo, pero también afecta a los tabiques y sobre todo a las fachadas por problemas de fisuración. Una forma natural de respuesta ante el problema ha sido la evolución hacia fachadas flotantes y, sobre todo, hacia fachadas ligeras. Sin embargo, aunque esto ha eliminado uno de los inconvenientes, la fisuración de fachadas ha reducido la rigidez del edificio al perder la colaboración de las antiguas fachadas pesadas, con lo que las flechas laterales aumentan.

No existen normas concretas pero, generalmente, se considera que la flecha en coronación del edificio debe limitarse a  $\frac{L}{700}$  ó  $\frac{L}{1000}$ , siendo  $L$  su altura.

### b) Deformaciones verticales

Los problemas de flechas en forjados y vigas son sustancialmente idénticos a los de cualquier edificio y fueron ya expuestos en el capítulo 48. Sin embargo, en edificios de gran altura, aparecen otros específicos como:

<sup>1</sup> Hoy día un estudio aerodinámico de un edificio no debería omitir la valoración de la influencia de los otros edificios que rodean al estudiado.

- b-1) Diferencia de deformaciones debidas a causas térmicas entre pilares de fachada y pilares interiores.

La figura 66-4 refleja una situación de este tipo producida por una dilatación diferencial por efecto del sol entre un pilar exento de fachada  $P$  y un núcleo  $N$  generalmente en ambiente con aire acondicionado. El efecto normalmente se acentúa en las plantas altas y, de no ser tenido en cuenta, produciría daños en la estructura.

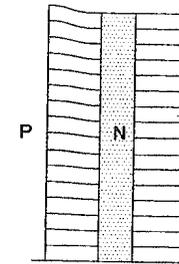


Figura 66-4

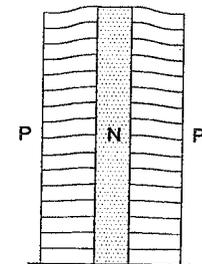


Figura 66-5

- b-2) Diferencia de acortamientos elásticos y plásticos entre unos pilares y otros y, sobre todo, entre pilares y pantallas o núcleos, solicitados generalmente a tensiones muy diferentes.

La figura 66-5 muestra un caso de esta clase, en el que los pilares  $P$  han sufrido acortamientos considerablemente mayores que el núcleo  $N$ .

- b-3) Diferencia de asentos del terreno en pilares y pantallas o núcleos. Véase (66.7).

## 66.4 VIBRACIONES

En edificios de gran altura, la oscilación debida al viento puede producir sensaciones molestas para las personas y, por lo tanto, este problema debe ser considerado en la etapa de proyecto.

La preocupación por el tema es reciente, pero muy grande. Véase el libro de la referencia (66.8) para el estudio de este aspecto y lo dicho en 26.4.2.

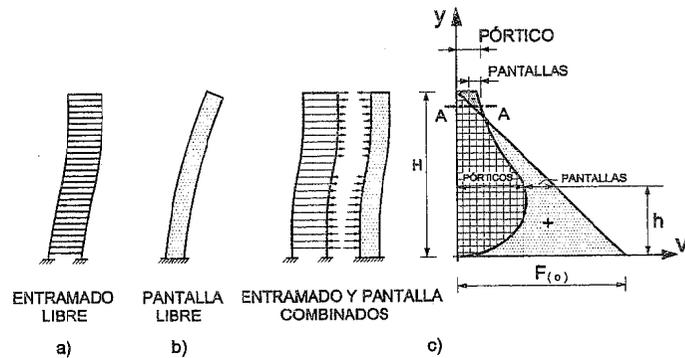
## 66.5 LOS TIPOS ESTRUCTURALES

Como iniciación al tema, ya en los capítulos 1, 22, 23 y 24 introdujimos los conceptos de pantallas y núcleos y de la colaboración de los entramados con las pantallas y núcleos (66.9), (66.10). Véase también (66.11), (66.12), (66.13).

Recordamos de nuevo los elementos esenciales (fig. 66-6).

a) Entramados (fig. 66-6 a))

Su deformación es debida fundamentalmente a los esfuerzos cortantes en pilares en cada planta.



DEFORMACIONES DE PANTALLAS Y ENTRAMADOS (SEGÚN KHAN Y SBAROUNIS)  
Figura 66-6

b) Pantallas (fig. 66-6 b))

Su deformación es fundamentalmente la de una ménsula.

c) Núcleos

Si no tienen aberturas en sus paredes, esencialmente su comportamiento es el de una ménsula y, por tanto, se comportan como las pantallas.

La compatibilidad establecida por los forjados origina la transferencia de esfuerzos indicada en la figura 66-6 c) y que ya discutimos en detalle en el Capítulo 23.

Si el núcleo tiene aberturas en sus paredes, a medida que éstas van aumentando, el comportamiento del núcleo se va acercando al del entramado.

La figura 66-7, tomada de la referencia (66.15) refleja una distribución de esfuerzos axiales en un núcleo con múltiples aberturas.

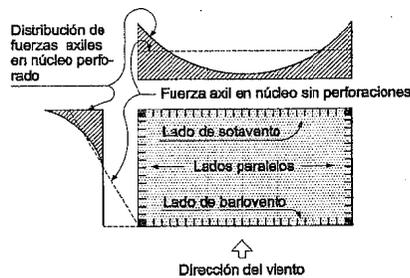


Figura 66-7

La figura 66-8, tomada de la misma referencia, indica en planta esquemas típicos de combinación de los distintos sistemas.

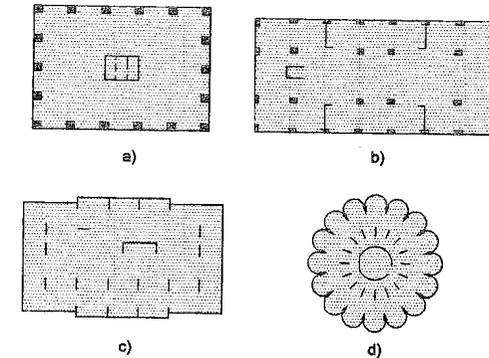


Figura 66-8

El indicar los sistemas recomendables para cada altura es problema complejo, pues está ligado a muchas variables, bastantes de ellas de tipo económico. En definitiva, el problema es un problema de optimización de proyecto y así debería ser abordado.

La figura 66-9 indica, según KHAN, las combinaciones en su opinión más adecuadas según la altura.

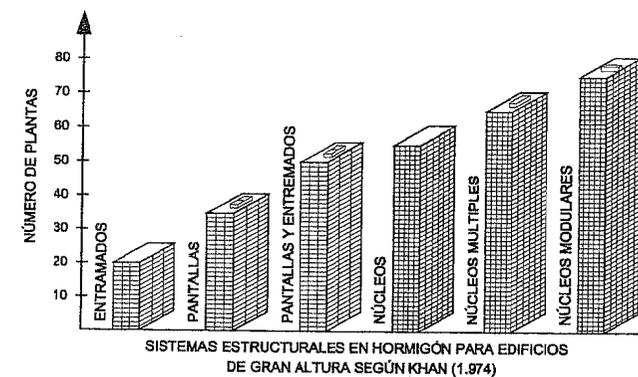


Figura 66-9

## 66.6 OTROS ASPECTOS ESTRUCTURALES

Dentro del problema general de aligeramiento de la estructura, conviene destacar lo siguiente:

### a) Forjados

Los tipos aligerados se imponen y entre ellos se indican algunos en la figura 66-10.

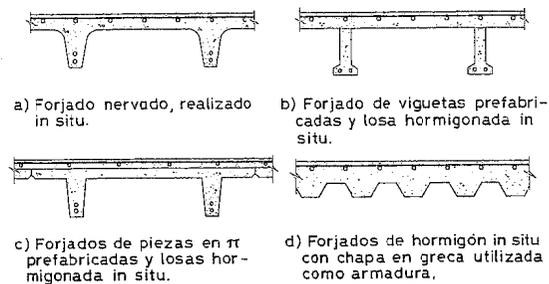


Figura 66-10

### b) Pilares

La figura 66-11 indica secciones típicas.

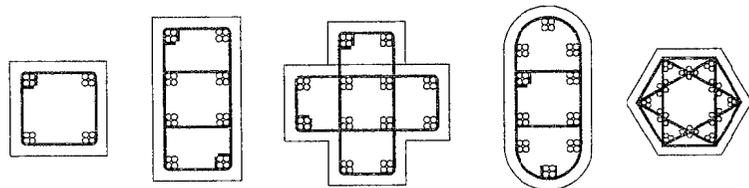


Figura 66-11

El empleo de grupos de barras de gran diámetro es obligado en estos casos, al menos en las plantas medias y bajas.

Dos publicaciones recientes sobre el tema de edificios altos figuran en las referencias (66.16) y (66.17).

## BIBLIOGRAFÍA

- (66.1) "Tall building. Systems and concepts". American Society of Civil Engineers. 1980.
- (66.2) CROSS, H. "Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments". Proceedings of the American Society of Civil Engineers. March 1930. Idem. May 1932.
- (66.3) "Philosophy of tall buildings". American Society of Civil Engineers. 1978.
- (66.4) CONWAY, D.J. "Human response to tall buildings". Dowden, Hutchinson, Ross Inc. Pennsylvania. 1977.
- (66.5) "Building Security". American Society for Testing and Materials. Special Publicacion. STP-729. Philadelphia. 1981.

- (66.6) UNDERWOOD, G. "The security of buildings". The Architectural Press. London. 1984.
- (66.7) TASSIOS. T.P. "Concrete structures for the year 2000". IABSE Symposium. Paris-Versailles. 1987.
- (66.8) Conferencia regional sobre edificios de altura. ASCE-IABSE. Madrid. 1973.
- (66.9) RECUERO, A.; GUTIÉRREZ JIMÉNEZ, J.P. "Análisis de edificios de altura sometidos a acciones horizontales: Sistemas planos". Monografía 338 del Instituto Eduardo Torroja. Noviembre 1976.
- (66.10) MARTORANO, L.D.; AGUIRRE DE YRAOLA, F. "Sistemas de rigidización de edificios de altura frente a acciones de viento y sismo". Monografía 342 del Instituto Eduardo Torroja. Mayo 1977.
- (66.11) "Advances in tall buildings". Council on Tall Buildings and Urban Habitat. Van Nostrand. New York. 1986.
- (66.12) SHAKAR NAIR, R. "High rise building". Third International Conference on Tall Buildings. 1986.
- (66.13) PETERS, T.F. y otros. "History of tall buildings". Third International Conference on Tall Buildings. 1986.
- (66.14) MEHTA, J.B. "High-rise buildings". Skyline. 1978.
- (66.15) "Response of buildings to lateral forces". ACI 442 R-71. American Concrete Institute. Detroit. 1971.
- (66.16) "TALL BUILDINGS: 2000 AND BEYOND". Fourth World Congress. Nov. 1990. Hong Kong Editors L.S. Beedle and D.B. Rice. Council on Tall Buildings and Urban Habitat.
- (66.17) VISWANATH, H.R.; TOLLOCZKO, J.J.A.; CLARKE, J.N. "Multi-purpose high-rise towers and tall building". Proceedings of the Third International Conference "Conquest of Vertical Space in de 21 st Century". London. 1997.

## CAPÍTULO 67

### PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LAS ESTRUCTURAS SITUADAS EN ZONAS SÍSMICAS

#### 67.1 INTRODUCCIÓN

En lo que sigue entendemos por estructuras situadas en zonas sísmicas aquellas que, de acuerdo con la Norma NCS-94 "Norma de construcción sismorresistente. Parte General y Edificación)" (67.1) <sup>1</sup>, siendo de importancia "normal" o "especial" de acuerdo con dicha norma están situadas en zonas en las que la aceleración sísmica de cálculo,  $a_c$ , sea igual o mayor que 0,06 g. De acuerdo con NCS-94 la clasificación, en cuanto a importancia, de las construcciones es la siguiente:

#### **De moderada importancia**

Aquellas con probabilidad despreciable de que su destrucción por el terremoto pueda ocasionar víctimas, interrumpir un servicio primario, o producir daños económicos significativos a terceros.

#### **De normal importancia**

Aquellas cuya destrucción por el terremoto pueda ocasionar víctimas, interrumpir un servicio para la colectividad o producir importantes pérdidas económicas, sin que en ningún caso se trate de un servicio imprescindible ni pueda dar lugar a efectos catastróficos.

---

<sup>1</sup> Para el caso de Puentes de Carreteras la Instrucción IAP-98 (67.22) contiene especificaciones especiales.

## De especial importancia

Aquellas cuya destrucción por el terremoto pueda interrumpir un servicio imprescindible o dar lugar a efectos catastróficos. En este grupo se incluyen, al menos, las siguientes construcciones:

- Hospitales, centros o instalaciones sanitarias de cierta importancia.
- Edificios e instalaciones básicas de comunicaciones, radio, televisión, centrales telefónicas y telegráficas.
- Edificios para centros de organización y coordinación de funciones para casos de desastre.
- Edificios para personal y equipos de ayuda, como cuarteles de bomberos, policía, fuerzas armadas y parques de maquinaria y ambulancias.
- Las construcciones para instalaciones básicas de las poblaciones como depósitos de agua, gas, combustibles, estaciones de bombeo, redes de distribución, centrales eléctricas y centros de transformación.
- Las infraestructuras básicas como puentes y principales vías de comunicación de las poblaciones.
- Edificios e instalaciones vitales de los medios de transporte en las estaciones de ferrocarril, aeropuertos y puertos.
- Edificios e instalaciones industriales como las contempladas en el Real Decreto 886/1988 y las que alberguen materias tóxicas, inflamables o peligrosas.
- Las grandes construcciones de Ingeniería Civil como centrales nucleares o térmicas, presas, etc.
- Las construcciones catalogadas como monumentos históricos o artísticos, o bien de interés cultural o similar, por los Órganos competentes de las Administraciones Públicas.
- Las construcciones que así se consideren en el planeamiento urbanístico y documentos públicos análogos <sup>1</sup>.

La aplicación de la norma no es obligatoria para construcciones con estructura de hormigón en los casos siguientes:

- En las construcciones de moderada importancia.
- En las demás construcciones cuando la aceleración sísmica de cálculo,  $a_c$ , sea inferior a  $0,06 g$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad.

La figura 67.1 contiene el Mapa de Peligrosidad Sísmica que muestra para cada punto del territorio español el valor de la **aceleración sísmica básica**,  $a_b$ , en función de la aceleración  $g$  de la gravedad, en la superficie del terreno y para un período de retorno de 500 años.

<sup>1</sup> Deberían considerarse en este grupo aquellas construcciones, que aún siendo de escasa importancia técnica, su destrucción pueda impedir el paso y llegada de los equipos de socorro médico, bomberos, policía, etc. debido al trazado general de accesos de la zona.

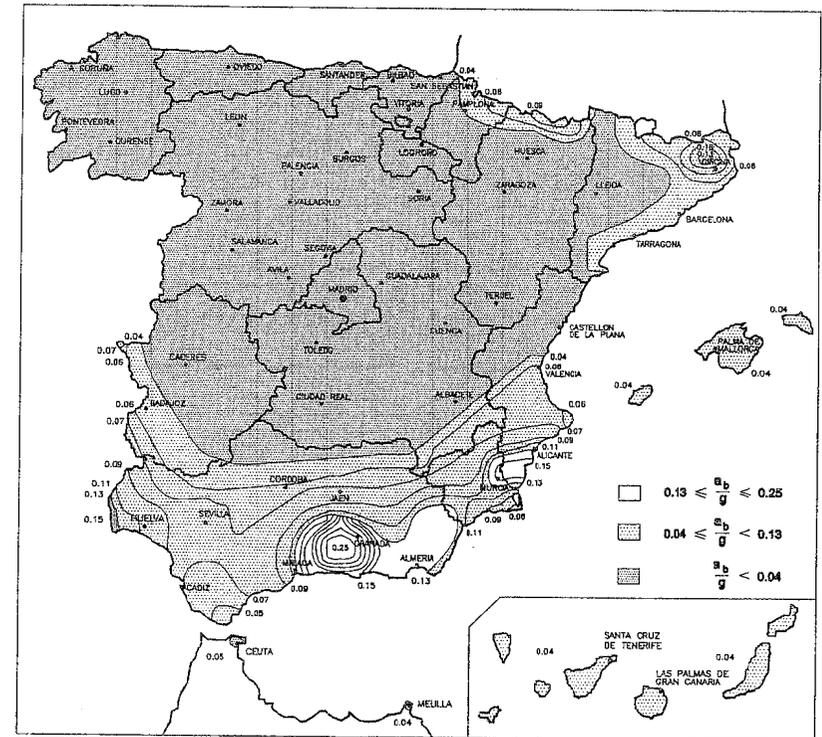


Figura 67-1

La aceleración sísmica de cálculo,  $a_c$ , viene dada por

$$a_c = \rho a_b \quad [67.1]$$

donde  $\rho$  es el coeficiente de riesgo, función del período  $t$  de vida en años para el que se proyecta la construcción y viene dado por

$$\rho = \left[ \frac{t}{50} \right]^{0,37} \quad [67.2]$$

debiendo adoptarse

$t \geq 50$  años para construcciones de normal importancia ( $\rho = 1$  para  $t = 50$  años).

$t \geq 100$  años para construcciones de especial importancia ( $\rho = 1,3$  para  $t = 100$  años).

La información que aquí se contiene está basada fundamentalmente en dicha Norma, pero dando preferencia en lo específico de los aspectos estructurales al Anejo 12 de EHE "Requisitos especiales recomendados para estructuras sometidas a acciones sísmicas" y se han tenido también en cuenta los trabajos del C.E.B. (67.2) y del ACI (67.3). Las referencias (67.4) a (67.19) contienen también información importante sobre este asunto.

## 67.2 DUCTILIDAD

Una cualidad esencial de una estructura situada en zona sísmica es la de poseer una ductilidad suficiente para disipar una gran cantidad de energía en su deformación. Ya en el Capítulo 17 tratamos este tema. El MODEL CODE FOR SEISMIC DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES del C.E.B. (67.2) define esta propiedad como la "capacidad para disipar cantidades importantes de energía mediante un comportamiento anelástico bajo deformaciones cíclicas de gran amplitud sin pérdida sustancial de resistencia".

En el Capítulo 32 vimos en qué combinaciones de acciones se introduce la acción sísmica y con qué coeficientes de seguridad y quedó claro que la comprobación se establecía únicamente frente a estados límite últimos.

La aptitud de una estructura para soportar acciones sísmicas depende esencialmente de tres aspectos:

- De las acciones, coeficientes de combinación y coeficientes de seguridad a considerar. Este punto está cubierto conjuntamente por la Norma NCS-94 y por la Instrucción EHE.
- De la configuración de la estructura. Este punto queda bajo el criterio y la responsabilidad del proyectista y lo trataremos en el apartado 67.3. La Norma NCS-94 da también información sobre ello.
- De los aspectos concretos de cálculo y de los detalles constructivos. El tema será expuesto en 67.4.

El proyectista debe tener la idea clara de que tan importante como el cálculo en sí es la concepción general de la estructura y el diseño adecuado de los detalles constructivos.

## 67.3 CONFIGURACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN

El proyectista, cuando proyecta una construcción en zona sísmica, debe estar claramente consciente, desde las etapas preliminares del anteproyecto, de la importancia que la forma elegida va a tener en el cálculo de la estructura y en su posterior funcionamiento real.

En este sentido se entiende que una construcción puede clasificarse, según su configuración, en dos grandes grupos:

### Configuración regular

Corresponde a la de aquellas construcciones que cumplen simultáneamente las condiciones siguientes:

- La planta tiene dos ejes ortogonales de simetría, en los que orientan los elementos resistentes a sismo. Si existen ejes de simetría que superan el 25% de las dimensiones totales. (67.4)
- En cualquier planta, la distancia en dirección ortogonal considerada entre el centro de masas y el de rigideces, *radio de resiliencia*, definido como la raíz cuadrada de la relación entre la rigidez torsional a la rigidez traslacional de la planta. (Véase el Capítulo 21, 67.4]
- La distribución de masas y rigideces son aproximadamente iguales a lo largo de la altura.
- En estructuras de entramado, la relación entre la suma de los esfuerzos cortantes últimos de todos los elementos y la suma de los esfuerzos cortantes de cálculo no difiere en más del 20% en cualquier planta.
- En caso de un cambio a lo largo de la altura, éste, a cualquier nivel, no es mayor del 10% de la dimensión en planta en esa dirección. Esta cláusula no rige si el cambio se realiza en el 15% inferior de la altura total del edificio.

### Configuración irregular

Se entiende por tal la que no es regular, de acuerdo con las condiciones anteriormente expuestas.

La ventaja de una configuración regular es que permite, si el edificio no supera los 80 m de altura y su período fundamental de oscilación no supera los 2 segundos, emplear métodos de cálculo estáticos. En otro caso deben emplearse métodos dinámicos.

## 67.4 MATERIALES

En zonas sísmicas EHE recomienda el uso de acero B 400 SD, normalizado en UNE 36065:98 EX (67.20) (Véase el Capítulo 32).

## 67.5 DETALLES CONSTRUCTIVOS

### 67.5.1 CIMENTACIONES

Véase lo expuesto para las piezas de atado según la zona sísmica en el Capítulo 63.

### 67.5.2 MUROS DE CONTENCIÓN

Las especificaciones de NCS-94 son muy simplificadas. Véase (67.21) y (67.22) para una información más detallada.

### 67.5.3 PIEZAS EN FLEXIÓN SIMPLE O FLEXIÓN COMPUESTA CON FLEXIÓN DOMINANTE

Se entiende que son aquellas en que  $N_d \leq 0,10 A_c \cdot f_{cd}$ , siendo  $A_c$  la sección bruta de hormigón y  $N_d$  el esfuerzo de cálculo de compresión.

a) *Condiciones geométricas*

Salvo estudio especial, se cumplirán las siguientes:

- El ancho  $b_w$  no será inferior a 250 mm ni superior al valor indicado en la figura 67-2.

Lo anterior se establece para asegurar una transmisión correcta de momentos entre viga y pilar.

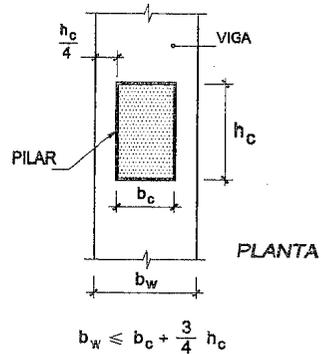


Figura 67-2

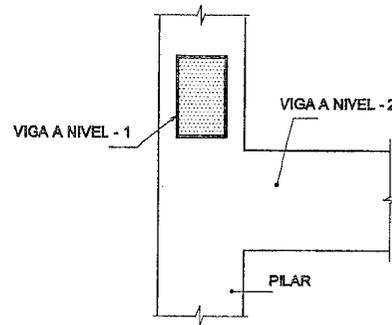


Figura 67-3

- La relación  $h/b$  de ancho a canto de las vigas no será superior a 3, con objeto de reducir el riesgo de inestabilidad lateral.
- La relación  $l/h$  de luz a canto no será inferior a 4. La razón es que las piezas cortas tienen un comportamiento bajo cargas cíclicas poco conocido y muy diferente de las piezas largas habituales.
- La excentricidad del plano medio de una viga respecto al del pilar en que apoya no será superior a  $\frac{b_c}{4}$  (fig. 67-2).

- Los nudos del tipo indicado en la figura 67-3 son inadecuados para estructuras en zonas sísmicas.

La experiencia ha probado esto repetidas veces, incluso bajo sismos de intensidad media.

b) *Condiciones para la armadura longitudinal*

- La armadura *continua* de tracción en cada cara (superior e inferior) no debe ser inferior a la correspondiente a una cuantía geométrica

$$\rho_{min} = \frac{14}{f_{yk}} \quad [67.3]$$

ni menor que  $2 \phi 16$

ni mayor que

$$\rho_{max} = \frac{7}{f_{yk}} \quad [67.4]$$

( $f_{yk}$  en N/mm<sup>2</sup>) ni superior a la cuantía geométrica del 2,5%.

La condición [67.3] se establece por razones de rotura agria y la [67.4] por razones de ductilidad.

- En cualquier zona de posible formación de una rótula plástica, debe existir una armadura de compresión de capacidad mecánica no inferior a la mitad de la de tracción <sup>2</sup>. Con ello a la vez que se garantiza una adecuada ductilidad se dota a la estructura de capacidad frente a la inversión de signo de los esfuerzos.
- Al menos el 25% de la armadura del extremo más armado de la pieza debe ser continua en toda la luz <sup>3</sup>.
- En vigas T o L, en general, se considerará para momentos negativos sólo la armadura contenida en el ancho de la viga más cuatro veces el canto del ala (fig. 67-4). Si el pilar es de fachada y no hay viga de fachada, sólo se considerará la armadura situada dentro del ancho del pilar.
- En cualquier caso el 75% de la armadura considerada pasará a través del pilar o se anclará en él.

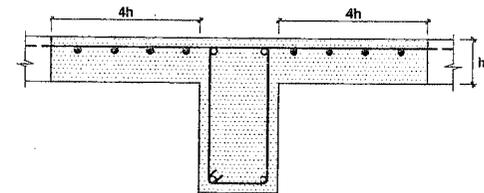


Figura 67-4

Las longitudes de anclaje y solapo de las armaduras se aumentarán en  $10 \phi$  respecto a los requisitos del Capítulo 44. Los solapos deben alejarse de las zonas donde se prevea la posible formación de rótulas plásticas, en particular en las situadas a menos de dos cantos de los extremos <sup>4</sup>.

- 1  $2 \phi 14$  si no se requiere nivel de ductilidad muy alto.
- 2 Un tercio si no se requiere nivel muy alto de ductilidad.
- 3 20% si no se requiere nivel muy alto de ductilidad.
- 4 Una recomendación importante en zonas sísmicas es que, si la armadura real es superior a la necesaria, la longitud de anclaje **debe corresponder a la real**, para que se agote a tracción y no por anclaje ya que esa forma de agotamiento sería frágil.

c) *Condiciones para la armadura transversal*

A efectos de lo que sigue y con el fin de garantizar la disipación de energía mediante la formación de rótulas plásticas, se definen "zonas críticas" en las vigas. En ellas, y con el fin de confinar el hormigón, garantizar la adherencia, evitar el pandeo de armaduras y mejorar la resistencia a corte, se establecen requisitos especiales de armadura transversal.

Se entienden como zonas críticas las siguientes:

- Dos cantos a partir de la cara del pilar inferior o de la viga de apoyo.
- Dos cantos a cada lado de un punto donde se pueda producir una rótula plástica.
- Toda zona donde el cálculo hace necesario disponer armadura de compresión.

La capacidad resistente de las secciones a cortante será al menos un 25% superior de la requerida por el cortante de cálculo debido a la acción sísmica.

En estas zonas se dispondrán estribos de diámetro no inferior a 6 mm, con separación máxima no superior a:

- $\frac{h}{4}$ .
- Seis veces el diámetro de la barra longitudinal más fina <sup>1</sup>.
- 24 veces el diámetro de los estribos.
- 150 mm <sup>2</sup>

El primer estribo se dispondrá como máximo a 50 mm de la cara del pilar.

Las figuras 67-5 y 67-6 resumen los requisitos para los niveles de ductilidad muy alto y alto respectivamente.

67.5.4 PIEZAS EN COMPRESIÓN O FLECCIÓN COMPUESTA

Se entiende que son aquellas en que  $N_d > 0,10 A_c f_{cd}$ . En general este caso corresponde a pilares. La experiencia recogida en terremotos indica la *extremada vulnerabilidad de los pilares de esquina*, que deberán por tanto ser objeto de atención especial.

a) *Condiciones geométricas*

Salvo estudio especial, se cumplirán las siguientes:

- La dimensión transversal mínima será de  $b = 300 \text{ mm}$ .
- La relación máxima  $l/b$  será 25, siendo  $l$  la luz de la pieza.

<sup>1</sup> Ocho veces si no se requiere nivel de ductilidad muy alto.

<sup>2</sup> 200 mm si no se requiere nivel de ductilidad muy alto.

NIVEL DE DUCTILIDAD MUY ALTO

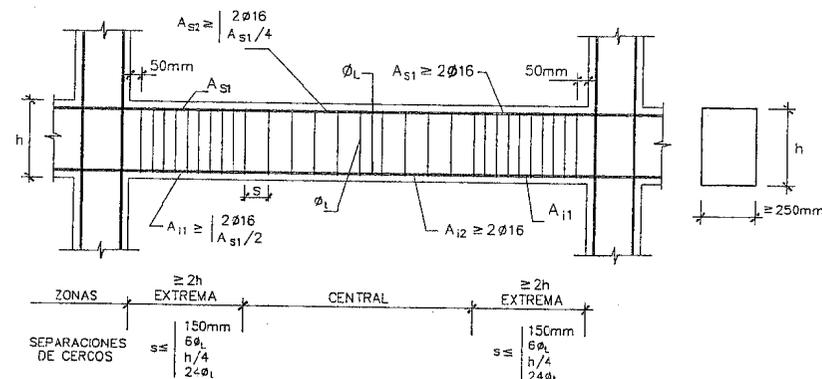


Figura 67-5

NIVEL DE DUCTILIDAD ALTO

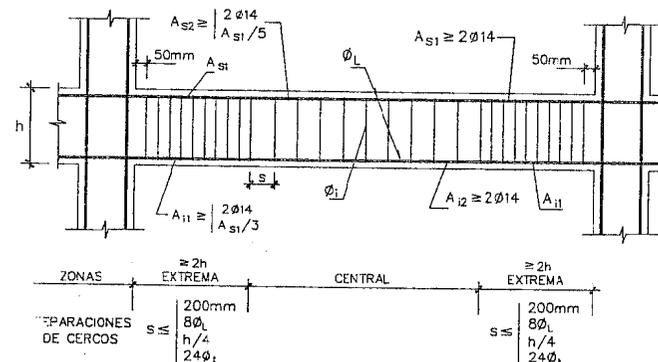


Figura 67-6

b) *Armadura longitudinal*

La cuantía geométrica no será inferior a 0,01 ni superior a 0,06, incluidas las zonas de solapo y estará constituida por tres barras en cada cara con separación no superior a 150 mm.

Para anclajes y solapes rige lo expuesto en 67.5.3.b).

c) *Armadura transversal*

La capacidad resistente de las secciones a cortante será al menos un 25% superior a la requerida para el cortante de cálculo debido a la acción sísmica.

Se definen también las zonas críticas siguientes a partir de la cara de la viga o forjado que enlaza la extremidad de la pieza.

Tales zonas tendrán como longitud la mayor de:

- La mayor dimensión transversal de la sección.
- Un sexto de la luz libre de la pieza.

Si los recuadros entre vigas y pilares están rellenos de fábrica resistente, toda la longitud del pilar se considerará zona crítica.

En las zonas críticas se dispondrán estribos a la menor separación de las siguientes:

- 6 veces el diámetro mínimo de la armadura longitudinal <sup>1</sup>.
- Un cuarto de la menor dimensión transversal de la pieza <sup>2</sup>.
- 100 mm <sup>3</sup>. (Ver figuras 67-7 y 67-8).

A todos los efectos los nudos se considerarán zonas críticas.

### NIVEL DE DUCTILIDAD MUY ALTO

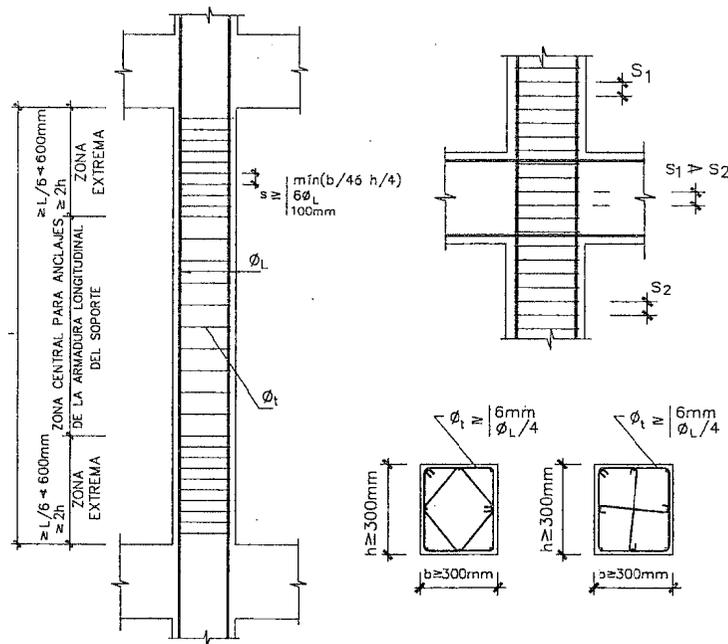


Figura 67-7

- 1 8 veces si no se requiere nivel de ductilidad muy alto.
- 2 Un tercio si no se requiere nivel de ductilidad muy alto.
- 3 150 mm si no se requiere nivel de ductilidad muy alto.

### NIVEL DE DUCTILIDAD ALTO

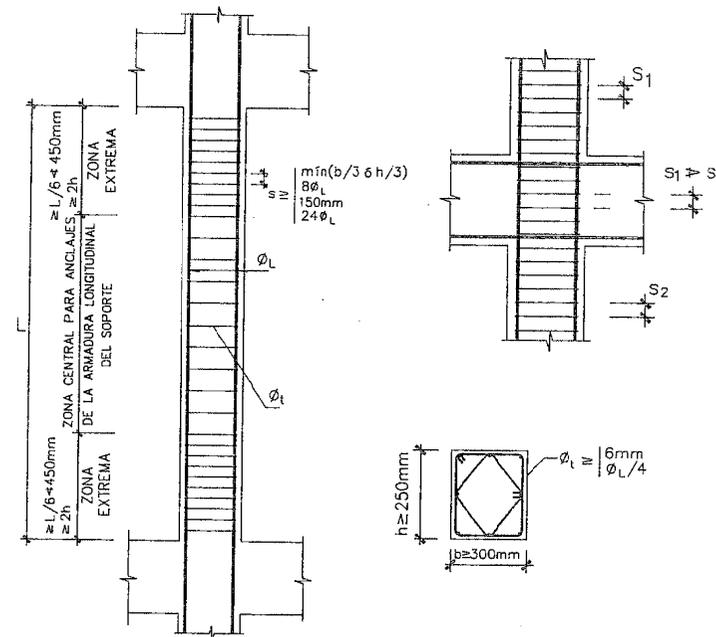


Figura 67-8

### 67.5.5 NUDOS

Véase el Anejo 2. Además de lo que allí se indica rigen los mínimos de 67.5.4.c).

En regiones en las que la aceleración sísmica de cálculo sea igual o mayor que 0,16 g, los nudos deben dimensionarse de forma que

$$\frac{V_d}{A_n} \leq k \sqrt{f_{ck}} \quad [67.5]$$

donde  $A_n$  es el área de la sección transversal del nudo y

$k = 1,55$  para nudos confinados por las cuatro caras

$k = 1,16$  para nudos confinados por tres caras o por dos caras opuestas

$k = 0,93$  para otros casos

### 67.5.6 MUROS Y PANTALLAS

Deberán cumplir lo siguiente:

#### a) Condiciones geométricas

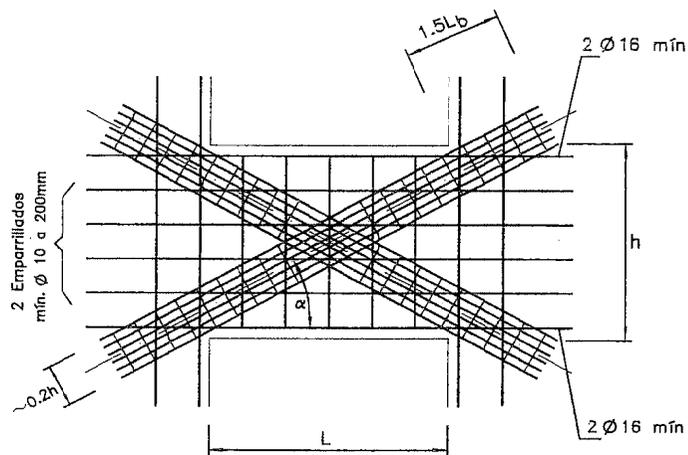
- Espesor no menor de 150 mm.
- Conviene evitar distribuciones irregulares de huecos, salvo que se haga un estudio especial.

#### b) Armadura longitudinal

- La cuantía no será inferior al 2,5‰, ni superior al 4‰.
- El muro debe llevar emparrillado ortogonal en ambas caras.
- El diámetro no superará al décimo del espesor del muro.
- La separación entre barras no será superior a 300 mm.
- Conviene evitar la concentración de solapes y su disposición en zonas de posible formación de rótulas plásticas.
- En las juntas de hormigonado, la cuantía geométrica vertical debe ser

$$\rho_v = \frac{0,28 \sqrt[3]{f_{ck}^2} - 0,7 \frac{N_d}{A_c}}{f_{yk}} \leq 0,025 \quad [67.6]$$

(unidades en N y mm).



-LOS PAQUETES DIAGONALES HAN DE LLEVAR ESTRIBOS A SEPARACIÓN MÁXIMA DE 100 mm.

Figura 67-9

#### c) Armadura transversal

Los requisitos de cuantía, separación y diámetro de armaduras serán los mismos que para la armadura longitudinal.

Para aceleraciones de cálculo  $a_c \geq 0,16$  g, deben además cumplirse los siguientes requisitos:

- En los bordes de la pantalla se dispondrá una zona confinada por cercos, en un ancho de al menos la quinta parte del ancho de la pantalla o dos veces su espesor (lo que sea menor), con cercos de diámetro no inferior a 8 mm.
- La separación de estos cercos no será mayor que el tercio del espesor de pantalla ni 10 veces el diámetro de la barra longitudinal más fina de las situadas en la zona confinada.

#### d) Dinteles de conexión

Se organizarán de acuerdo con la figura 67-9.

Los estribos en las armaduras diagonales no superarán la separación de 100 mm y en lo restante se regirán por lo especificado en 67.4.3.c). El anclaje de las armaduras longitudinales se incrementará en el 50% respecto a las longitudes normales.

### 67.5.7 REGLAS ADICIONALES DE ANCLAJE Y SOLAPE DE ARMADURAS

Con el fin de asegurar un comportamiento adecuado bajo cargas cíclicas alternadas se seguirán las recomendaciones que a continuación se indican.

En todo caso las barras, salvo estudio especial, se considerarán siempre en posición II de adherencia y el coeficiente  $k = \frac{A_{s,nec}}{A_{s,real}}$  se considerará siempre igual a 1 al determinar las longitudes de anclaje y/o solape.

#### a) Piezas en flexión

- Las armaduras de vigas tanto superiores como inferiores en las zonas de momentos negativos deben ser continuas a través del pilar.
- En otro caso, como en pilares de fachada por ejemplo, deben anclarse de acuerdo con las reglas siguientes:
  - La longitud completa de anclaje.
  - Cada barra debe terminar en patilla, lo más cerca posible de la cara opuesta.

#### b) Pilares

- El máximo diámetro de las barras longitudinales que atraviesan un nudo no excederá el valor  $\frac{h}{25}$ , siendo  $h$  el máximo canto de las vigas que se enlazan al pilar en el nudo.

- El anclaje de la armadura principal de un pilar en una viga de última planta (fig. 67-10), se empezará a contar a partir de una distancia  $m$  de la cara del pilar igual al menor de los valores

$$10 \phi$$

$$\frac{h}{2}$$

- Los solapes de la armadura longitudinal no pueden disponerse dentro de los nudos o donde es previsible la formación de rótulas plásticas.

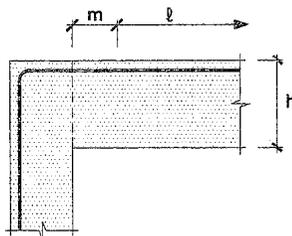


Figura 67-10

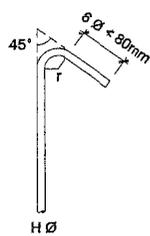


Figura 67-11

- Si el cálculo indica que no se forman rótulas plásticas en los extremos de los pilares, pueden disponerse los solapes en esas zonas, pero en ese caso se dispondrán en ellas estribos a separación  $6 \phi$ , siendo  $\phi$  el diámetro de la armadura longitudinal.
- El cierre de los estribos debe realizarse mediante gancho a  $45^\circ$  de acuerdo con la figura 67-11 y realizarse sobre una barra de la armadura longitudinal.

## 67.5.8 FORJADOS

### 67.5.8.1 ACCIÓN DIAFRAGMA DE LOS FORJADOS

El espesor mínimo de la losa superior será de 50 mm. Se dispondrá armadura de reparto en ambas direcciones igual a la transversal a los nervios especificada para los forjados en zonas no sísmicas.

La eficacia de la acción diafragma se basa esencialmente en la existencia de zunchos perimetrales correctamente dimensionados para hacer posible tal acción.

### 67.5.8.2 REGLAS ESPECIALES PARA CÁLCULO A ESFUERZO RASANTE

De acuerdo con las referencias (67.16) y (67.19) la conexión de las viguetas prefabricadas al hormigón "in situ" debe cumplir las condiciones indicadas en las Tablas T-67.1 y T-67.2 para la armadura de cosido. Si  $a_c > 0,16 g$  el uso de este tipo de forjados requiere estudios especiales.

TABLA T-67.1  
ZONAS DONDE  $0,06 g < a_c \leq 0,09 g$

TIPO DE CONSTRUCCIÓN	ARMADURA DE COSIDO
1. Oficinas, almacenes	No necesaria
2. Edificios industriales	Debe disponerse en los 500 mm extremos junto a cada apoyo
3. Escuelas, estadios, edificios para espectáculos	Debe disponerse en los 500 mm extremos junto a cada apoyo
4. Hospitales, cuarteles, etc.	Debe disponerse en los 500 mm extremos junto a cada apoyo

TABLA T-67.2  
ZONAS DONDE  $0,09 g < a_c \leq 0,16 g$

TIPO DE CONSTRUCCIÓN	ARMADURA DE COSIDO
1. Viviendas, oficinas	No necesaria
2. Edificios industriales	Debe disponerse en los tercios extremos de la luz
3. Escuelas, estadios, edificios para espectáculos	Debe disponerse en toda la luz
4. Hospitales, cuarteles, etc.	Debe disponerse en toda la luz

En cualquier caso, si  $a_c \geq 0,08 g$ , los voladizos deben llevar siempre armadura de conexión.

El valor mínimo de la armadura de conexión viene fijado por (40.17).

## 67.5.9 REGLAS ESPECIALES PARA MANGUITOS DE EMPALME

Estos elementos pueden utilizarse en estructuras situadas en zonas sísmicas, pero no deben empalmarse en la misma sección de la pieza más del 50% de las armaduras y la distancia entre las secciones que pasen por los centros de dos series de manguitos consecutivos deben separarse al menos 600 mm.

## 67.5.10 SOLDADURA DE ATADO DE ESTRIBOS

Este sistema de unión no debe emplearse en zonas en las que la aceleración sísmica de cálculo sea mayor que 0,13 g.

## BIBLIOGRAFÍA

- (67.1) Norma Sismorresistente NCS-94. Norma de Construcción Sismorresistente. (Parte General y Edificación). Dirección General del Instituto Geográfico Nacional. 1994.
- (67.2) "MODEL CODE FOR SEISMIC DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES". Comité Euro-International du Béton. Abril 1985.
- (67.3) "Buildings Code Requirements for Structural Concrete" ACI 318-95. American Concrete Institute. Detroit. 1995.
- (67.4) BLUME, J.A.; NEWMARK, N.M.; CORNING, L.H. "Design of Multistorey Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions". Portland Cement Association. Illinois. 1961.
- (67.5) ARCHITECTURAL INSTITUTE OF JAPAN. "Design Essentials in Earthquake Resistant Buildings". Architectural Institute of Japan, Tokyo, y Elsevier Publishing Company. 1970.
- (67.6) NEWMARK, N.M.; ROSENBLUETH, E. "Fundamentals of Earthquake Engineering". Prentice-Hall Inc. 1971.
- (67.7) BELES, A.A.; IFRIM, M.D.; GARCIA YAGÜE, A. "Elementos de Ingeniería Sísmica". Ediciones Omega, S.A. Barcelona. 1975.
- (67.8) DOWRICK, D.J. "Earthquake Resistant Design". John Wiley & Sons Ltd. 1977.
- (67.9) "Reinforced Concrete Structures in Seismic Zones". ACI SP-53. American Concrete Institute. Detroit. 1977.
- (67.10) GREEN, N.B. "Earthquake Resistant". Building Design and Construction. Van Nostrand Reinhold Company. Nueva York. 1978.
- (67.11) CREIXELL, J. "Construcciones antisísmicas. Criterio para su cálculo y diseño". Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1979.
- (67.12) EDITORIAL BLUME. "Terremotos. Evaluación y Mitigación de su Peligrosidad". Barcelona. 1980.
- (67.13) ARNOLD, C.; REITHERMAN, R. "Building Configuration & Seismic Design". John Wiley & Sons Inc. California. 1982.
- (67.14) GUPTA, A.K. "Seismic Performance of Low Rise Buildings". State-of-the-Art and Research Needs. American Society of Civil Engineers. New York. 1981.
- (67.15) NEWMARK, N.M.; HALL, W.J. "Earthquake Spectra and Design". The Earthquake Engineering Research Institute. Berkeley. 1982.
- (67.16) CALAVERA, J. "Cálculo, Construcción y Patología de Forjados de Edificación". 4ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1988.
- (67.17) CEB MODEL CODE FOR SEISMIC DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES. CEB Bulletin d'Information n° 165. Abril 1985.
- (67.18) EUROCODE 8. "Design provisions for earthquake resistance of structures - Part 1-1: General rules - Seismic actions and general requirements for structures". Oct. 1994.
- (67.19) "Composite Floor Structures". FIP (CEB-FIP). May 1998.
- (67.20) PNE 36.065 EX "Barras corrugadas de acero soldable con características especiales de ductilidad para armaduras de hormigón armado".
- (67.21) CALAVERA, J. "Muros de contención y muros de sótano". 2ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1989.
- (67.22) IAP-98 "Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera". Ministerio de Fomento. Madrid. 1998.

## CAPÍTULO 68

### APLICACIONES VARIAS DEL HORMIGÓN PRETENSADO

#### 68.1. INTRODUCCIÓN

El campo de utilización del pretensado ha crecido a lo largo de los últimos 30 años de forma realmente espectacular. Ya en los Capítulos 25, 26 y 27 incluimos diversas realizaciones.

En este Capítulo se intenta hacer una presentación sucinta de sus posibilidades. Dada la extensión disponible, los temas se exponen en sus aspectos esenciales. Sobre muchas de las aplicaciones existe bibliografía específica importante y en muchos casos libros dedicados monográficamente a cada tema. Se incluye siempre una bibliografía seleccionada.

#### 68.2 LAS APLICACIONES

Se indican a continuación las más frecuentes.

##### 68.2.1 PILOTES

Se fabrican en dos tipos generales

- a) **Pilotes prefabricados pretensados con alambres adherentes.** Las secciones más típicas se indican en la figura 68-1.

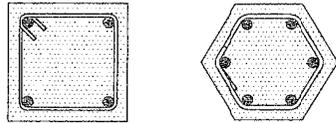


Figura 68-1

Habitualmente los pilotes prefabricados se emplean en terrenos que no contengan bolos de gran tamaño

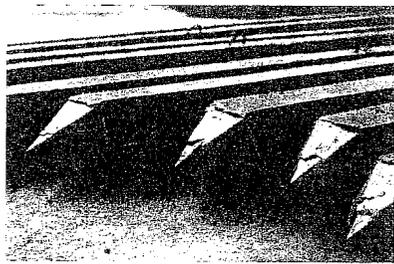


Figura 68-2



Figura 68-3

Generalmente van provistos de un azuche metálico en la punta y es necesario disponer un mecanismo de empalme que se aplica a medida que se profundiza la hinca (Fig. 68-3).

b) **Pilotes prefabricados con armadura postesa.** El tipo más general es el de sección anular (Fig. 68-4) conocido como tipo Raymond por ser el primer modelo de este tipo.

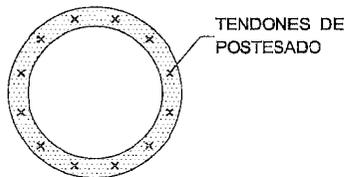


Figura 68-4

El libro de la referencia (68.1) contiene información detallada.

## 68.2.2 CIMENTACIONES SUPERFICIALES

Las posibilidades del pretensado con armaduras postesas en el campo de las cimentaciones se está desarrollando rápidamente. Es una aplicación derivada del cálculo de placas postesadas expuesto en el Capítulo 55. La figura 68-5 muestra esquema de este tipo de soluciones. Obsérvese que además del efecto compensador de momentos, el postesado presenta en este caso claras ventajas en cuanto a la resistencia a punzonamiento. Véase p. ej. la publicación de VSL "Post-Tensioned Foundations" (68.2).

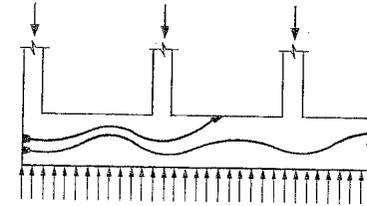


Figura 68-5

## 68.2.3 PAVIMENTOS

Es una técnica en uso desde la aparición del pretensado. La figura 68-6 a) muestra la solución más habitual, de pretensado oblicuo que sitúa el pavimento en estado de precompresión bidireccional en el plano medio del pavimento. La figura 68-6 b) indica el detalle de los tendones junto a las juntas de dilatación, en las que el tendón se curva para poder tesarlo también desde el borde.

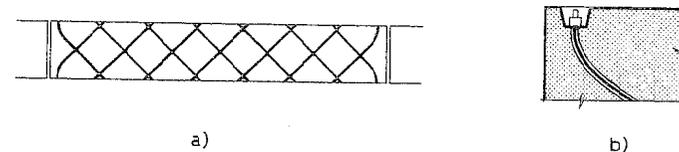


Figura 68-6

Existen hoy sistemas de vainas y anclaje muy económicos para este tipo de aplicación. Naturalmente el pretensado debe vencer el rozamiento del pavimento con la subbase. El sistema permite aplicar un pretensado de poca intensidad a edades jóvenes del hormigón, evitando así todo tipo de fisuración del pavimento e incrementar el pretensado posteriormente.

## 68.2.4 POSTES

Es una aplicación clásica de la prefabricación con armaduras pretesas y en caso de grandes alturas también con postesas.

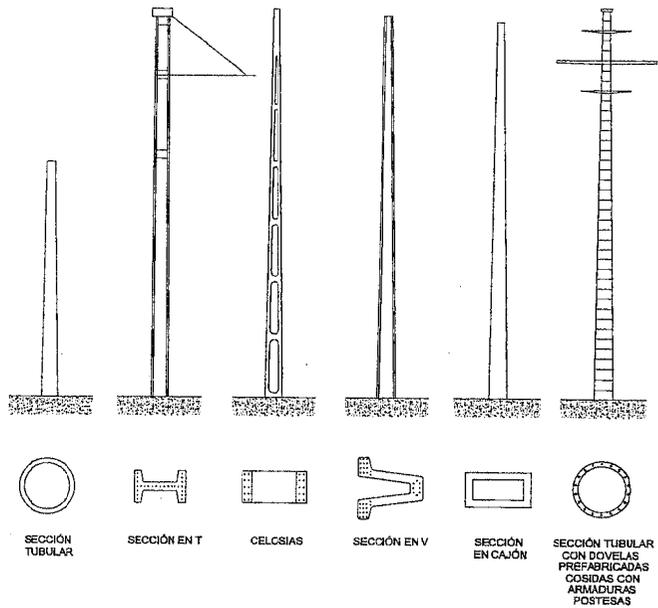
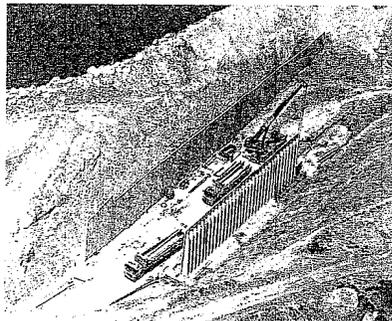


Figura 68-7

La figura 68-7 muestra una pieza real. La referencia (68.3) contiene información importante.

### 68.2.5 MUROS DE CONTENCIÓN

Las modalidades son hoy múltiples y alcanzan ya alturas considerables. (Fig. 68-8). Véase la referencia (68.4).



(Cortesía de OREKIN)

Figura 68-8

### 68.2.6 ACEQUIAS

La prefabricación con pretensado por armaduras adherentes constituye una solución clásica. Las figuras 68-9 a) y b) muestran una sección transversal y una vista de los apoyos, también prefabricados. La figura 68-9 c) muestra piezas reales. (El emplear perfiles tales que la superficie interior y la exterior sean superficies verticalmente trasladadas permite encajar unas piezas contra otras y conseguir un transporte compacto. De otra forma el transporte repercute fuertemente en el coste).

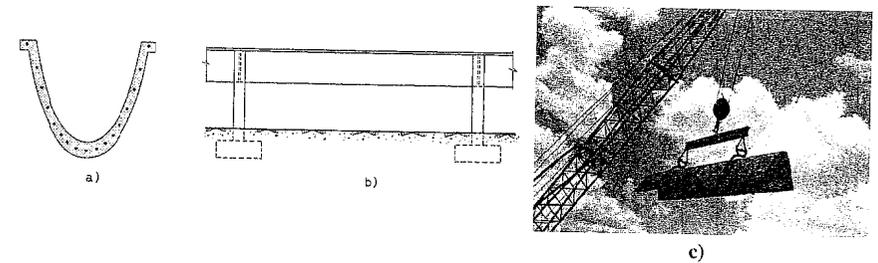


Figura 68-9

### 68.2.7 PIEZAS PARA FORJADOS

Se fabrican en una gama amplísima. La figura 68-10 a) muestra secciones típicas y las b) y c) piezas reales. Véase la referencia (68.5), (68.6) y (68.7).

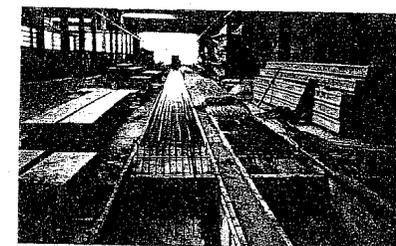
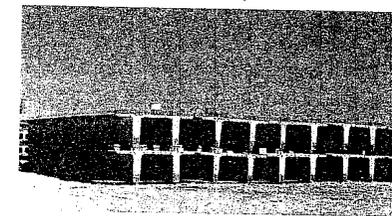
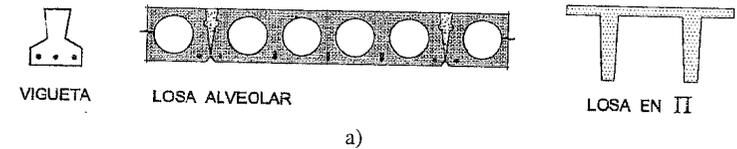


Figura 68-10

### 68.2.8 NAVES

Es una aplicación clásica y fue ya indicado en el Capítulo 25 (Figuras 25-17 a 25-21). Los libros citados como referencias (68.6), (68.7) y (68.8) contienen información abundante.

### 68.2.9 EDIFICIOS COLGADOS

El esquema general se indica en la figura 68-11. Es una solución frecuente en edificios altos. En el Capítulo 1, Fig. 1-1, se indicó una realización española.

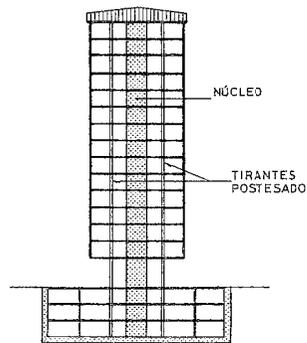
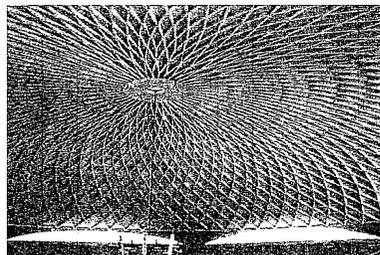


Figura 68-11

### 68.2.10 CUBIERTAS DE GRANDES LUCES

Existen múltiples aplicaciones para las muy diversas soluciones de cubierta. El pretensado es aquí una solución indispensable para corregir los esfuerzos del anillo de borde. La figura 68-12 indica una solución para 80 m de luz, de una gran ligereza y ejecutada con piezas prefabricadas.

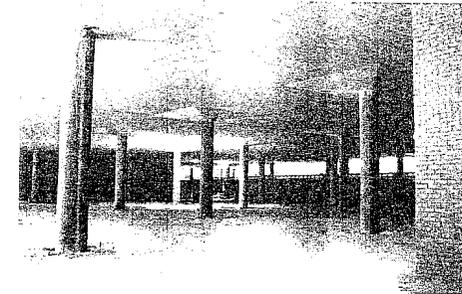


CUBIERTA DEL PALAU BLAU GRANA  
Ingeniero de Caminos: Florencio del Pozo

Figura 68-12

### 68.2.11 PLACAS POSTESADAS

A este tema se dedica el Capítulo 55 en el que se destacaron los diferentes sistemas de postesado y las posibilidades que la solución encierra. La figura 68-13 indica una realización importante.



CENTRO COMERCIAL "LAS PROVINCIAS".  
FUENLABRADA (Madrid).  
LOSAS POSTESADAS CON TENDONES ADHERENTES  
DE VAINA OVAL.  
Propiedad: ALCOSTO  
Autores del Proyecto: FHECOR Ingenieros Consultores, S.A.  
Empresa Constructora: FERROVIAL  
(Cortesía de "FHECOR")

Figura 68-13

### 68.2.12 TRIBUNAS

Se prefabrican tanto las gradas como los entramados de apoyo.

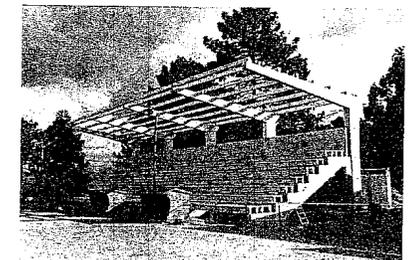
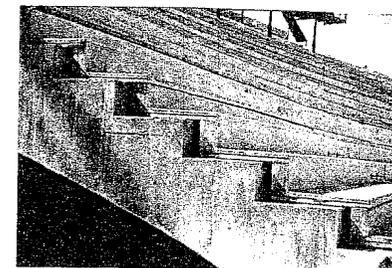
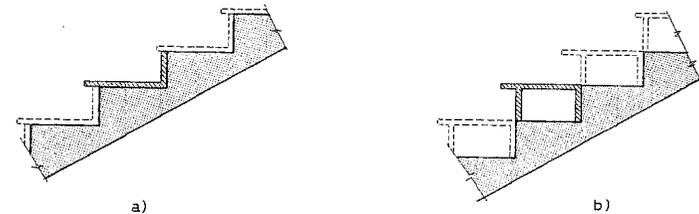


Figura 68-14

En las figuras 68-14 a) y b) se indican dos tipos clásicos de gradas. La figura 68-14 c) y d) muestra realizaciones completas.

### 68.2.13 TRAVIESAS PREFABRICADAS DE FERROCARRIL

Constituyen una solución hoy habitual que ha desplazado a las antiguas traviesas de madera. La figura 68-15 indica soluciones clásicas.

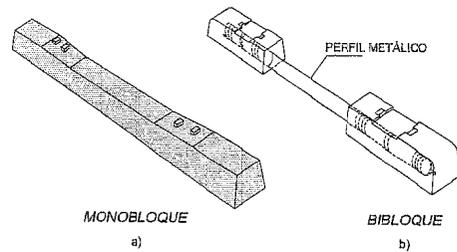


Figura 68-15

Véanse las referencias (68.11) y (68.12) <sup>1</sup>.

### 68.2.14 TÚNELES

El pretensado se aplica a los túneles revestidos con dovelas prefabricadas. El sistema fue ya aplicado por Freyssinet y Guyon en los principios del pretensado.

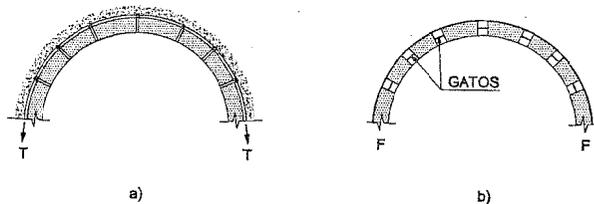


Figura 68-16

Hoy los dos métodos más frecuentes son los indicados en la figura 68-16.

La solución a) emplea un pretensado poligonal situado en el trasdós. En la solución b) las dovelas se pretensan intercalando gatos en las juntas. Éstas se rellenan luego con cuñas. La reacción se absorbe con aros en el trasdós, normalmente de armadura pasiva o llantas metálicas. Véase (68.13).

<sup>1</sup> Independiente de las traviesas para nuevos trazados, en el mundo se fabrican actualmente 20 millones de traviesas para reposición de líneas.

### 68.2.15 PUENTES

Son hoy una de las aplicaciones más frecuentes del pretensado. Las soluciones más clásicas son:

- a) Soluciones de vigas o vigas-artesa prefabricadas pretensadas con armaduras pretesas. (Fig. 68-17).

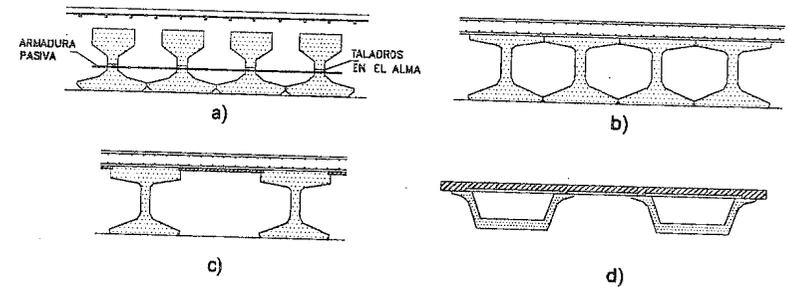
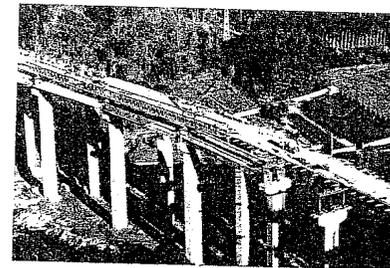


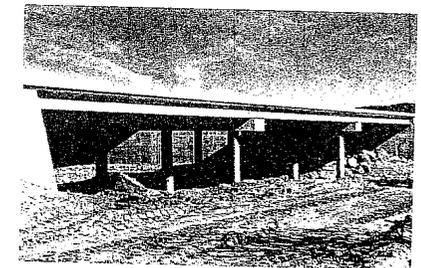
Figura 68-17

En las figuras 68-18, 68-19, 68-20 y 68-21, se indican soluciones reales.



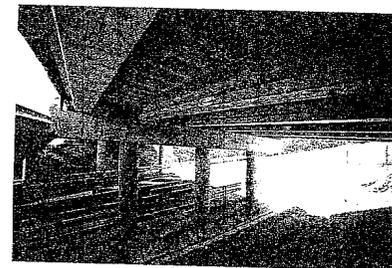
(Cortesía de PACADAR)

Figura 68-18



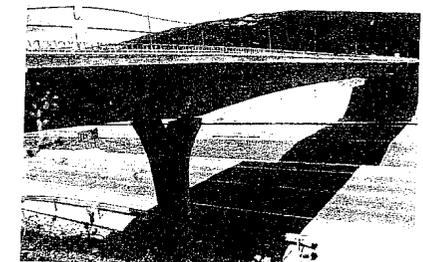
(Cortesía de CADE S.A.)

Figura 68-19



TABLERO DE PUENTE DE TRES VANOS.  
VISTA INFERIOR  
(Cortesía de GRUPO CASTELO&PUJOL)

Figura 68-20



(Cortesía de ALVISA)

Figura 68-21

b) Soluciones con dovelas prefabricadas con postesado posterior. Esta técnica es de empleo muy variado y no sólo en puentes. Sin embargo, es esta última aplicación la que ha empleado con mayor intensidad este procedimiento.

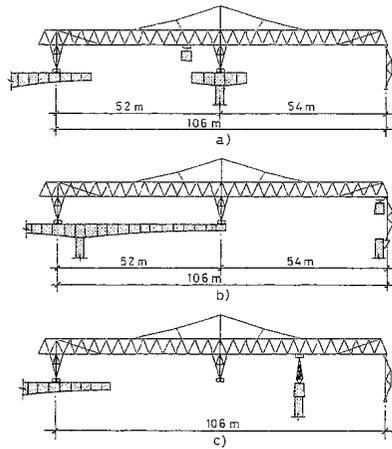


Figura 68-22

La figura 68-22 indica una solución típica de montaje con viga de lanzamiento. La figura 68-23 muestra la construcción por el sistema de voladizos sucesivos. La figura 68-24 muestra una dovela típica y la 68-25 una solución real.

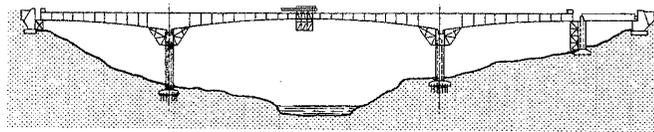


Figura 68-23

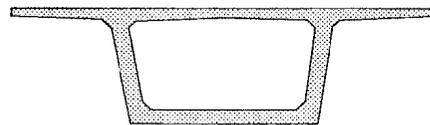
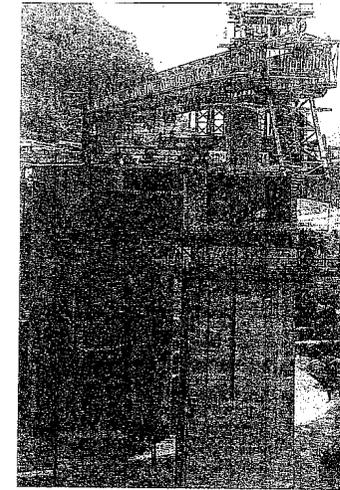


Figura 68-24



VIADUCTO DE RIO VERDE. COLOCACIÓN DE UNA DOVELA. AUTOPISTA DEL SOL (Cortesía de "FERROVIAL")

Figura 68-25

Para una exposición general véase (68.14).

En este sistema, la unión de las dovelas es un aspecto esencial. Véase (68.14).

c) **Método de voladizos sucesivos.** El método encierra probablemente una de las aplicaciones más completas del pretensado. Aunque no es exclusivo de las soluciones de tableros rectos, sino que puede aplicarse a arcos, etc., la solución más clásica se indica en la figura 68-26 a). El hormigonado va avanzando equilibradamente a partir de las pilas. Los vanos extremos deben ser de luz mitad para que compensen los esfuerzos. Otra solución, si ello no es posible, es disponer macizados de hormigón que actúen como contrapeso. La figura b) indica una sección típica y la c) un esquema del trazado de cables, alojados en vainas que se sitúan a compás del avance. El pretensado se utiliza no sólo para compensar esfuerzos sino también para controlar deformaciones. Una exposición general figura en el libro de la referencia (68.15).

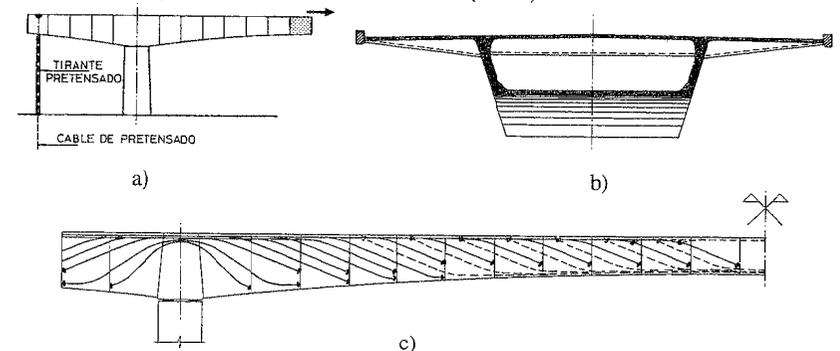
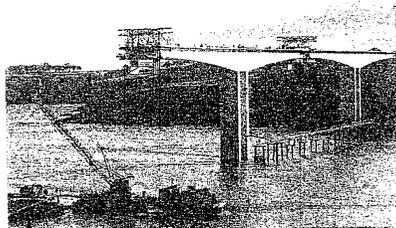


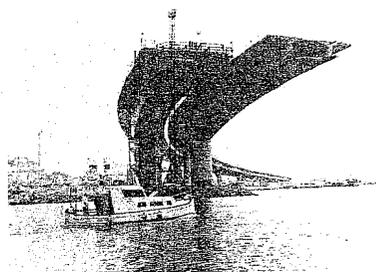
Figura 68-26



PUENTE DE LOS SANTOS DE RIBADEO  
(LUGO)

Proyecto: M. JULIÁ; Ingeniero de Caminos.  
Director de Obra: IGNACIO GARCÍA ARANGO;  
Ingeniero de Caminos  
Empresa Constructora: CUBIERTAS Y TEJADOS S.A.

Figura 68-27



ACCESO NORTE AL PUERTO DE ALGECIRAS  
DIRECCIÓN GENERAL DE CARRETERAS DEL  
MINISTERIO DE FOMENTO.  
PROYECTO: PROYECTOS Y ESTRUCTURAS, S.A.  
FLORENCIO J. DEL POZO VINDEL; JOSÉ M<sup>o</sup>  
ARRIETA TORREALBA.  
EMPRESAS CONSTRUCTORAS: PUENTES Y  
CALZADAS, S.A. Y  
S.A. DE TRABAJOS Y OBRAS (SATO)  
UTE ALGECIRAS.

Figura 68-28

Las figuras 68-27 y 68-28 reflejan soluciones de este tipo.

- d) **Soluciones atriantadas**<sup>1</sup>. Este campo de aplicación del pretensado no está cubierto por EHE. Consiste en asociar un tablero pretensado a un conjunto de tirantes arrancando de las coronaciones de las pilas. La figura 68-29 indica un esquema general.

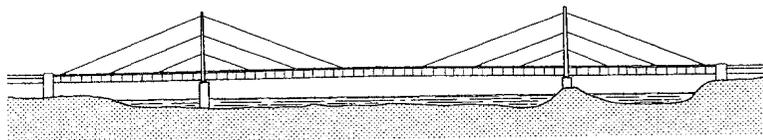
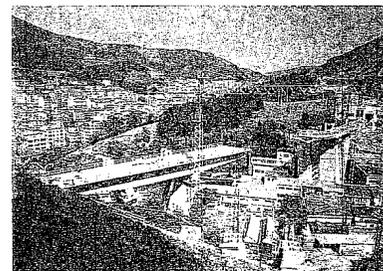


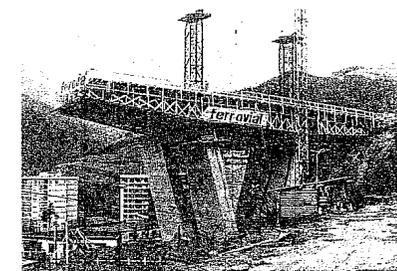
Figura 68-29

<sup>1</sup> Las soluciones atriantadas, como tipo estructural, no constituyen realmente una novedad en sí. Las desarrolla completamente Navier en su "Memoire sur les ponts suspendus" de 1826. Eiffel la utilizó como solución de montaje en muchos viaductos, en particular en el de María Pía y el de Garabit. Una anticipación importante fue el Acueducto de Tempul de E. Torroja. Una aplicación muy interesante al hormigonado de puentes de hormigón es debida a G. Aparicio. (Véanse las figuras 68-30 y 68-31).



VIADUCTO DE CHONTA. AUTOPISTA  
BILBAO - BEHOVIA.  
Autor del Proyecto: GINÉS APARICIO, Ingeniero de  
Caminos.  
Empresa Constructora: FERROVIAL  
(Cortesía de INTEMAC)

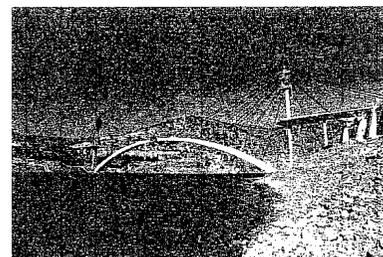
Figura 68-30



VIADUCTO DE CHONTA. AUTOPISTA  
BILBAO - BEHOVIA.  
Autor del Proyecto: GINÉS APARICIO, Ingeniero de  
Caminos.  
Empresa Constructora: FERROVIAL  
(Cortesía de INTEMAC)

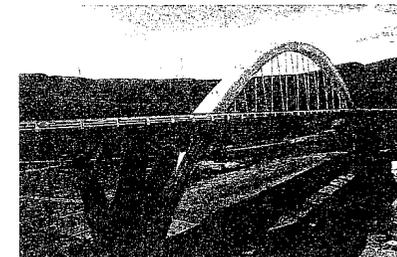
Figura 68-31

- e) **Puentes en arco**. El pretensado ha permitido "recuperar" en gran medida la solución de puentes en arco, tanto en cuanto al proceso de montaje como en las piezas definitivas. Las figuras 68-32 y 68-33 muestran realizaciones interesantes.



PUENTE SOBRE EL EMBALSE DEL  
BURGUILLO.  
VARIANTE DE EL TIEMBLO. (AVILA)  
ARCO DE 170 m DE LUZ  
Propiedad: MINISTERIO DE FOMENTO  
Autores del Proyecto: FHECOR Ingenieros  
Consultores, S.A.  
Empresa constructora: CONSTRUCCIONES  
SOBRINO Y TAPUSA U.T.E.  
(Cortesía de "FHECOR")

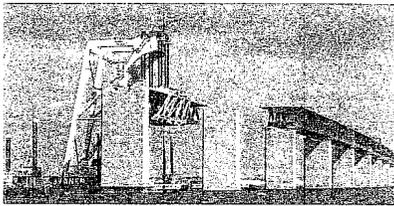
Figura 68-32



VIADUCTO DE TAMARACEITE. ACCESO  
NORTE A LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
Propietario: GOBIERNO DE CANARIAS  
Proyecto: JOSE A. TORROJA, OFICINA  
TÉCNICA, S.A.  
Directores de Obra: JULIO MOLO ZABALETA  
JOSE LUIS MARTÍNEZ COCERO  
Contratista: DRAGADOS Y CONSTRUCCIONES;  
CUBIERTAS Y MZOV-U.T.E.  
Fecha de inauguración: Mayo de 1994

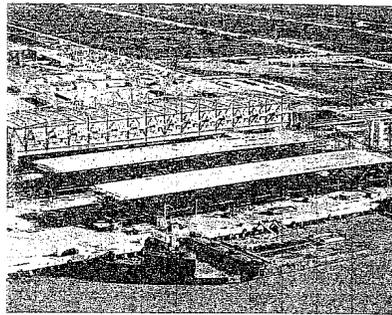
Figura 68-33

- f) **Puentes mixtos**. La solución de vigas metálicas y tableros postesados se ha revelado como interesante y competitiva en muchos casos. Las figuras 68-34 y 68-35 muestran una realización importante.



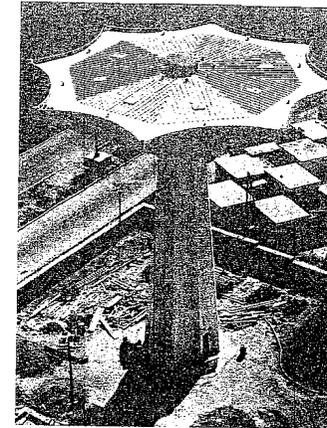
Montaje de los tramos de aproximación del Puente de Öresund, fabricados por DRAGADOS OFFSHORE, en Puerto Real (Cádiz).  
Cada uno de los 49 tramos del viaducto de aproximación pesa 5.500 toneladas y mide 140 m de largo por 25 m de anchura, con tablero de hormigón postestado. La longitud total del puente es de 3.740 m.

Figura 68-34



Fabricación de los tramos de aproximación del Puente de Öresund, fabricados por DRAGADOS OFFSHORE, en Puerto Real (Cádiz).  
El transporte se realiza por mar hasta el emplazamiento definitivo.

Figura 68-35



DEPÓSITO DE SIDI-BERNOUSSI  
(Cortesía de JOSÉ A. TORROJA, OFICINA TÉCNICA, S.A.)

Figura 68-37

Las figuras muestran vistas de los tramos del Puente de Öresund, que une Copenhague (Dinamarca) con Malmö (Suecia).

Otra solución frecuentemente empleada es la de tipo PRELOAD. El sistema consiste en zunchar la pared, mediante un carro giratorio que trefila alambres, lo transforma en alambre y lo tesa. Posteriormente, la capa de armaduras se gunita (Fig. 68-38). La figura 68-39 presenta una realización importante de un tanque para gas licuado.

### 68.2.16 DEPÓSITOS PARA LÍQUIDOS

Son una aplicación usual. Una solución típica (Fig. 68-36) es la de postesado por sectores de 240°, anclando los tendones horizontales en fajas a 120°. Eventualmente, si la altura es grande, se añade un pretensado vertical.

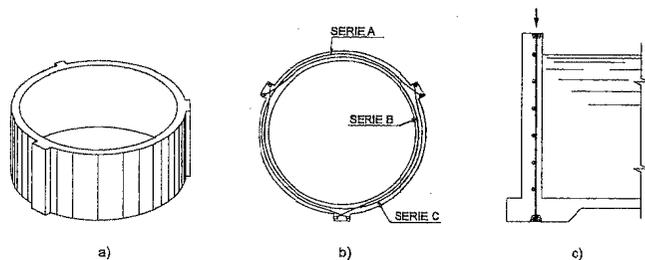


Figura 68-36

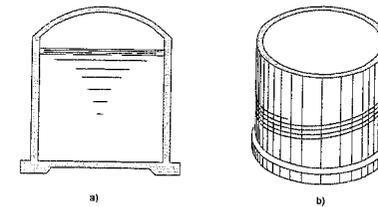
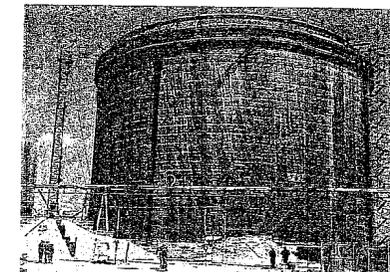


Figura 68-38



DEPÓSITO PARA EL ALMACENAMIENTO DE G.N.L. EN PLANTA DE ENAGAS. ZONA FRANCA DEL PUERTO DE BARCELONA.  
(Cortesía de INTEMAC)

Figura 68-39

La figura 68-37 muestra una realización especial.

Una solución interesante es la de depósitos y silos prefabricados (Fig. 68-40) mediante piezas que se unen, se sellan las juntas y se les aplica un postesado.

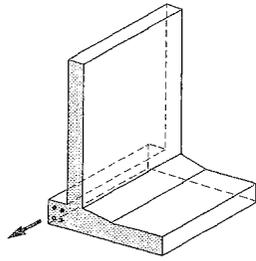
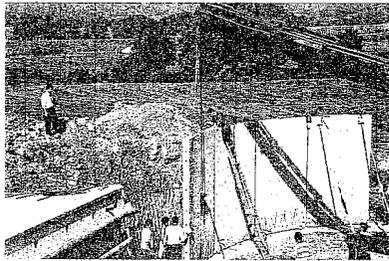


Figura 68-40

Las aplicaciones a depósitos son múltiples. La figura 68-41 muestra una realización.



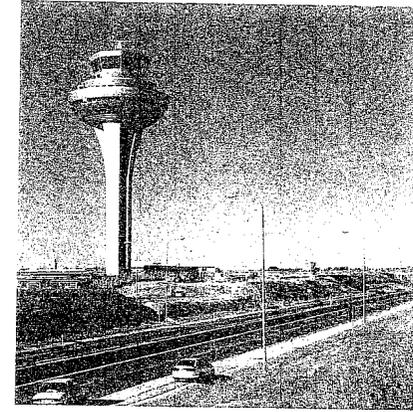
DEPÓSITO PREFABRICADO POSTENSADO  
ORURA  
(Cortesía de "OREKIN")

Figura 68-41

Las referencias (68.16) a (68.18) contienen información detallada sobre depósitos.

### 68.2.17 TORRES

Son de aplicación creciente. La figura 68-42 muestra una realización interesante.



NUEVA TORRE DE CONTROL EN EL  
AEROPUERTO DE MADRID / BARAJAS  
Promotor: AENA  
Proyecto: GOP OFICINA DE PROYECTOS, S.A.  
Ingenieros Consultores para la estructura: CARLOS  
FERNANDEZ CASADO, S.L.  
Constructor: AGROMAN  
Prefabricación: ALVISA  
Estructura metálica: ACERALIA

Figura 68-42

### 68.2.18 APLICACIONES A PROBLEMAS DE PATOLOGÍA, RECALCES Y REFUERZOS

La versatilidad del pretensado lo transforma en una solución, a veces única, para problemas de este tipo.

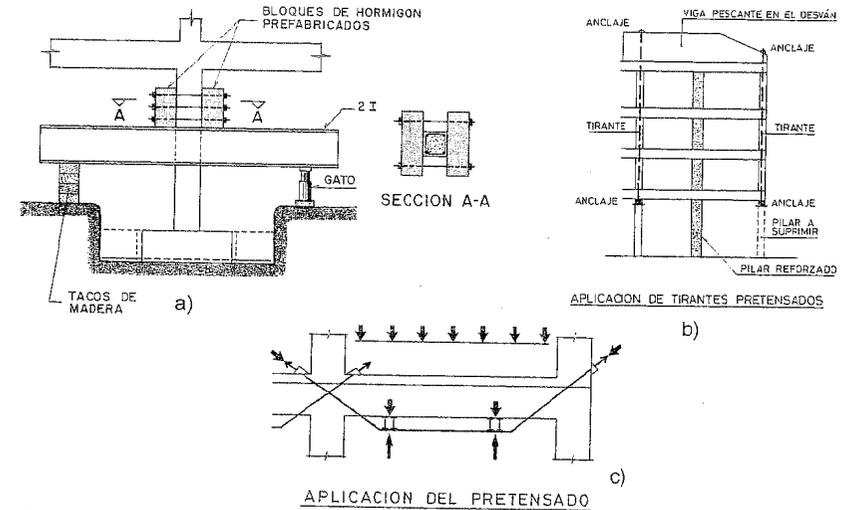


Figura 68-43

La figura 68-43 a) muestra el apeo de un pilar mediante el acoplamiento al mismo de dos bloques prefabricados de hormigón, con un pretensado transversal. Con el sistema indicado, la carga del pilar se transmite al terreno y puede ensancharse la zapata. Una vez endurecido el hormigón de ensanche, se retira el pretensado y se vuelve a transmitir la carga del pilar por la zapata al terreno.

La figura 68-43 b) muestra un refuerzo clásico de vigas continuas.

Finalmente, la figura 68-43 c) muestra un sistema de refuerzo para la supresión de un pilar en planta baja de un edificio. Mediante el hormigonado de una viga pescante en el desván, se colocó un tirante que se tesó controlando además la deformación, para dejar el pilar a suprimir en carga nula, pero sin producir deformaciones que pudieran fisurar los tabiques o cerramientos de fachada. El incremento de la carga en el segundo pilar obligó a reforzarlo antes de realizar la operación. Este tipo de problema es prácticamente imposible de solucionar sin el pretensado.

### 68.2.19 SOLUCIONES ESPECIALES

En la figura se indican las Torres de Puerta Europa en Madrid. Son de estructura metálica, pero su construcción no hubiera sido posible sin el pretensado.

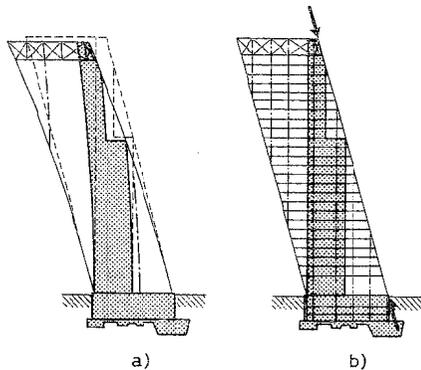


Figura 68-44

La figura 68-44 a) indica la deformación progresiva que hubieran tomado las torres sin la corrección del pretensado. La b) indica el pretensado introducido para realizar dicha corrección y mantener la planeidad de las fachadas inclinadas.

La figura 68-45 indica cómo las cargas de pilares interceptados que apoyan en la fachada inclinada se encauzan por ella gracias a un pretensado horizontal anclado en el núcleo de ascensores, ejecutado en hormigón.

La figura 68-46 muestra las torres terminadas.

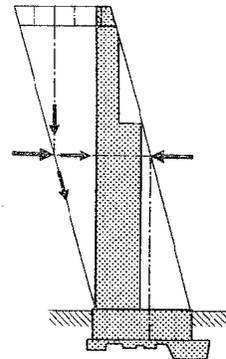
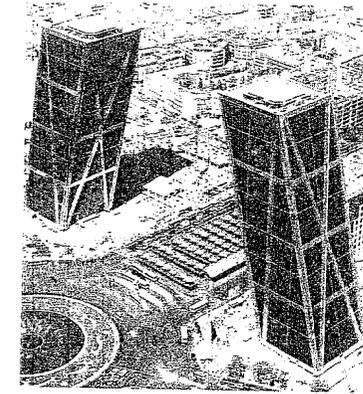


Figura 68-45



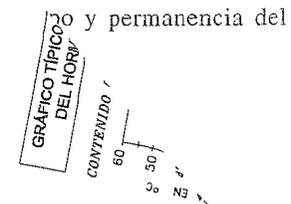
TORRES PUERTA DE EUROPA, MADRID  
Propiedad: PRODUSA  
Arquitectos: J. Burgee; P. Sentieri; T. Domínguez; J.C. Martín Baranda.  
Ingeniería Estructural: Leslie E. Robertson Associates.  
Control de Calidad: INTEMAC  
Empresa Constructora: UTE F.C.C.- Cnes. San Martín

Figura 68-46

### BIBLIOGRAFÍA

- (68.1) "Precast Concrete Piles". F.I.P. - Thomas Telford. London. 1983.
- (68.2) "Post-tensioned Foundations". VSL INTERNATIONAL LTD. Berna. 1988.
- (68.3) "Guide for the Design and Use of Concrete Piles". ASCE. April. 1987.
- (68.4) CALAVERA, J. "Muros de contención y muros de sótano". 2ª Edición. INTEMAC. Madrid. 1989.
- (68.5) "Manual for the design of hollow core slabs". P.C.I. Chicago. 1985.
- (68.6) "Precast Prestressed Hollow Core Floors". F.I.P. - Thomas Telford. London. 1988.
- (68.7) CEN TC 229 "Precast prestressed hollow core elements". April 1996.
- (68.8) MOKK, L. "Construcciones con materiales prefabricados". URMO. Bilbao. 1979.
- (68.9) KONZC, T. "Manual de la Construcción Prefabricada". BLUME. Madrid, 1966.
- (68.10) PHILLIPS, W.R.; SHEPPARD, D.A. "Plant Precast and Prestressed Concrete". ICMAC. California. 1980.
- (68.11) "Concrete Railway Sleepers". F.I.P. - Thomas Telford. London. 1987.
- (68.12) "Symposium Internacional de Traviesas Ferroviarias Prefabricadas de Hormigón". Madrid. 1991.

- (68.13) LANCE, G.A. "Precast Concrete Tunnel Linings - A Review of Current Test Procedures". CIRIA. Technical Note 104. May 1981.
- (68.14) PODOLNY, W.; MULLER, J.M. "Construction and design of prestressed concrete segmental bridges". J. Wiley. New York. 1982.
- (68.15) MATHIVAT, J. "Construction par encorbellement des ponts en béton précontrainte". Eyrolles. Paris. 1979.
- (68.16) "Design and Construction of Circular Prestressed Concrete Structures with Circumferential Tendons". ACI Committee 344. American Concrete Institute. Detroit. October 1988.
- (68.17) "Design and Construction of Circular Wire and Strand Wrapped Prestressed Concrete Structures". ACI Committee 344. American Concrete Institute. Detroit. October 1988.
- (68.18) CREASY, L.R. "Prestressed concrete cylindrical tanks". J. Wiley. New York. 1961.



## CAPÍTULO 69

### ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN EN MASA

#### 69.1 INTRODUCCIÓN

Se definen como estructuras de hormigón en masa aquellas en las que los esfuerzos en estado límite último son resistidos exclusivamente por el hormigón.

Dentro de esta definición se comprenden dos tipos diferentes:

- Estructuras de hormigón en masa, propiamente dichas.
- Estructuras débilmente armadas. En éstas las armaduras, dispuestas generalmente en forma de emparrillado superficial, tienen como misión controlar la fisuración debida a la retracción y a la contracción térmica.

La Instrucción EHE deja fuera de su alcance las estructuras de hormigón armado de tipos especiales, entre las cuales las más importantes son las presas y los pavimentos.

Ambos tipos de estructuras están por tanto fuera del alcance de este libro, pero dada la importancia que los pavimentos de hormigón de edificios, naves industriales, áreas de almacenamiento, aparcamientos, etc., tienen en la práctica general, este tipo estructural se desarrolla en el Capítulo 70.

El lector debería tener en cuenta que, en contra de una opinión bastante extendida, *las estructuras de hormigón en masa requieren cuidados en su proyecto y ejecución más inmensos que las de hormigón armado o pretensado.*

Los aspectos relacionados con juntas de contracción y dilatación y curado son en este caso de excepcional importancia.

La figura 69-1 indica los saltos térmicos (diferencia máxima entre la temperatura del hormigón de la pieza y la del ambiente, en muros, en función del contenido de cemento).

GRÁFICO TÍPICO DE TEMPERATURAS DEL HORMIGÓN Y AMBIENTE

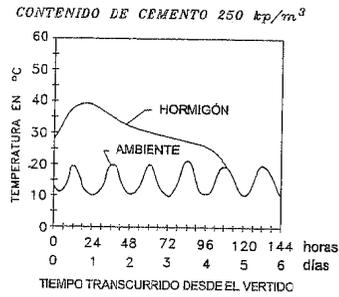


GRÁFICO TÍPICO DE TEMPERATURAS DEL HORMIGÓN Y AMBIENTE

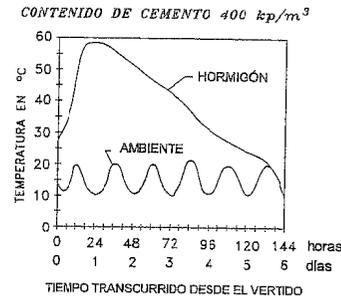
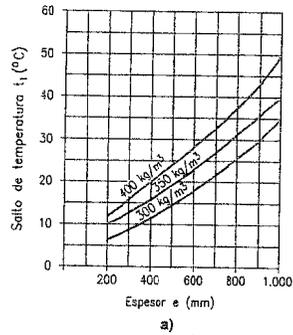
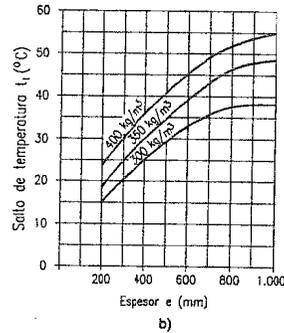


Figura 69-1

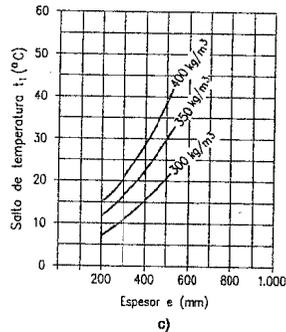
SALTOS TÉRMICOS PARA LOSAS CON ENCOFRADO METÁLICO



SALTOS TÉRMICOS PARA LOSAS CON ENCOFRADO DE MADERA



SALTOS TÉRMICOS PARA LOSAS HORMIGONADAS SOBRE EL TERRENO



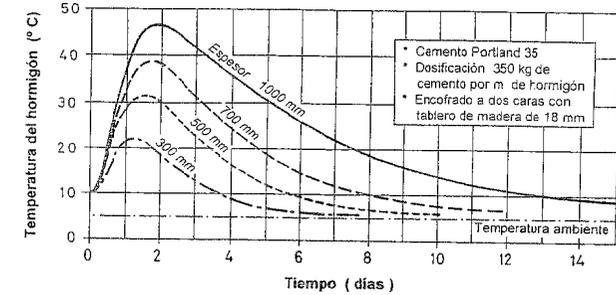
- SALTO TÉRMICO ES LA MÁXIMA DIFERENCIA DE TEMPERATURAS ENTRE EL HORMIGÓN Y EL AMBIENTE.

Figura 69-2

La figura 69-2 indica los saltos térmicos para diferentes tipos de losas y dosificaciones de cemento.

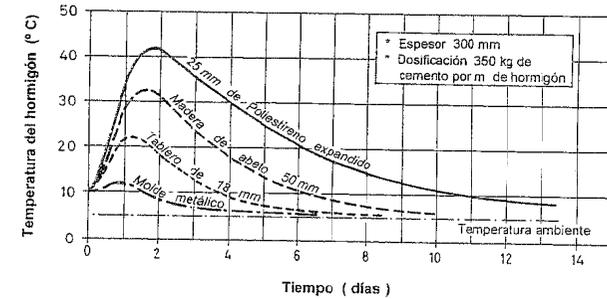
La figura 69-3 indica los saltos térmicos según el tipo y permanencia del encofrado.

EFFECTO DEL ESPESOR DEL MURO SOBRE LA TEMPERATURA MÁXIMA DEL HORMIGÓN



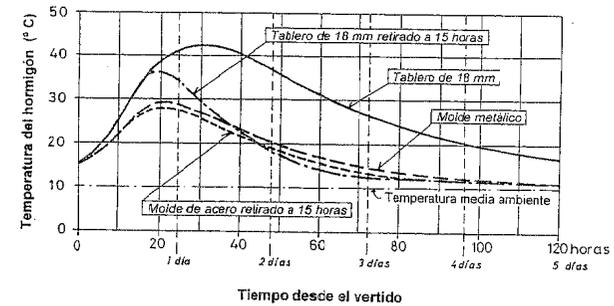
a)

EFFECTO DEL TIPO DE ENCOFRADO SOBRE LA TEMPERATURA MÁXIMA DEL HORMIGÓN



b)

EFFECTO DEL TIPO DE ENCOFRADO Y DEL TIEMPO DE DEENCOFRADO SOBRE LA TEMPERATURA MÁXIMA DEL HORMIGÓN



c)

Figura 69-3

(Datos tomados de las referencias (69.1) y (69.2)).

Como puede verse esta información refuerza la necesidad de un proyecto y ejecución especialmente cuidadosos.

EHE establece como resistencia mínima de hormigón para estructuras de hormigón en masa la de 20 MPa.

## 69.2 ACCIONES DE CÁLCULO

Las acciones de cálculo y sus combinaciones se rigen por lo expuesto en el Capítulo 32.

## 69.3 PIEZAS EN COMPRESIÓN SIMPLE Y COMPUESTA

Sea una pieza de directriz recta cuya sección transversal recta se indica en la figura 69-4. O es el c.d.g. de la sección.

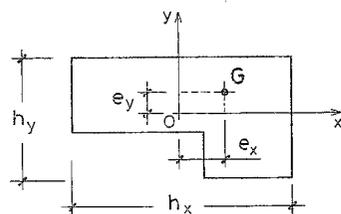


Figura 69-4

Sea  $N_d$  el esfuerzo axial de compresión de cálculo (positivo), y G su punto de aplicación, de coordenadas  $e_x$ ,  $e_y$ . Para el cálculo de la sección se considerará  $N_d$  alternativamente aplicado en los puntos:

$G_{Ix}$  de coordenadas  $(e_x + e_{xa}, e_y)$ .

$G_{Iy}$  de coordenadas  $(e_x, e_y + e_{ya})$ .

donde, siendo  $h_x$ ,  $h_y$  las dimensiones de la sección en las direcciones de los ejes, los valores  $e_{xa}$ ,  $e_{ya}$  vienen dados por:

$$\left. \begin{aligned} e_{xa} &= 0,05h_x \leq 20 \text{ mm} \\ e_{ya} &= 0,05h_y \leq 20 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \quad [69.1]$$

De las dos posiciones  $G_{Ix}$ ,  $G_{Iy}$  de posible aplicación de  $N_d$ , se elegirá la más desfavorable.

Conocido el punto  $G_1$ , debe determinarse (Fig. 69-5) la zona de sección transversal cuyo baricentro es  $G_1$ .

En el caso de distribución triangular (Fig. 69-5 a)) la construcción gráfica es inmediata. Si es trapecial el cálculo analítico es simple y permite determinar AB

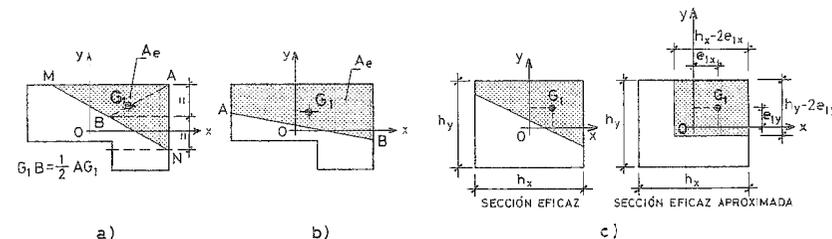


Figura 69-5

(Fig. 69-5 b)). Si la sección es de forma compleja, una solución suficientemente aproximada y del lado de la seguridad es la indicada en la Figura 69-5 c).

La condición de seguridad a cumplir es:

$$N_d \leq 0,85 f_{cd} \cdot A_e \quad [69.2]$$

donde  $A_e$  es el área de la sección transversal sombreada en la figura 69-5.

## 69.4 CASO DE COMPRESIÓN SIMPLE O COMPUESTA COMBINADA CON ESFUERZO CORTANTE

Denominando  $N_d$  y  $V_d$  al esfuerzo axial y al esfuerzo cortante de cálculo se determinan los puntos de aplicación  $G_{Ix}$  y  $G_{Iy}$  del esfuerzo  $N_d$  y el área  $A_e$  como en el apartado anterior.

Las condiciones de seguridad a cumplir son

$$N_d \leq 0,85 f_{cd} A_e \quad [69.3]$$

$$V_d \leq f_{ct,d} A_e \quad [69.4]$$

donde  $f_{ct,d}$  es la resistencia de cálculo a tracción dada por [28.1].

## 69.5 COMPROBACIÓN DE LA INESTABILIDAD DE PIEZAS EN COMPRESIÓN SIMPLE O COMPUESTA

En forma paralela a como expusimos en el Capítulo 45 para piezas de hormigón armado o pretensado, en el caso de una pieza de hormigón en masa sometida a un esfuerzo axial  $N_d$  (con o sin esfuerzo cortante  $V_d$ ), los esfuerzos de segundo orden se consideran mediante la adopción de una excentricidad ficticia.

Definiremos la anchura virtual  $b_v$  de la sección transversal de la pieza.

$$b_v = 2c \quad [69.5]$$

siendo  $c$  la mínima distancia del baricentro de la sección a una recta tangente a su perímetro (Fig. 69-6).

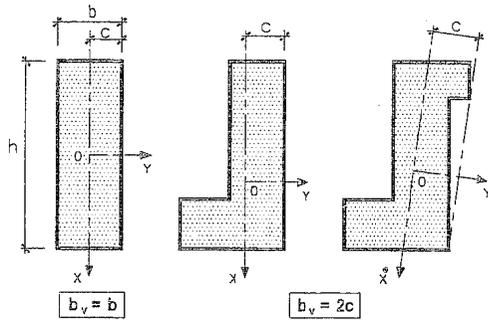


Figura 69-6

La longitud de pandeo a considerar en el cálculo se toma con el valor:

$$\ell_o = \beta \ell \quad [69.6]$$

donde  $\ell$  es la altura de la pieza entre base y coronación y

$$\beta = \beta_o \xi \quad [69.7]$$

es el factor de esbeltez. Se tomará  $\beta_o = 1$  con base y coronación arriostradas horizontalmente y  $\beta_o = 2$  si la coronación no está arriostrada.

El factor  $\xi$  considera el efecto de arriostramiento introducido en muros por la existencia de muros transversales, y vale

$$\xi = \sqrt{\frac{s}{4\ell}} \geq 1 \quad [69.8]$$

donde  $s$  es la separación entre muros de arriostramiento. Para pilares y en general elementos exentos,  $\xi = 1$ .

De acuerdo con lo anterior la esbeltez  $\lambda$  viene dada por

$$\lambda = \frac{\ell_o}{b_v} \quad [69.9]$$

En función de lo anterior se define la excentricidad ficticia  $e_f$ , que se introduce adicional y paralelamente a la anchura virtual  $b_v$ .

$$e_f = \frac{15}{E'_{ci}} (b_v + e_1) \lambda^2 \quad [69.10]$$

donde:

$E'_{ci}$  = módulo instantáneo de deformación del hormigón a 28 días.

$e_1$  = Excentricidad determinante.

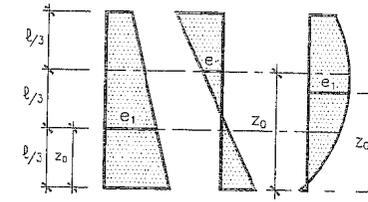


Figura 69-7

De acuerdo con la Figura 69-7,  $e_1$  vale:

- En elementos con coronación arriostrada horizontalmente. El valor  $e_1$ , correspondiente a la altura  $z_o$ , siendo  $\frac{\ell}{3} \leq z_o \leq 2\frac{\ell}{3}$ .
- En elementos con coronación no arriostrada horizontalmente, el valor  $e_1$  y en la base.

La sección de comprobación es la situada a la altura  $z_o$  y se comprueba con una excentricidad  $(e_{1x}, e_1 + e_a)$  y en cada extremo con su excentricidad  $(e_{1x}, e_{1y})$ .

## 69.5 ZAPATAS DE HORMIGÓN EN MASA

Se utilizan las mismas secciones para el cálculo a flexión y a cortante que las vistas en el Capítulo 63 para zapatas de hormigón armado.

Las tensiones de flexión, en la hipótesis de deformación plana, producidas bajo la acción del momento flector de cálculo, han de ser inferiores a la resistencia a flexotracción dada por [28.5].

Para el cálculo a esfuerzo cortante se tomará como resistencia de cálculo del hormigón a esfuerzo cortante el valor  $f_{ct,d}$  y para punzonamiento  $2f_{ct,d}$ , donde:

$$f_{ct,d} = \frac{0,21 \sqrt[3]{f_{ck}^2}}{1,5} \quad [69.11]$$

### EJEMPLO 69.1

Calcular la zapata corrida indicada en la Figura 69-8. Hormigón H-20.  $\gamma_s = 1,35$   $\gamma_g = 1,50$ .

Presión admisible en el suelo  $0,2 \text{ N/mm}^2$ .

Comprobación de la presión admisible

$$\sigma'_i = \frac{(325 + 25 \cdot 0,5) 10^3}{1750 \cdot 10^3} = 0,193 \text{ N/mm}^2$$

Presión  $\sigma_d$  para el cálculo estructural:

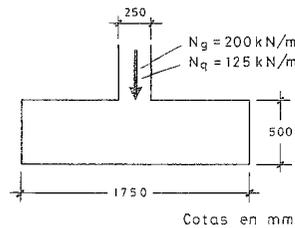


Figura 69-8

$$\sigma_d = \frac{(1,35 \cdot 200 + 1,5 \cdot 125)10^3}{1750 \cdot 10^3} = 0,261 \text{ N/mm}^2$$

$$M_d = \frac{0,261(750 + 0,15 \cdot 250)^2}{2} = 80.930 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_{ct, flex} = \frac{6 \cdot 80.930}{500^2} = 1,94 \text{ N/mm}^2$$

Para  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$   $f_{ct,k} = 0,21 \sqrt[3]{20^2} = 1,55 \text{ MPa}$

$$f_{ct,d} = \frac{1,55}{1,5} = 1,03 \text{ N/mm}^2$$

Aplicando [28.5]  $f_{ct, flex} = 3,19 \text{ MPa}$ .

$$f_{ct,d, flex} = \frac{3,19}{1,5} = 2,13 \text{ N/mm}^2$$

La comprobación a flexión es correcta

$$V_d = (750 - 500) 1000 \cdot 0,261 = 65.250 \text{ N}$$

$$\frac{V_d}{A_c} = \frac{65.250}{500 \cdot 1000} = 0,13 \text{ N/mm}^2 < 1,03 \text{ N/mm}^2$$

### BIBLIOGRAFÍA

- (69.1) BS 8007.1987 "British Standard Code of Practice for Design of Concrete Structures for Retaining Aqueous Liquids".  
 (69.2) CALAVERA, J.; GONZALEZ VALLE, E.; "Juntas en Construcciones de Hormigón". Cuadernos INTEMAC, N° 14, 2° Trimestre 1994.

## CAPÍTULO 70

### PAVIMENTOS DE HORMIGÓN

#### 70.1 INTRODUCCIÓN

Como se comentó en el Capítulo 69, la Instrucción EHE no cubre, como es lógico, los campos de presas hidráulicas y de carreteras de hormigón, que requieren especificaciones particulares. También los depósitos de agua y los muros de contención quedan fuera del alcance de EHE.

El tema de los pavimentos de naves industriales, áreas de almacenamiento, soleras de planta baja, aparcamientos de vehículos, etc. nos ha parecido que requería un capítulo específico dada la ausencia de normativa española y la pobre calidad con que en muchos casos se ejecutan.

Actualmente los pavimentos están en rápido desarrollo en cuanto al volumen de construcción y también en cuanto al desarrollo tecnológico.

A grandes rasgos pueden considerarse, de acuerdo con las cargas a soportar, dos grandes familias de pavimentos de hormigón.

- Pavimentos dedicados al almacenamiento de mercancías en altura

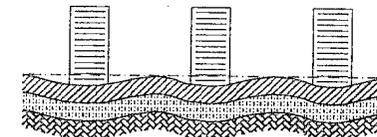


Figura 70-1

Son realmente cimentaciones y funcionan como losas de hormigón armado o pretensado, en general fuertemente armadas. En algunos casos las estanterías ocupan posiciones fijas pero es frecuente el caso de que la posición varíe a lo largo de la vida del pavimento.

Los actuales recursos de cálculo informático permiten una modelización por elementos finitos de las distintas cargas. (Fig. 70-1).

La Tabla T-70.1 contiene una clasificación de las sobrecargas según el tipo de uso.

TABLA T-70.1

CLASIFICACIÓN DE PAVIMENTOS PARA ALMACENAMIENTO (70.1)

TIPO	SOBRECARGA POR m <sup>2</sup> (kN/m <sup>2</sup> )	SOBRECARGA POR m <sup>2</sup> POR m DE ALTURA DE ALMACENAMIENTO (kN/m <sup>2</sup> )
Almacenes frigoríficos.	1,50 (mínimo)	5,00
Almacenes de libros, papel, etc.	15,00 (mínimo)	4,50
Almacenes de oficinas (archivos).	-	4,00 (p.m. de altura de documentos)
Almacenes de distribución de mercancías.	-	2,50
Salas de máquinas.	5,00	-
Salas de imprenta.	12,50	-
Naves siderúrgicas, fundiciones, etc.	20,00	-

**-Pavimentos dedicados a soportar cargas de tráfico**

Además de las cargas producidas por las ruedas (Fig. 70-2 a) y b)), los cambios termohigrométricos producen también tensiones en las losas (Fig. 70-3) y (Fig. 70-4).

CARGA DE RUEDA

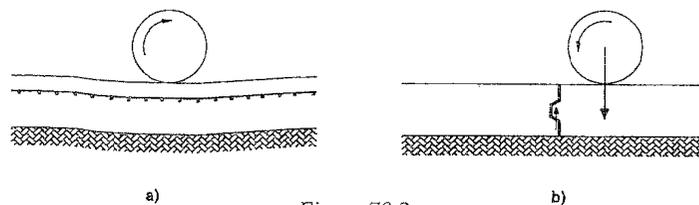


Figura 70-2

ACCIONES ACTUANTES SOBRE EL PAVIMENTO RETRACCIÓN

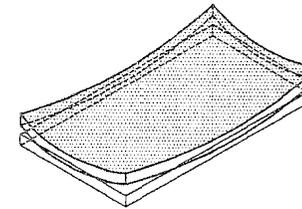


Figura 70-3

ACCIONES ACTUANTES SOBRE EL PAVIMENTO ENFRIAMIENTO

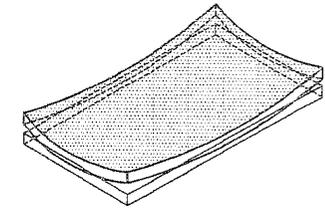


Figura 70-4

Por supuesto también los pavimentos de almacenamiento, si tienen juntas, experimentan tensiones derivadas de los fenómenos termohigrométricos, pero en general están coartadas por el peso de la carga.

En cualquier tipo de pavimento pueden o no disponerse juntas de contracción y de dilatación, u omitirlas, pero esta segunda solución requiere cuantías elevadas de acero.

**Los pavimentos para tráfico, a los cuales se dedica el resto de este capítulo, son estructuras de hormigón en masa o muy ligeramente armado.**

Actualmente existen tres tipos genéricos:

- Pavimentos de hormigón en masa.
- Pavimentos de hormigón con una armadura ligera de retracción y temperatura.
- Pavimentos de hormigón armado con fibras. Su uso, que es ya muy amplio, crece rápidamente <sup>1</sup>.

Una sección general de un pavimento es la indicada en la figura 70-5.

Algunos aspectos merecen comentarios específicos:

- **Explanada.** Es la disponible en la obra. Si no tiene la calidad suficiente, exigirá un espesor alto de pavimento, por lo que para evitar esto, bien se compacta o estabiliza con cemento y/o cal la explanación o bien se incrementa el espesor de sub-base.
- **Sub-base.** Ejerce una función de reparto de cargas y está constituida por mezclas de arena y grava con ligeros porcentajes de limos. La figura 70-5 indica husos granulométricos recomendables.

<sup>1</sup> No se tratan en este Capítulo.

### SECCIÓN GENERAL DE UN PAVIMENTO

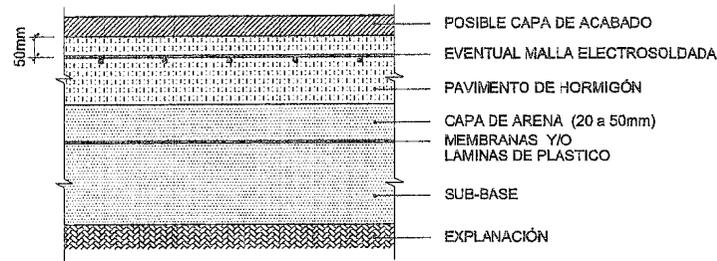


Figura 70-5

- **Membrana y/o hojas de plástico.** Su disposición tiene ventajas e inconvenientes.

Si sobre el pavimento se almacenan sustancias que pueden alterarse por la humedad y el nivel freático está a nivel próximo al de la explanación, su empleo es aconsejable. (P.ej. silos lineales de fábricas de cemento en los que sobre el pavimento se almacena clinker).

El inconveniente de esta solución es que si se infiltra agua por las juntas desde la cara superior del pavimento, no puede alcanzarse la sub-base para ser drenada. (La explanación debe tener para ello la pendiente adecuada  $\approx 0,5/1\%$ ).

Si el pavimento está al aire libre, o es previsible su riego frecuente, una solución es disponer sobre la lámina una capa de 20/50 mm compactada sobre la que se deposita la base de hormigón. Esta capa desempeñaría en este caso la función drenante.

Si no es previsible la entrada de agua, se dispone la lámina y no se dispone capa de arena.

La función de la membrana u hoja de plástico es, además, reducir el rozamiento entre el pavimento y la sub-base, para facilitar los corrimientos debidos a causas termohigrométricas.<sup>1</sup>

- **Pavimento.** Como decimos, puede ser de hormigón en masa, de hormigón con una ligera armadura de malla electrosoldada o de hormigón armado con fibras.

La malla de acero, si existe, es **exclusivamente una armadura de retracción y temperatura** y en modo alguno una armadura de flexión. Conviene colocarla a unos 50 mm de la cara superior. Si se coloca muy próxima a dicha cara, el acabado de la superficie de la losa con regla vibrante, bandeja, etc., es difícil debido a la tendencia de la grava a rodar sobre los alambres transversales.

<sup>1</sup> La costumbre, desgraciadamente frecuente, de disponer bajo la losa del pavimento un "encachado" es decir una capa de grava es de pésima calidad. En primer lugar la grava no admite compactación de ningún tipo y en segundo lugar al no poderse disponer una superficie superior lisa y cerrada, no facilita el deslizamiento de la losa.

- **Capa de acabado.** Se dispone a veces, en general por uno de los dos motivos siguientes:

- Anular la producción de polvo de la superficie del pavimento.
- Hacer a éste resistente al posible ataque de sustancias almacenadas agresivas para el hormigón.

### 70.2 ACCIONES SOBRE LOS PAVIMENTOS

Aparte de las cargas específicas debidas al posible uso industrial del pavimento, siempre es necesario prever cargas de tráfico. Incluso cuando el uso normal del pavimento no sea el de soportar tráfico, debe considerarse siempre el producido para el equipamiento de la construcción. (P.ej. llegada de los camiones con los puentes grúa) u operaciones de mantenimiento.

#### a) Carga producida por las ruedas de vehículos

En primer lugar debe considerarse la presión de contacto de la rueda con el pavimento. La Tabla T-70.2 contiene la información de los casos más frecuentes.

TABLA T-70.2

TIPO DE VEHÍCULO	PRESIONES DE CONTACTO (N/mm <sup>2</sup> )
Turismo	0,23
Camión	0,50
Carretilla de neumáticos	0,75
Carretilla de ruedas macizas	2,00

La figura 70-6 permite estimar el radio  $r$  en mm del círculo equivalente al área de contacto, en función de la carga por eje y del tipo de rueda (sencilla o gemela).

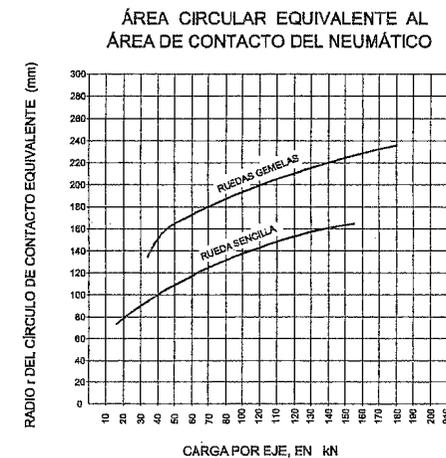


Figura 70-6

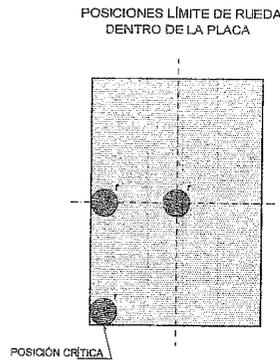


Figura 70-7

La figura 70-7 indica las posiciones críticas de la rueda en la losa.

Aunque como veremos más adelante, los programas de elementos finitos permiten hoy un cálculo directo y más preciso de las losas de pavimentos, exponemos a continuación el tratamiento clásico.

Las tensiones críticas de flexotracción vienen dadas por la fórmula clásica de la teoría de la elasticidad de WESTERGAARD, modificada por PICKET para obtener un mejor ajuste experimental.

$$\sigma_{c, flex, máx} = \alpha \frac{P}{h^2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\frac{r}{R}}}{0,925 + 0,22 \frac{r}{R}} \right] \quad [70-1]$$

donde:

$\alpha$  Coeficiente dependiente del tipo de junta entre losas:

$\alpha = 2,3$  para juntas con ranura y lengüeta (Fig. 70-14 b)) o con pasadores (Fig. 70-15 a)).

$\alpha = 3,5$  para otros tipos de juntas.

$P$  Carga por rueda en  $N$ .

$h$  Canto de la losa en mm.

$R$  Radio de rigidez relativa.

$$R = \sqrt[4]{\frac{E'_{ci} h^3}{12(1-\rho^2)K}} \quad [70.2]$$

$E'_{ci}$  Módulo instantáneo de deformación del hormigón. (Véase [28.11] y correcciones por tipo de árido).

$K$  Módulo de balasto en  $N/mm^2$  medido en placa de 750 mm de diámetro. (Véase la Tabla T-70.3).

TABLA T-70.3

VALORES DEL MÓDULO DE BALASTO  $K_{e,750}$  DE LOS SUELOS DE EXPLANACIÓN COMPACTADOS AL 95% DE DENSIDAD PROCTOR NORMAL (70.2)

TIPO DE SUELO	CALIDAD DEL SOPORTE	$K_{e,750}$ ( $N/mm^2$ ) (*)
Suelos finos, predominando limos y arcillas.	Baja	0,02 - 0,033
Arenas y mezclas de arenas y gravas con proporción reducida de arcillas.	Media	0,035 - 0,047
Arenas y mezclas de arenas y gravas, sin finos plásticos.	Alta	0,05 - 0,060
Sub-bases de suelo cemento.	Muy alta	0,069 - 0,111

(\*) La tabla está basada en la determinación de  $K_e$  con placa de 750 mm de diámetro. Si se emplea la placa cuadrada de 300 · 300 mm, equivalente a una circular de 340 mm y por tanto  $K_{e,750} = K_{e,300} \cdot \frac{750}{340}$

$\rho$  Módulo de Poisson del hormigón ( $\rho \approx 0,16/0,18$ ).

$r$  Radio del área circular equivalente al área de contacto de la rueda en mm.

#### b) Acciones producidas por la retracción y los cambios de temperatura

Estas tensiones son nulas en el borde de la losa y crecen linealmente hasta alcanzar el máximo en la línea media. Dependen del coeficiente  $\mu$  de rozamiento entre la losa y la sub-base. La experimentación muestra para que se movilice el rozamiento, con las distancias usuales entre juntas (4 a 7 m), es necesario que se produzca un corrimiento en el borde del orden de 1,5 mm.

Llamando

$\delta L_r$  Corrimiento en mm del borde de la losa debido a la retracción.

$\delta L_t$  Corrimiento en mm del borde de la losa debido a la variación de temperatura.

El rozamiento que se moviliza vale por tanto

$$K_r \cdot \mu \quad [70.3]$$

donde

$$K_r = \frac{\delta L_r + \delta L_l}{1,5} \leq 1 \quad [70.4]$$

Estableciendo el equilibrio en una sección de ancho  $b$  mm, situada en el eje de la losa paralela a la junta, y llamando  $\sigma_{ct}$  a la tensión de tracción producida en el hormigón

$$\sigma_{ct} \cdot b \cdot h = K_r \cdot \mu \cdot \frac{L}{2} \cdot b \cdot \frac{(g+q)}{1.000} \quad [70.5]$$

donde

$\sigma_{ct}$  = Tensión de tracción en el hormigón de la losa (N/mm<sup>2</sup>).

$h$  = Canto de la losa en mm.

$L$  = Distancia entre juntas en las losas.

$g$  = Peso propio de la losa de hormigón (kN/m<sup>2</sup>).

$q$  = Valor cuasi permanente de la sobrecarga que actúa sobre la losa (kN/m<sup>2</sup>).

En función de las características del suelo, la incorporación de una sub-base de calidad, permite mejorar los valores del módulo de reacción, según la Tabla T-70.4.

**TABLA T-70.4**

**VALORES DE  $K_{e,750}$ , INTERPONANDO SUB-BASE SOBRE LA EXPLANACIÓN (70.2)**

$K_{e,750}$ N/mm <sup>3</sup>	Espesor de sub-base $e_{s,750}$			
	100 mm	150 mm	230 mm	300 mm
Sub-base granular $K_{e,750}$ (N/mm <sup>3</sup> )				
0,014	0,018	0,021	0,024	0,030
0,028	0,036	0,039	0,044	0,053
0,055	0,061	0,064	0,075	0,087
0,083	0,089	0,091	0,103	0,119

(\*) La tabla está basada en la determinación de  $K_{e,750}$  con placa de 750 mm de diámetro. Si se emplea la placa cuadrada de 300 · 300 mm, equivalente a una circular de 340 mm y por tanto  $K_{e,750} = K_{e,300} \cdot \frac{750}{340}$ .

(\*\*) Se supone la subbase compactada al 95% de densidad Proctor normal.

De [70-5]

$$\sigma_{ct} = \frac{\mu L (g+q) K_r}{2.000 h} \quad [70-6]$$

con la condición  $\delta L_r + \delta L_l \geq 1,5 m$

Los valores de  $\mu$  vienen indicados en la Tabla T-70.5

**TABLA T-70.5**

**VALORES DE  $\mu$**

TIPO DE SUB-BASE	COEFICIENTE $\mu$
Sub-base con superficie superior cerrada y lisa o con capa de arena o láminas aislantes.	$\mu = 1$
Sub-base con superficie rugosa.	$\mu = 2$
Casos intermedios.	$\mu = 1,5$

Para un cálculo simplificado de  $\delta L_r$  y  $\delta L_l$ , puede adoptarse un valor del acortamiento de retracción

$$\varepsilon_s = 0,35 \cdot 10^{-3}$$

y un coeficiente de dilatación térmica

$$\alpha = 10^{-5}$$

Puede calcularse  $\varepsilon_s$  con mayor precisión de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 28.

### 70.3 COMPROBACIÓN DE TENSIONES EN EL PAVIMENTO

Se establece una doble comprobación.

Por un lado, la comprobación bajo las acciones del tráfico. De acuerdo con [70.1], debe cumplirse

$$\gamma_f \sigma_{c,flex,m\acute{a}x} \leq f_{ctd,flex} \quad [70.7]$$

donde  $f_{ctd,flex}$  se deriva de [28.5] con  $f_{ctd,flex} = \frac{f_{ck,flex}}{\gamma_c}$

Los valores  $\gamma_c$  suelen oscilar de 1,5 a 1,8, según el nivel de riesgo. Los valores de  $f_{ctd,flex}$  vienen dados por la Tabla T-70.6.

TABLA T-70.6

VALORES DE CÁLCULO DE LA RESISTENCIA A FLEXOTRACCIÓN

Tipo de hormigón	H-20	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50
$f_{ctk}$	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
$f_{ctd}$	$\gamma_c = 1,5$	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,7
	$\gamma_c = 1,8$	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,3
$f_{ck,flex}$	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3
$f_{ctd,flex}$	$\gamma_c = 1,5$	1,9	2,2	2,5	2,8	3,0	3,5
	$\gamma_c = 1,8$	1,6	1,9	2,1	2,3	2,5	2,9

Una segunda comprobación es la correspondiente a la coincidencia de cargas de rueda con las acciones termohigrométricas, para lo que se adopta

$$\frac{\sigma_{c,flex,m\acute{a}x}}{f_{ctd,flex}} + \frac{\sigma_{cr}}{f_{ctd}} \leq 1 \quad [70.8]$$

donde

$\sigma_{cr,flex,m\acute{a}x}$  viene dada por [70.1]

$f_{ctd,flex}$  se obtiene en la tabla T-70.6

$\sigma_{cr}$  viene dada por [70.6]

$f_{ctd}$  se obtiene en la Tabla T-70.6

70.4 CÁLCULO DE LA ARMADURA EN PAVIMENTOS CON ARMADURA DE RETRACCIÓN Y TEMPERATURA

Como ya hemos indicado anteriormente, el pavimento se calcula y funciona como una losa de hormigón en masa. La armadura se coloca exclusivamente para controlar la fisuración debida a la retracción y a las variaciones térmicas.

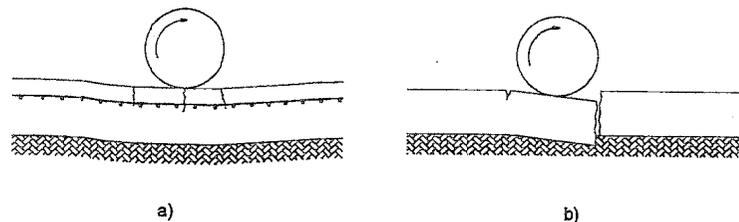


Figura 70-8

La figura 70-8 indica la diferencia de un pavimento armado (Fig. a) y de uno en masa (Fig. b)). Mientras en la solución armada, la malla controla la apertura de fisuras y la posible entrada de agua a la sub-base, la solución de hormigón en masa se fractura al fisurarse y deja entrar el agua a la sub-base, iniciándose un ciclo que acaba con la fractura de zonas amplias de losa.

Llamando  $A_s$  a la sección de acero de la losa por unidad de ancho y  $A_c$  a la de hormigón, también por unidad de ancho, para resistir las tracciones originadas por la retracción y los cambios térmicos debe cumplirse.

$$A_s \cdot \sigma_s \geq A_c \cdot \sigma_{cr} \quad [70.9]$$

donde  $\sigma_{cr}$  viene dada por [70.6] y  $\sigma_s$ , con mallas electrosoldadas con  $f_{yk} = 500 \text{ N/mm}^2$  suele limitarse a  $250/280 \text{ N/mm}^2$  para controlar la fisuración.

Es recomendable mantener una cuantía geométrica mínima del 0,5‰ en cada dirección.

70.5 MÉTODO DE LA NORMA ACI 330 R-92

La norma citada (70.2) titulada "Guide for Design and Construction of Concrete Parking Lots" ha elaborado una guía, basado en estudios realizados mediante programas de elementos finitos por la P.C.A (Portland Cement Association) y que incluye los gráficos de la figura 70-9, que para los distintos valores del módulo de balasto  $K$  ( $\text{N/mm}^3$ ) y cargas por eje, simple o tándem, proporciona directamente el espesor de la losa  $h$  en mm y la tensión de flexotracción  $\sigma_{c,flex}$ .

Los suelos de explanación tienen un valor del módulo de balasto indicado aproximadamente en la Tabla T-70.3.

Si el valor de  $K_e$  resulta bajo para las cargas previsibles, puede compactarse la sub-base hasta alcanzar los valores indicados en la Tabla T-70.4.

La Norma ACI 330 emplea una resistencia a flexotracción definida por el valor

$$f_{ck,flex} = 0,44 (f_{ck})^{2/3} \quad [70.10]$$

Este valor es algo más alto que los proporcionados por la normativa europea, pero lo mantenemos ya que el método ha sido investigado con base en él.

Para el cálculo del pavimento, además de controlar el valor de  $\sigma_{c,flex}$  obtenido mediante los gráficos de la figura 70-9, debe vigilarse la fatiga producida por las cargas repetidas, lo que se comprueba con el gráfico de la figura 70-10.

**GRÁFICO DE CÁLCULO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS  
CON TRANSFERENCIA DE CAUSA A LA LOSA CONTIGUA**

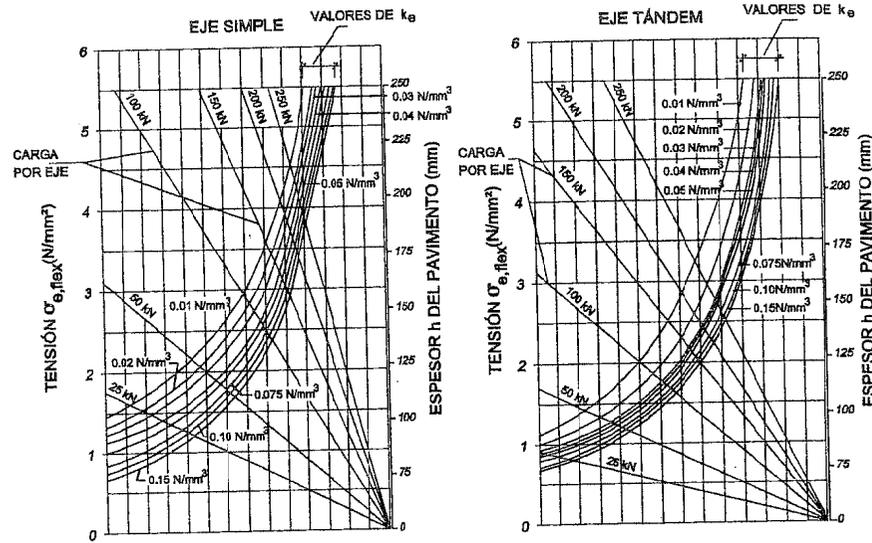


Figura 70-9

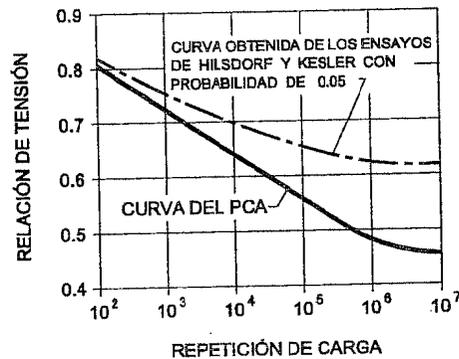


Figura 70-10

Los estudios alemanes, en particular los de HILSDORF y KESLER ofrecen un margen más amplio que los originales de la PCA.

Su uso se aclara en el ejemplo siguiente.

**EJEMPLO 70.1**

Proyectar un pavimento para uso industrial en el que se prevé el tráfico de dos camiones diarios, durante una vida útil de 20 años. El camión tiene una carga de eje simple delantero de 55 kN y el eje trasero-tándem tiene una carga de 140 kN. El módulo de balasto es de 0,05 N/mm³. Las dimensiones de losas son de 4,00 · 7,00 metros,  $\epsilon_s = 0,30 \cdot 10^{-3}$ . Variación térmica prevista  $\Delta T = 15^\circ\text{C}$ .  $\mu = 1,0$ . El número de repeticiones de carga por eje es de

$$N = 2 \cdot 20 \cdot 365 = 14.600 \text{ repeticiones de cada eje.}$$

Suponemos  $h = 175 \text{ mm}$ .

Eje simple: para 175 mm resulta  $\sigma_{c,flex} = 1,1 \text{ N/mm}^2$ . (Gráfico de la fig. 70-9).

Eje tándem:  $\sigma_{c,flex} = 1,0 \text{ N/mm}^2$ . (Gráfico de la fig. 70-9).

Probamos con hormigón de 30 MPa,  $f_{ctk,flex} = 0,44 (30)^{2/3} = 4,24 \text{ N/mm}^2$

Relación de tensiones:

Eje simple  $\frac{1,1}{4,24} = 0,25$

Y en la figura 70-10 se puede exceder con mucho el número de 14.600 ciclos.

Eje tándem  $\frac{1,00}{4,24} = 0,24 \text{ idem.}$

**Tensiones debidas a variaciones termohigrométricas**

En el sentido de 7,00 m

$$\delta L_r = 3.500 \cdot 0,30 \cdot 10^{-3} = 1,05 \text{ mm}$$

$$\delta L_t = 3.500 \cdot 15 \cdot 10^{-5} = 0,53 \text{ mm}$$

$$k_t = \frac{\delta L_r + \delta L_t}{1,5} = \frac{1,58}{1,5} = 1,05$$

$$\sigma_{ct} = \frac{1 \cdot 7.000 \cdot 43,75 \cdot 1,05}{2.000 \cdot 175} = 0,09 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ct,d} = 1,35 \cdot 0,09 = 0,12 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ctr} = 0,21 \sqrt[3]{30^2} = 2,03 \text{ N/mm}^2$$

Con  $\gamma_c = 1,5 \quad f_{cd,t} = \frac{2,03}{1,5} = 1,35 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_{ct,d} = 0,12 < f_{ct,t} = 1,35$

Tensiones debidas a flexión producida por las ruedas

$\sigma_{c,flex} = 1,1 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_{cd,flex} = 1,35 \cdot 1,1 = 1,49 \text{ N/mm}^2$

$f_{ck,flex} = 4,24 \text{ N/mm}^2$

$f_{ctd,flex} = \frac{4,24}{1,5} = 2,83 \text{ N/mm}^2$

Luego  $\sigma_{cd,flex} < f_{ctd,flex}$

Comprobación bajo tensiones combinadas debidas a las variaciones termohigrométricas y a la carga de rueda

De acuerdo con [70.8]

$\frac{1,1}{2,83} + \frac{0,09}{1,35} < 1$

Armadura necesaria para retracción y temperatura

De acuerdo con [70.9]

En la dirección de los 7,00 m

$A_s \cdot 280 = 4.000 \cdot 175 \cdot 0,09$

$A_s = 225 \text{ mm}^2$  en el ancho de 4,00 m

La condición de cuantía mínima exige  $4.000 \cdot 175 \cdot 0,0005 = 350 \text{ mm}^2$

$\phi 5$  a 200 mm

En la dirección de los 4,00 m

$A_s \cdot 280 = 7.000 \cdot 175 \cdot 0,09 \cdot \frac{4}{7} = 225 \text{ mm}^2$  en el ancho de 7,00 m.

Se dispone, como cuantía mínima

$\phi 5$  a 200 mm

Empleamos malla ME- 200 · 200 · 5 · 5

## 70.6 JUNTAS Y OTROS DETALLES CONSTRUCTIVOS

En la figura 70-11 se indican todos los tipos de juntas que pueden resultar necesarios en un pavimento enfocadas siempre a no coartar los efectos termohigrométricos. Lo que sigue está extractado del Manual de Detalles Constructivos (70.3).

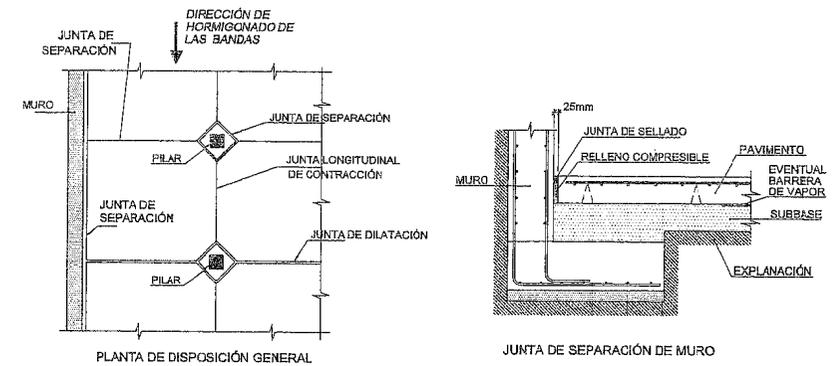


Figura 70-11

Figura 70-12

**Juntas de separación.** Se disponen en límites de pavimentos si están colocadas junto a muros y también alrededor de los pilares.

En la figura 70-12 se indica la necesidad de evitar el "apoyo" de la losa en los cimientos.

En la figura 70-13 se indica la junta alrededor de los pilares. La solución a) es para pilares rectangulares y la b) para columnas circulares.

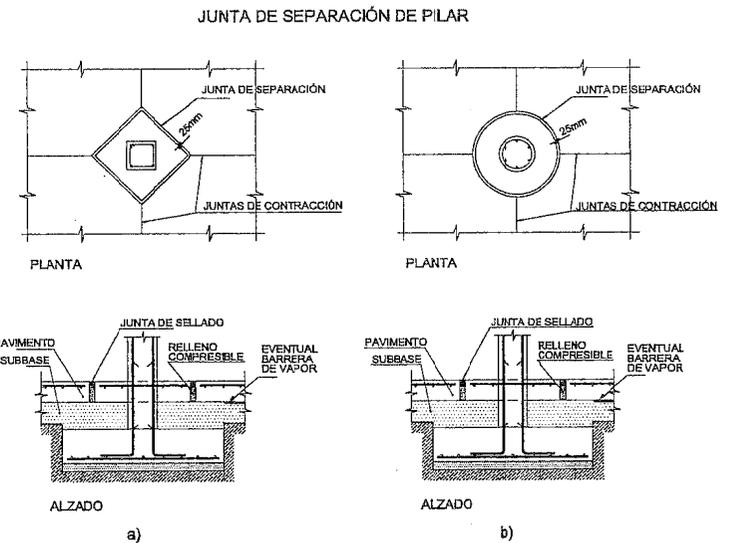


Figura 70-13

**Juntas longitudinales de contracción.** Deben disponerse a separación máxima de 5 m. (Fig. 70-14). Dado el procedimiento habitual de construcción, se adopta la solución de la figura. Antiguamente los pavimentos de este tipo se hormigonaban en tablero de damas con un solo tipo de juntas de contracción. Aunque este procedimiento es técnicamente muy correcto, la solución hoy día más frecuente es la de hormigonado en fajas continuas, con lo que aparecen juntas longitudinales y transversales de diferente tipo.

En áreas de aparcamientos de automóviles y análogas, la solución más frecuente es la indicada en la figura 70-14 a). Para grandes cargas de rueda se emplea la solución de la figura 70-14 b).

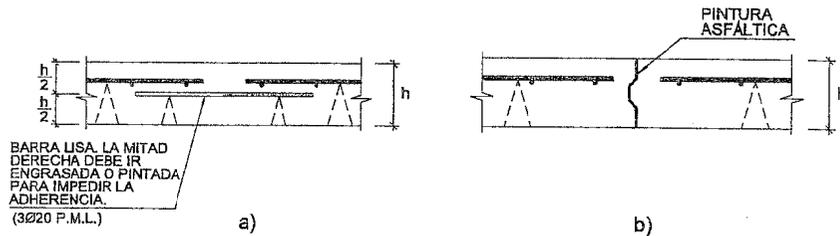


Figura 70-14

**Juntas transversales de contracción.** Se indican dos soluciones en la figura 70-15. La separación máxima suele establecerse en 7,50 m.

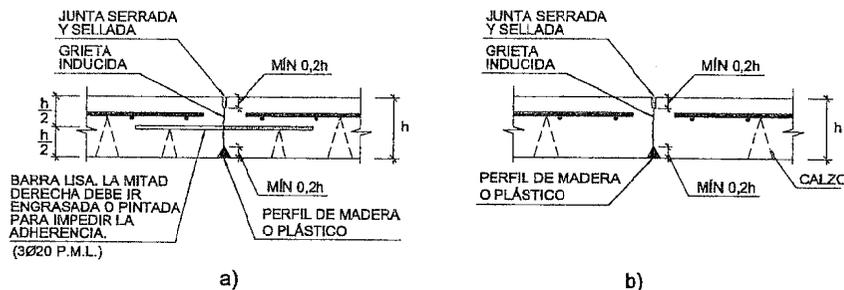


Figura 70-15

La solución a) es la más frecuente y la habitual en aparcamientos de automóviles. La solución b) se emplea para grandes cargas de rueda.

En ambos casos la solución se consigue serrando el hormigón joven para inducir la grieta. El rozamiento entre labios de la grieta tiene una buena capacidad de transmisión de cargas.

**Juntas de dilatación.** Se disponen cada 20/30 m en sentido longitudinal. La figura 70-16 indica una solución clásica de pasadores para transmitir cargas de una losa a otra.

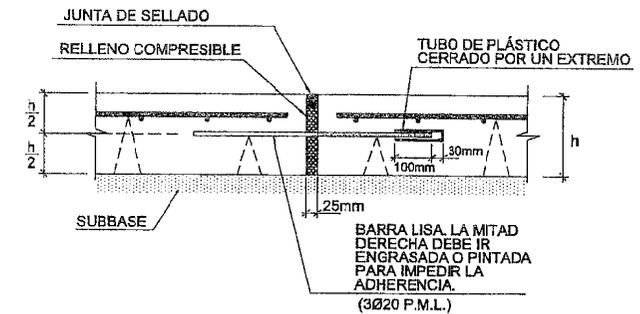


Figura 70-16

### Pasadores

- **Pasadores en juntas de dilatación.** Los pasadores deben disponerse de acuerdo con la tabla T-70.7 (Véase 70.2).

TABLA T-70.7  
DIMENSIONAMIENTO DE PASADORES EN JUNTAS DE  
DILATACIÓN (70.2)

Canto de losa (mm)	Diámetro del pasador (mm)	Longitud Introducción del pasador en cada losa (mm)
125	16	125
150	20	150
175	22	150
200	25	150
225	30	180

\* La separación entre pasadores es de 300 mm en todos los casos.

- **Pasadores de juntas de contracción.** El tipo de juntas de contracción longitudinales o transversales con pasadores (figuras 70-14 a) o 70-15 a)), solamente es necesario en caso de tráfico pesado. Para casos de tráfico ligero es suficiente con las soluciones de las figuras 70-14 b) ó 70-15 b) respectivamente.

En caso de pavimentos para tráfico pesado deben disponerse juntas con pasadores pero no de barras lisas engrasadas en su mitad, sino de barras corrugadas en la primera junta paralela al borde del pavimento, para evitar su desplazamiento.

La tabla T-70.8 incluye los datos para el dimensionamiento.

**TABLA T-70.8**  
**DIMENSIONAMIENTO DE PASADORES EN JUNTAS DE**  
**CONTRACCIÓN (70.2)**

CANTO DE LOSA (mm)	PASADORES ( $\phi$ mm)	SEPARACIÓN ENTRE PASADORES (mm)			
		DISTANCIA AL BORDE LIBRE MÁS PRÓXIMO O A LA JUNTA MÁS PRÓXIMA QUE PUEDE EXPERIMENTAR CORRIMIENTO (m)			
		3,00 m	3,50 m	4,00 m	7,00 m
125	12	750	750	750	700
150	12	750	750	750	600
175	12	750	750	750	500
200	14	750	750	750	400
225	14	900	900	900	600

\* La longitud embebida en cada losa debe ser de 300 mm.

**Refuerzos de borde.** En pavimentos a la intemperie es importante reforzar el borde para evitar que se descalce por las lluvias (Fig. 70-17).

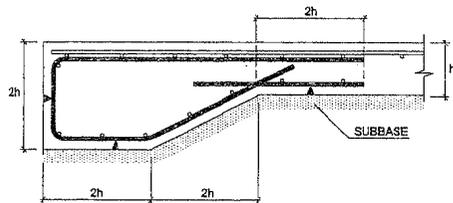


Figura 70-17

**Calzos.** La figura 70-18 indica la posición de los calzos. Habitualmente se disponen de acuerdo con la figura 50-17.

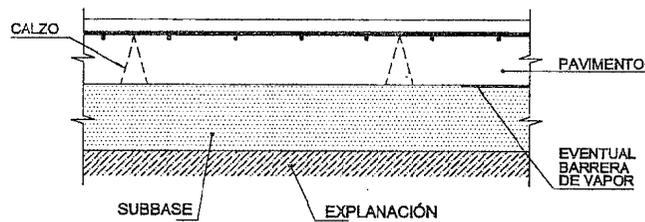


Figura 70-18

La armadura de malla de pavimento no debe ser excesivamente fina, para que tenga rigidez suficiente para mantenerse en posición.

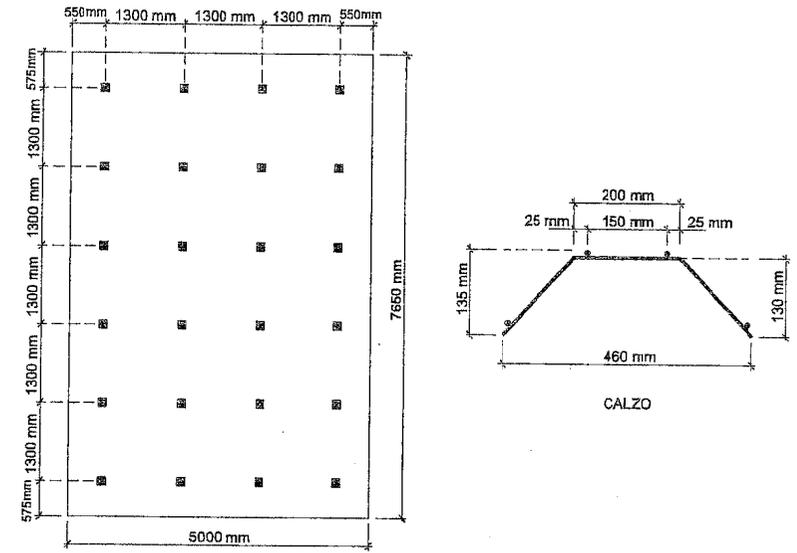


Figura 70-19

La figura 70-19 indica una distribución de un caso real. El tipo de calzo es el expuesto en la figura 50-17

## BIBLIOGRAFÍA

- (70.1) CURSO DE INTEMAC SOBRE PAVIMENTOS DE HORMIGÓN. 1998.
- (70.2) GUIDE FOR DESIGN AND CONSTRUCTION OF CONCRETE PARKING LOTS. (ACI 330 R-92) ACI. Detroit. 1998.
- (70.3) CALAVERA, J, "Manual de detalles constructivos en obras de hormigón armado". INTEMAC. Madrid. 1993.

## ANEJO 1

### COMPLEMENTOS SOBRE CÁLCULO NO LINEAL

#### A-1.1 CÁLCULO DE LA ROTACIÓN

La rotación plástica  $\theta_{pl}$  se obtiene, como vimos en el Capítulo 17, integrando la curvatura plástica a lo largo de la zona plastificada de longitud  $\ell_{pl}$ . La zona plastificada debe definirse teniendo en cuenta el desplazamiento  $k_{1d}$  visto en 39.2.3.2 c) (fig. A-1-1).

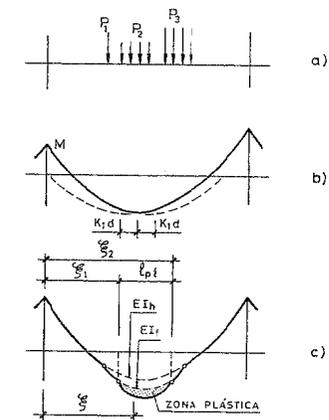


Figura A-1-1

La curvatura media en una sección de la pieza viene dada por

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{s,m} - \varepsilon_{c,m}}{d} \quad [A-1.1]$$

De acuerdo con [17.13]

$$\theta_{pl}(\xi_1, \xi_2) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi_{pl} d\xi \quad [A-1.2]$$

donde  $\xi$  es la abscisa en la figura A-1-1.

Como  $\varphi = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d}$  y, por compatibilidad de deformaciones,  $\varepsilon_c = \frac{x}{1 - \frac{x}{d}} \varepsilon_s$ ,

sustituyendo, se tiene: 
$$\varphi = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \quad [A-1.3]$$

donde  $x$  es la profundidad de la fibra neutra.

Por tanto,

$$\varphi_{pl} = \frac{\varepsilon_{sm}(\xi) - \varepsilon_{sm,y}}{d - x(\xi)} \quad [A-1.4]$$

siendo:

$\varepsilon_{sm}(\xi)$  = Alargamiento medio del acero en la sección de abscisa  $\xi$ .

$\varepsilon_{sm,y}$  = Alargamiento del acero para  $\sigma_s = f_{yk}$ .

$x(\xi)$  = Profundidad de la fibra neutra en la sección de abscisa  $\xi$ .

De acuerdo con [A-1.4] y sustituyendo en [A-1.2].

$$\theta_{pl} = \int_0^{\ell_p} \frac{[\varepsilon_{sm}(\xi) - \varepsilon_{sm,y}]}{d - x(\xi)} d\xi \quad [A-1.5]$$

Aceptando un diagrama bilineal para el acero, el MODEL CODE-90 simplifica [A-1.5] bajo la forma

$$\theta_{pl} = \int_0^{\ell_p} \frac{0,8}{d - x} \left(1 - \frac{\sigma_{srl}}{f_{yk}}\right) (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{sy}) d\xi \quad [A-1.6]$$

donde:

0,8 = Coeficiente para tener en cuenta la forma real del diagrama tensión-deformación de la armadura en la zona plástica.

$x$  = Profundidad de la fibra neutra, que se supone constante en toda la longitud  $\ell_{pl}$ .

$\sigma_{srl}$  = Tensión en el acero cuando se alcanza la resistencia a tracción del hormigón (ver Capítulo 47).

$\varepsilon_{s2}$  = Alargamiento del acero en zona fisurada (Estado II).

$\varepsilon_{sy}$  = Alargamiento del acero correspondiente al límite elástico.

## A-1.2 COMPROBACIÓN DE DUCTILIDAD

Calculada  $\theta_{pl}$  mediante [A-1.6], debe comprobarse que la sección (en sentido más estricto, la zona  $\ell_{pl}$ ) posea ductilidad suficiente para garantizar esa rotación.

A falta de un estudio específico, puede usarse para ello el gráfico de la figura A-1-2, tomado del MODEL CODE-90<sup>1,2</sup>.

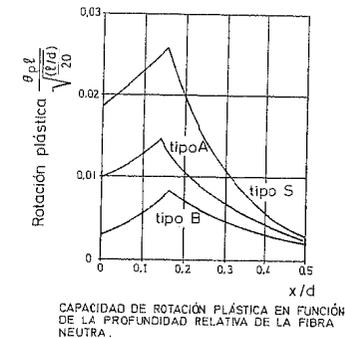


Figura A-1-2

La corrección  $\sqrt{\frac{\ell}{d}}$  obedece a que el gráfico fue construido con base en ensayos y estudios de piezas con relación  $\ell/d = 20$ . La definición de acero tipos A, B y S se hizo en 32.5.2.2.b.

- 1 La deducción puede seguirse en ELIGEHAUSEN, R. y LANGER, P. "Rotation capacity of plastic hinges and allowable degree of moment redistribution". Informe presentado a la Comisión Permanente VII del C.E.B. "Reinforcing steel and quality control". (1986).
- 2 El diagrama no considera los incrementos de ductilidad debidos a posible armadura transversal.

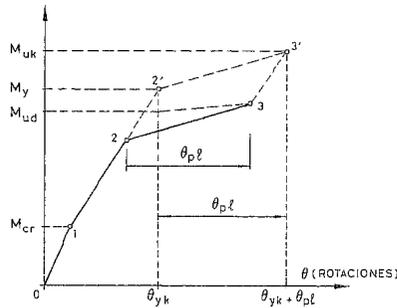


Figura A-1-3

### A-1.3 DIAGRAMAS MOMENTOS-ROTACIONES

El MODEL CODE-90 incluye, con carácter general, el indicado en la figura A-1-3.

El diagrama es trilineal, con un tramo 0-1 correspondiente a sección no fisurada, otro 1-2', correspondiente a sección fisurada, y otro 2'-3' correspondiente a la zona plástica. El diagrama de cálculo en el tramo 2-3 se obtiene por afinidad paralela a 1-2'

con relación  $\frac{M_{ud}}{M_{uk}}$ . El valor  $\theta_{pl}$  de la sección (zona) considerada, se obtiene mediante las fórmulas del apartado anterior, teniendo en cuenta el gráfico A-1-2<sup>1</sup>.

### A-1.4 DIAGRAMAS MOMENTOS-CURVATURAS Y DIAGRAMAS MOMENTOS-AXIL-CURVATURAS

La única Norma que contiene información, aunque compleja, sobre el tema, es el MODEL CODE-90. No se resume aquí por su extensión (véase, en particular, el apartado 3.8 del MODEL CODE-90).

## ANEJO 2

### CÁLCULO DE NUDOS

Con los nuevos métodos de cálculo las dimensiones de vigas y pilares se han reducido respecto a épocas anteriores. A ello han colaborado también las mejoras posibles en las resistencias de los hormigones. Correlativamente, se ha desarrollado el empleo de barras de alta resistencia en diámetros cada vez más gruesos. Todo ello ha conducido a que los nudos sean de menores dimensiones y se vean más fuertemente solicitados, y a que se hayan presentado en todos los países y también en España accidentes por este motivo.

Desde muchos puntos de vista los nudos son piezas muy desfavorablemente solicitadas y ya, en parte, vimos esto en los Capítulos 33 y 37.

La información que se recoge a continuación procede, fundamentalmente, de la Norma del ACI "Recommendations for Design of Beam - Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures". (ACI 392 R-76) basada en ensayos diversos.

En la figura A-2-1b) se indican las fuerzas actuantes sobre un nudo, considerado como un sólido rígido, y solicitado según A-2-1a), es decir, bajo acciones horizontales.

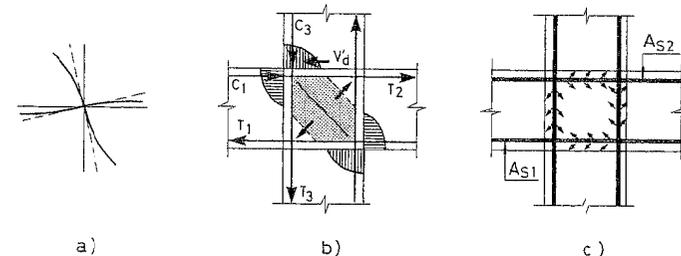


Figura A-2-1

<sup>1</sup> Para algunos cálculos, el tomar el valor característico,  $M_{uk}$ , puede no ser adecuado, debiendo ser sustituido por  $M_{um}$  (valor medio).

En la figura A-2-1c) se indican las tensiones transmitidas por adherencia por las barras al nudo. Si las tensiones son suficientemente altas pueden fisurar el nudo. Obsérvese en la figura A.2-1b) el tipo de fisura posible y las condiciones extraordinariamente desfavorables de adherencia de la armadura vertical del nudo que en su altura ha de transmitir por adherencia la fuerza  $C_3 + T_3$ .

En lo que sigue nos referimos a nudos de entramados, en los cuales el ancho real del pilar es igual o superior al de la viga y pertenecientes a uno de los dos tipos siguientes:

*Tipo I:* Nudo de estructuras a las cuales no se les exige que resistan deformaciones anelásticas importantes.

*Tipo II:* Nudos, en cuyo proyecto, la consideración básica es una importante resistencia en el campo anelástico, bajo acciones alternadas, con el fin de disipar cantidades considerables de energía, como ocurre por ejemplo en el caso de estructuras situadas en zonas sísmicas.

De acuerdo con el tipo en que la estructura se clasifique, la fuerza última de cualquier armadura de área  $A_s$ , se considerará como igual a:

$$\alpha A_s f_{yd} \quad [A-2.1]$$

donde:

$\alpha = 1$  para el Tipo I

$\alpha = 1,25$  para el Tipo II

El valor  $\alpha = 1,25$  se establece para aceptar que bajo grandes deformaciones plásticas, la armadura, una vez rebasada su escalón de relajamiento, alcance tensiones apreciablemente mayores que su límite elástico de cálculo.

a) Armadura mínima en el nudo

En el interior del nudo se dispondrán estribos, como mínimo como en los pilares que acometen al nudo.

b) Salvo que se compruebe que se cumple

$$N_d \leq 0,4 N_{db} \quad [A-2.2]$$

donde:

$N_d$  = Esfuerzo axil de cálculo

$N_{db}$  = Esfuerzo axil cuando  $\varepsilon_{cu} = 0,0035$  y  $\varepsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s}$   
el nudo llevará un área de estribos

$$A_{st} \geq 0,4 h_n s \left( \frac{A_c}{h_n b_n} - 1 \right) \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad [A-2.3]$$

rodeando la armadura del pilar, siendo:

$A_{st}$  = Área total de estribos.

$h_n$  = Dimensión exterior del estribo en la dirección en que se dispone el área  $A_{st}$ .

$s$  = Separación de estribos.

$b_n$  = Dimensión exterior del estribo en la dirección ortogonal a  $h_n$ .

$A_c$  = Área de la sección horizontal del nudo.

$f_{cd}$  = Resistencia de cálculo del hormigón.

$f_{yd}$  = Límite elástico de cálculo del acero de los estribos.

Para nudos del Tipo I, con vigas en las cuatro caras o en dos caras opuestas, no se necesita la armadura de área  $A_{st}$  en la dirección o direcciones confinadas por las vigas, salvo que se requiera por la condición de corte c) que más adelante se expone, o por barras del pilar en esquinas no confinadas. Se entiende por esquina no confinada aquella que sobresale más de 100 mm de las vigas que acometen al nudo, o situadas en nudos a los que no acometen vigas en las cuatro caras.

Para nudos del Tipo II, se cumplirá además de [A-2.3] la condición

$$A_{st} \geq 0,16 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot h_n \cdot s \quad [A-2.4]$$

y la separación entre estribos no será superior a 100 mm.

c) Comprobación a esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante en el nudo (fig. A-2-1b)) se calcula mediante la expresión:

$$V_d = T_2 + C_1 - V'_d$$

o lo que es lo mismo

$$V_d = T_2 + T_1 - V'_d \quad [A-2.5]$$

donde:

$V_d$  = Esfuerzo cortante en el nudo.

$T_2$  =  $A_{s2} \cdot f_{yd}$

$T_1$  =  $A_{s1} \cdot f_{yd}$

$V'_d$  = Esfuerzo cortante transmitido al nudo por el pilar superior.

$$\text{Si } V_d \leq V_c = 0,24 b_n h_n \beta \gamma \sqrt{f_{ck} \left( 1 + 0,30 \frac{N_{dm}}{A_c} \right)} \quad [A-2.6]$$

no son necesarios los estribos aparte de los especificados en a) y b) (unidades N y mm).

En [A-2.6]:

$N_{dm}$  = Valor mínimo del esfuerzo axial de cálculo concomitante con  $V_d$ . Para nudos de Tipo II,  $N_{dm} = 0$ .

$\beta$  = 1,4 para nudos del Tipo I.

$\beta$  = 1,0 para nudos del Tipo II.

$\gamma$  = 1,4 si el nudo está confinado por vigas a ambos lados del nudo en la dirección considerada.

$\gamma$  = 1,0 en otros casos.

Se tomará  $\gamma = 0$  si el nudo puede estar sometido a esfuerzo axial de tracción.

Si [A-2.6] no se cumple, se dispondrá un área de estribos dentro del nudo y rodeando a la armadura del pilar, de valor

$$A_{st} = \frac{(V_d - V_c)s}{1,15df_{yd}} \quad [A-2.7]$$

En el caso de nudos del Tipo II, el valor  $V_d - V_c$  en [A-2.7] no se tomará inferior a  $\frac{V_d}{3}$ .

d) Valor máximo del esfuerzo cortante

En todo nudo debe cumplirse:

$$V_d - V_c \leq 1,26\sqrt{f_{ck}} b_n h_n \quad [A-2.8]$$

$$V_d \leq 1,67\sqrt{f_{ck}} b_n h_n \quad [A-2.9]$$

(unidades N y mm)

## ANEJO 3

### RESISTENCIA DEL HORMIGÓN AL FUEGO

#### A-3.1 INTRODUCCIÓN

El hormigón estructural es, dentro de los materiales estructurales, uno de los que mejor comportamiento tiene frente a la acción del fuego.

Sin embargo, para que esa resistencia sea satisfactoria se requieren una serie de precauciones adicionales tanto en el cálculo en sí, como en los detalles constructivos.

De análoga manera a como se establece en el cálculo frente a acciones sísmicas, no se pretende que la estructura sometida a la acción del fuego conserve todas sus propiedades, sino que en general los objetivos que se pretenden son de dos tipos.

- Que la estructura, bajo la acción del fuego, conserve su capacidad resistente frente a estados límites últimos, el tiempo suficiente para que pueda ser desalojada<sup>1</sup>.

En relación con esto es necesario considerar que, en general, la acción del fuego produce gradientes de temperatura en las piezas lineales y sobre todo en las superficiales, que pueden no sólo incrementar los esfuerzos, sino variar su signo.

- Que los elementos estructurales mantengan su función separadora para limitar la propagación del calor, gases, etc.

El comportamiento del hormigón frente al fuego ha sido objeto de numerosas investigaciones. Las referencias (A-3-1), (A-3.2), (A-3.3), (A-3.4) y (A-3.5) contienen información importante. El Eurocódigo EC-2 (A-3.6) es un documento básico.

<sup>1</sup> En los edificios de gran altura los planteamientos son actualmente diferentes.

La Instrucción EHE trata el tema en su Anejo nº 7. Antes de entrar en el análisis de su documentación, resumiremos los mecanismos de daño del fuego sobre las estructuras de hormigón.

### A-3.2 MECANISMOS DE DAÑO DEL FUEGO SOBRE LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN<sup>1</sup>

El ataque del fuego es siempre un fenómeno muy complejo ya que actúa sobre un material compuesto de acero y hormigón, con comportamientos y reacciones muy diferentes ante la elevación de temperaturas. Basta citar los aspectos siguientes, que serán considerados más adelante:

- Alteraciones producidas en las características mecánicas del hormigón.
- Alteraciones producidas en las características mecánicas de las armaduras.
- Efecto sobre la adherencia entre ambos materiales.
- Efecto de las deformaciones impuestas como consecuencia de las dilataciones parcial o totalmente impedidas.
- Esfuerzos producidos por gradientes de distribución de temperaturas.

La evaluación del problema requiere estudios experimentales complejos y sobre todo un elevado grado de especialización y programas informáticos específicos para el cálculo estructural bajo la acción del fuego.

La situación de los incendios reales difiere frecuentemente de los ensayos normalizados, según se indica en la figura A-3-1. Véase IZQUIERDO BERNALDO DE QUIRÓS (A-3.7) y la referencia (A-3.8).

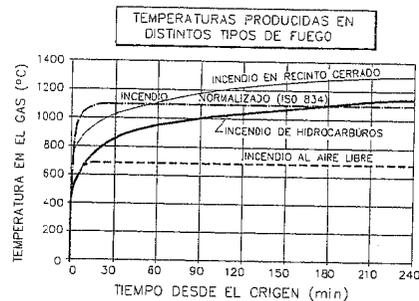


Figura A-3-1

La figura A-3-2 indica la variación del calor específico del hormigón en función de la temperatura. Como se ve, presenta una elevación gradual con un pico muy acusado debido a la absorción de calor al evaporarse el agua. Desafortunadamente, este

aspecto positivo va acompañado de una dilatación y evaporación del agua de los poros aislados, lo que produce un desprendimiento explosivo del recubrimiento. El espesor del recubrimiento es por este motivo esencial en la resistencia de las estructuras de hormigón al fuego.

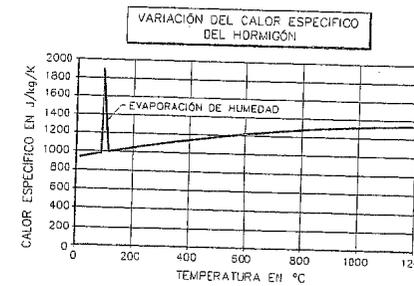


Figura A-3-2

La distribución de temperaturas en una viga sometida a un fuego por su cara inferior se muestra en la figura A-3-3. Puede apreciarse el incremento más rápido en las esquinas, afectadas por ambas caras. De ahí el riesgo, comparativamente más elevado, para las barras de esquina.

Con los áridos habituales, calizos o silíceos, el hormigón al verse afectado por el fuego y según las temperaturas alcanzadas sufre una serie de cambios de coloración que se recogen en la figura A-3-4.

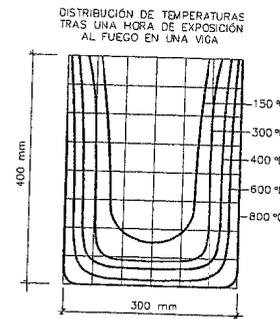


Figura A-3-3

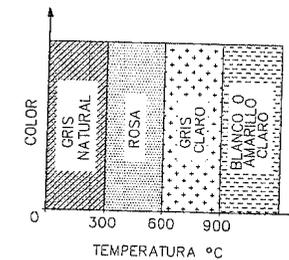


Figura A-3-4

Al aumentar la temperatura en el hormigón, se registra un descenso de resistencia y de módulo de elasticidad, pero acompañado de importantes aumentos del acortamiento de rotura (Fig. A-3-5). Esto permite al hormigón absorber las compresiones derivadas de las dilataciones coartadas sin gran daño en muchos casos.

La figura A-3-6 tomada de (A-3.8) refleja la resistencia residual del hormigón enfriado después de haber sido sometido a una temperatura determinada ( $f_{c, res}$ ), en

<sup>1</sup> Este apartado resume información de mi libro "Patología de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado" (A-3.8).

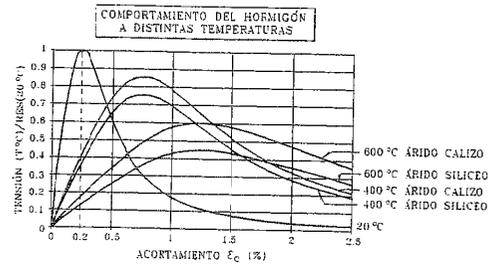


Figura A-3-5

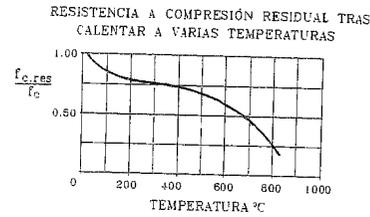


Figura A-3-6

función de la resistencia del hormigón antes de ser sometido a temperaturas superiores a la ambiente ( $f_c$ ).

El fuego afecta también al comportamiento de las armaduras, aunque de forma diferente al caso del hormigón. La figura A-3-7 indica, para armaduras de acero de dureza natural, la variación del diagrama tensión-deformación para diversas temperaturas. El alargamiento repartido bajo carga permanece prácticamente estable en valores del orden del 2,5%, con independencia de la temperatura.

Un aspecto crítico en el caso de estructuras de hormigón sometidas a incendios, es la alteración de la adherencia entre armaduras y hormigón. La perturbación de esta característica es mayor después del incendio, que durante la máxima temperatura alcanzada. La figura A-3-8 muestra la relación de la tensión de rotura de adherencia ( $\tau_{u,inc}$ ) después del incendio y la anterior al mismo ( $\tau_u$ ). Como puede observarse, el deterioro es muy rápido para temperaturas superiores a 400° C.

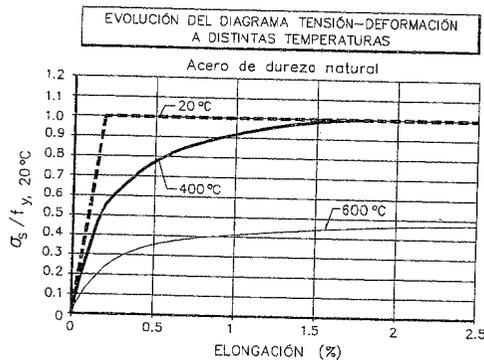


Figura A-3-7

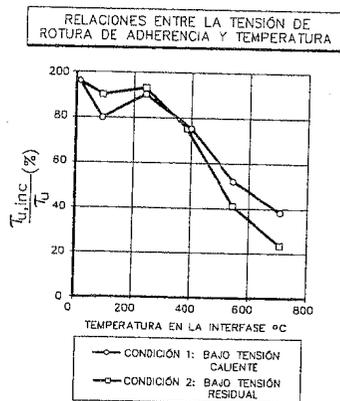


Figura A-3-8

La figura A-3-9 indica un cálculo real (realizado por J.M. IZQUIERDO BERNALDO DE QUIRÓS en un Informe de INTEMAC) del estado de un pilar

sometido a flexión compuesta bajo la acción del fuego. Puede verse el diferente estado de afectación según la excentricidad relativa a que esté sometida la pieza.

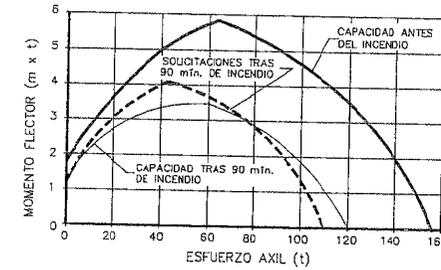


Figura A-3-9

La complejidad de los fenómenos expuestos muestra la dificultad de dar reglas simples sobre el tema. Las recomendaciones prácticas han de basarse por tanto en simplificaciones importantes, y ello es lo que hace EHE en su Anejo n° 7.

### A-3.3 RESISTENCIAS NORMALIZADAS AL FUEGO

Se designa con este nombre a la resistencia del conjunto de la estructura o de uno de sus elementos sometidos a un fuego normalizado de acuerdo con UNE 23093:81 (Véase lo dicho en A-3.2 y en particular la figura A-3-1).

Las resistencias se refieren al tiempo que tarda en alcanzarse un estado límite que impida a la estructura o al elemento cumplir su función.

Los períodos de resistencia al fuego normalizado se establecen de acuerdo con la serie siguiente, que expresa la duración del período en minutos:

30, 60, 90, 120 y 240

El estado límite a que hemos hecho referencia puede estar relacionado con los criterios siguientes de comportamiento

- CRITERIO R Pérdida de capacidad resistente
- CRITERIO E Pérdida de estanquidad, que permita el paso de gases o llamas
- CRITERIO I Pérdida de la capacidad de aislamiento térmico

### A-3.4 COMBINACIÓN DE ACCIONES A CONSIDERAR EN EL PROYECTO

Es de aplicación directa lo expuesto en 32.7 y en particular la fórmula [32.35], en la que  $\Delta$  es la acción accidental del fuego. Los coeficientes  $\gamma$  se definieron en 32.6.

Los valores de  $\psi_{1,i}$  y  $\psi_{2,i}$  se indican en la Tabla T-A-3.1.

TABLA T-A-3.1

Acción	$\psi_{1,i}$	$\psi_{2,i}$
Sobrecarga de viviendas y oficinas	0,5	0,3
Sobrecarga en áreas de acumulación de personas y aparcamientos de vehículos ligeros	0,7	0,6
Sobrecarga en áreas de almacenamiento	0,9	0,8
Nieve	0,2	0,0
Viento	0,5	0,0

Los valores de  $\gamma_c$  y  $\gamma_s$  se tomarán igual a la unidad, de acuerdo con lo que se expuso en el Capítulo 32.

**A-3.5 COMPROBACIÓN MEDIANTE TABLAS**

EHE permite un método simplificado de comprobación mediante tablas que se resumen a continuación.

Se define primeramente el recubrimiento mecánico equivalente a efectos de la resistencia al fuego el valor

$$a_m = \frac{\sum [A_{s,i} f_{yk,i} (a_{si} - \Delta a_{ci})] + \sum [A_{pi} f_{pk,i} (a_{pt} - \Delta a_{pi} - \Delta a_{ci})]}{\sum A_{s,i} f_{yk,i} + \sum A_{pi} f_{pk,i}} \quad [A-3.1]$$

- $A_{sp}$   $A_{pi}$  área de cada una de las armaduras pasivas o tendones.
- $a_{si}$   $a_{pi}$  distancia del eje de la armadura pasiva o tendón al paramento expuesto más próximo.
- $f_{yk,i}$   $f_{pk,i}$  límite elástico característico de la armadura pasiva y tensión característica de rotura de los tendones.
- $\Delta a_{ci}$  Corrección debida a las condiciones particulares de exposición al fuego (Fig. A-3-10).

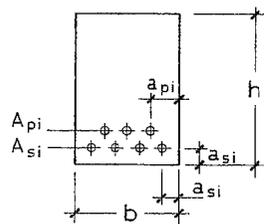


Figura A-3-10

Pueden tomarse como valores de  $\Delta a_{ci}$ :

10 mm para las armaduras situadas en las esquinas de la sección transversal en elementos con la armadura dispuesta en una sola capa.

0 en los demás casos.

$\Delta a_{pi}$  Corrección debida a la diferencia de temperaturas críticas entre tendones de las armaduras activas.

Pueden tomarse como valores de  $\Delta a_{pi}$ :

**En general**

5 mm para barras de pretensado

10 mm para alambres, torzales y cordones

**En el caso particular de elementos estructurales que soportan cargas de almacenamiento los valores anteriores se incrementarán en 5 mm.**

La definición del recubrimiento mecánico equivalente  $a_m$  permite reducir a un parámetro único el caso de armaduras de distintos tipos.

Las tablas que siguen están elaboradas a partir de las hipótesis siguientes:

**Temperaturas en las armaduras**

Pasivas 500° C

Activas

Barras 400° C

Alambres, torzales y cordones 350° C

**Árido.** Se ha supuesto árido silíceo. Si se emplea árido calizo, se admitirán las reducciones siguientes:

**Vigas y losas:** Un 10% en dimensiones mínimas de la sección transversal y en el recubrimiento mecánico equivalente,  $a_m$ .

**Pilares:** No se admite reducción.

**Muros:**

No resistentes 10% en el espesor mínimo

Resistentes No se admite reducción

Si se emplean en la zona traccionada de los elementos, recubrimientos  $c \geq 50$  mm, debe disponerse, para evitar el desprendimiento del recubrimiento durante la acción del fuego, una malla de dimensiones máximas 150 · 150 mm, debidamente anclada.

**A-3.6 TABLAS DE COMPROBACIÓN**

a) PILARES DE HORMIGÓN ARMADO DE SECCIÓN RECTANGULAR O CIRCULAR. Las dimensiones mínimas y los recubrimientos mecánicos equivalentes  $a_m$  se indican en la Tabla T-A-3.2.

TABLA T-A-3.2

Resistencia al fuego normalizada	Dimensión mínima $b_{min}$ /Recubrimiento mecánico equivalente mínimo $a_{min}$ (mm)
R 30	150 **/15
R 60	200 **/20
R 90	250/30
R 120	250/40
R 180	350/45
R 240	400/50

\*\* La dimensión mínima cumplirá lo indicado en el Capítulo 35.

Cuando la armadura del pilar sea superior a  $0,02 A_c$ , se recomienda distribuirla en todas sus caras si la resistencia al fuego es superior a 90 minutos. Esto no resulta necesario en zonas de solapo de armadura.

b) MUROS

b-1) MUROS NO PORTANTES. (CERRAMIENTOS O PARTICIONES). La esbeltez geométrica no debe ser superior a 40 y las dimensiones mínimas se establecerán de acuerdo con la Tabla T-A-3.3.

b-2) MUROS PORTANTES. Las dimensiones y recubrimientos mecánicos equivalentes mínimos cumplirán lo indicado en la Tabla T-A-3.4.

TABLA T-A-3.3

Resistencia al fuego normalizada	Espesor mínimo de muro (mm)
EI 30	60
EI 60	80
EI 90	100
EI 120	120
EI 180	150
EI 240	175

TABLA T-A-3.4

Resistencia al fuego normalizada	Espesor mínimo $b_{min}$ /Recubrimiento mecánico equivalente mínimo $a_{min}$ (mm)	
	Muro expuesto por una cara	Muro expuesto por ambas caras
REI 30	100/15	120/15
REI 60	120/15	140/15
REI 90	140/20	160/25
REI 120	160/25	180/35
REI 180	200/40	250/45
REI 240	250/50	300/50

c) TIRANTES. Las dimensiones y recubrimientos equivalentes mínimos se indican en la Tabla T-A-3.5.

TABLA T-A-3.5

Resistencia al fuego normalizada	Dimensión mínima $b_{min}$ /Recubrimiento mecánico equivalente mínimo $a_{min}$ (mm)
R 30	80/25
R 60	120/40
R 90	150/55
R 120	200/65
R 180	240/80
R 240	280/90

En todo caso, el área de la sección transversal de hormigón,  $A_c$ , no debe ser inferior a  $2 b_{min}^2$ .

Debe prestarse atención al problema de que en los tirantes, independientemente de los daños directos que el fuego produzca en ellos, las dilataciones producidas pueden alterar gravemente los esfuerzos sobre el resto de la estructura.

d) VIGAS

d-1) VIGAS CON TRES CARAS EXPUESTAS AL FUEGO. Es el caso típico de vigas asociadas a forjados, en las cuales la cara superior está protegida por el solado.

Las dimensiones y recubrimientos mecánicos equivalentes mínimos se indican en la Tabla T-A-3.6.

En secciones en doble T, el canto del ala inferior debe ser mayor que la dimensión  $b_{min}$  de la tabla.

TABLA T-A-3.6

Resistencia al fuego normalizada	Dimensión mínima $b_{mín}$ /Recubrimiento mecánico equivalente mínimo $a_{mín}$ (mm)				Ancho mínimo del alma $b_{a,mín}$ (mm)
	80/20	120/15	200/10*	-	
R 30	80/20	120/15	200/10*	-	80
R 60	100/30	150/25	200/20	-	100
R 90	150/40	200/35	250/30	400/25	100
R 120	200/50	250/45	300/40	500/35	120
R 180	300/75	350/65	400/60	600/50	140
R 240	400/75	500/70	700/60	-	160

\* Los recubrimientos por exigencias de durabilidad serán normalmente mayores.

TABLA T-A-3.7

Resistencia al fuego normalizada	Espesor mínimo $h_{mín}$ (mm)	Recubrimiento mecánico equivalente mínimo $a_{mín}$ (mm)		
		Flexión en una dirección	Flexión en dos direcciones	
			$\ell_y/\ell_x^{**} \leq 1,5$	$1,5 < \ell_y/\ell_x^{**} \leq 2,2$
REI 30	60	10*	10*	10*
REI 60	80	20	10*	20
REI 90	100	25	15	25
REI 120	120	35	20	30
REI 180	150	50	30	40
REI 240	175	60	50	50

\* Los recubrimientos por exigencias de durabilidad serán normalmente mayores.

\*\*  $\ell_x$  y  $\ell_y$  son las luces de la losa, siendo  $\ell_y > \ell_x$ .

d-2) VIGAS EXPUESTAS EN LAS CUATRO CARAS. Es aplicable la tabla anterior pero además el área de la sección transversal de la pieza no será inferior a  $2 b^2_{mín}$ .

e) LOSAS Y PLACAS

e-1) LOSAS Y PLACAS MACIZAS SOBRE APOYOS CONTINUOS. Si la losa o placa cumple función separadora, el espesor mínimo ( $h_{mín}$ ) y el recubrimiento serán los indicados en la Tabla T-A-3.7.

A los efectos anteriores, el solado y cualquier otra capa de revestimiento que cumpla el período de resistencia al fuego, se considerará para el establecimiento de  $h_{mín}$ .

Si la losa tiene sólo función resistente, el espesor será el espesor mínimo requerido por el cálculo a temperatura ambiente, pero el recubrimiento cumplirá lo indicado en la Tabla T-A-3.7.

e-2) LOSAS NERVADAS UNIDIRECCIONALES Y FORJADOS SIN VIGAS NERVADAS. En general son de aplicación las especificaciones anteriormente expuestas para vigas. Para el espesor de losa superior y ancho de nervio se podrán tener en cuenta el solado y bovedillas no recuperables si tienen un período de resistencia al fuego no inferior al requerido por el elemento estructural. (A falta de datos experimentales directos puede suponerse de 120 minutos). En caso de bovedillas cerámicas, su espesor de pared puede considerarse con valor doble del real.

Para forjados o losas nervadas que tengan bovedillas cerámicas o de hormigón y revestimiento inferior de yeso, para períodos no superiores a 120 minutos se considera suficiente el cumplimiento de los requisitos de la Tabla T-A-3.7 correspondiente a losas y placas. Los espesores de revestimiento de yeso se considerarán de acuerdo con lo que más adelante se indica. Una información interesante figura en (A-3.5).

Para losas nervadas y forjados sin vigas nervadas se establecen los requisitos indicados en la Tabla T-A-3.8.

TABLA T-A-3.8

Resistencia al fuego normalizada	Ancho de nervio mínimo $b_{mín}$ /Recubrimiento mecánico equivalente mínimo $a_{mín}$ (mm)			Espesor mínimo $h_c$ de la capa de compresión (mm)
	80/20	120/15	200/10*	
R 30	80/20	120/15	200/10*	60
R 60	100/30	150/25	200/20	70
R 90	120/40	200/30	250/25	80
R 120	160/50	250/40	300/25	100
R 180	200/70	300/60	400/44	120
R 240	250/90	350/75	500/70	150

\* Los recubrimientos por exigencias de durabilidad serán normalmente mayores.

f) CONSIDERACIÓN DE LAS CAPAS PROTECTORAS. La resistencia requerida al fuego puede conseguirse mediante la aplicación de capas protectoras adecuadas. Las características de las mismas deben estar basadas en ensayos adecuados.

A falta de ensayos, puede aceptarse lo siguiente:

- Los revestimientos de yeso pueden ser considerados como un espesor de hormigón igual a 1,8 veces su espesor real, si el período no es superior a 120 minutos.

- En el caso de revestimiento de techos, para períodos inferiores a 90 minutos, se recomienda que la ejecución se haga por proyección. Si el período es superior a 120, el revestimiento debe armarse con una malla interna no combustible y anclada firmemente en las viguetas.

g) CONDICIONES DE CORTE DE ARMADURAS. La acción del fuego debajo de los elementos resistentes (como por ejemplo en una planta de un

edificio de varias plantas) produce un gradiente térmico (Fig. A-3-11) con temperaturas mayores en la cara inferior de vigas, losas y forjados, que en su cara superior. Ello produce un efecto de subida de la ley de momentos flectores, lo cual exige las precauciones adicionales siguientes en la disposición y anclaje de armaduras.

- Para períodos de resistencia al fuego iguales o superiores a 90 minutos, una fracción de la armadura de momentos negativos no inferior al 25% de la máxima debe prolongarse hasta el tercio de la luz.

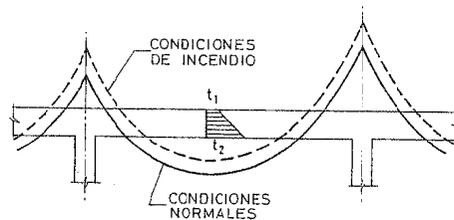


Figura A-3-11

- En losas y forjados nervados, para análogos períodos de resistencia al fuego, si los apoyos son lineales continuos, la armadura cumplirá los mismos requisitos.
- En losas o forjados sin vigas nervados, para períodos iguales o superiores a 90 minutos, el 20% de la armadura sobre apoyos se extenderá con continuidad de pilar a pilar.

### BIBLIOGRAFÍA

- (A-3.1) "Design and detailing of concrete structures for fire resistance". The Institution of Structural Engineers. London. April 1978.
- (A-3.2) "Guidance note: Structural fire precautions". Building Regulations 1972/3. Department of the Environment. London. 1975.
- (A-3.3) GUSTAFERRO, A.H.; MARTIN, L.D. "Design for fire resistance of precast prestressed concrete". 2ª. Edición. PCI Fire Committee. 1988.
- (A-3.4) "Reinforced Concrete Fire Resistance". CRSI Engineering Practice Committee. Concrete Reinforcing Steel Institute (CRSI). Chicago.
- (A-3.5) "Composite Floor Structures". FIP (CEB-FIP). May 1998.
- (A-3.6) UNE-ENV 1992-1-2. EUROCÓDIGO 2 "PROYECTO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN". Parte 1-2: Reglas generales. Proyecto de estructuras frente al fuego. AENOR. Diciembre 1996.
- (A-3.7) IZQUIERDO BERNALDO DE QUIRÓS, J.M. Conferencia "Proyecto de estructuras de hormigón frente al fuego". Eurocódigo 2. Parte 1.2.

(A-3.8) CALAVERA, J. "Patología de estructuras de hormigón armado y pretensado". 2 Tomos. INTEMAC. Madrid, 1996.

(A-3.9) LOGOTHETIS, L.; ECONOMOUS, C.R. "The influence of high temperature on calibration of non-destructive testing of concrete". Materiaux et Constructions. Vol. 14, nº 79.

## ANEJO 4

### TOLERANCIAS DE EJECUCIÓN EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN

#### **RESUMEN**

*El tema de tolerancias está muy escasamente tratado tanto en la normativa internacional como en la de los diferentes países. En particular, en España la ausencia de normativa oficial sobre el tema es casi total, a pesar de tratarse de un aspecto de la técnica del hormigón con acusada influencia sobre el proyecto y la ejecución de este tipo de construcciones.*

*El texto que sigue fue publicado como CUADERNO de INTEMAC N° 18 "Tolerancias en la construcción de obras de hormigón" (A.4.1) y sirvió de base al Anejo n° 10 de la Instrucción EHE. Este texto que se incluye es más amplio que el EHE, si bien no existen diferencias en las especificaciones de ambos. La parte correspondiente a armaduras pasivas sirvió de base a la Norma UNE 36831-97 "Armaduras pasivas de acero para hormigón estructural. Corte, doblado y colocación de barras y mallas. Tolerancias. Formas preferentes de armado".*

#### **A-4.1 NECESIDAD DE LOS SISTEMAS DE TOLERANCIAS**

Los sistemas de tolerancias en construcción nacen de la necesidad de acotar las desviaciones de la ejecución respecto a las dimensiones especificadas en los planos y restante documentación del proyecto. En particular constituyen el único camino para dar claridad en este importante aspecto al contrato de construcción, aceptando que es necesario admitir desviaciones en la obra realmente ejecutada respecto a los valores teóricos especificados, pero aceptando también que tales desviaciones deben tener límites claramente establecidos.

En España el tema está muy escasamente tratado, no sólo en obras de hormigón, (A-4.1), (A-4.2), (A-4.3) y (A-4.4), sino en construcción en general. Varios países tienen normas valiosas sobre el asunto (A-4.5), y algunas normas internacionales (A-4.6), (A-4.7) y (A-4.8), cubren el campo, si bien de forma muy incompleta.

El sistema de tolerancias que adopte el Autor del Proyecto debe quedar claramente establecido en el Pliego de Condiciones, para que pase a ser un documento incluido en el contrato de construcción.

## A-4.2 TERMINOLOGÍA

Indicamos a continuación la terminología esencial. (Véase (A-4.9)).

- Alabeo.** La desviación de la posición real de una esquina cualquiera de una cara de un elemento, respecto al plano definido por las otras tres esquinas. (Fig. A-4-1).
- Arqueo.** La desviación de la posición de cualquier punto de la superficie real de un elemento teóricamente plano y la superficie plana básica (Fig. A-4-2).

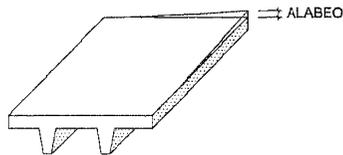


Figura A-4-1

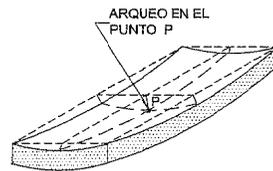


Figura A-4-2

- Ceja.** Resalto en la junta entre los bordes de dos piezas contiguas.
- Desplome.** Ver j).
- Desviación.** Diferencia entre la dimensión real o posición real y la dimensión básica o posición básica, respectivamente.
- Desviación admisible.** Límite aceptado para la desviación, con su signo. (Fig. A-4-3).
- Desviación de nivel.** La desviación vertical de la posición real de un punto, recta o plano, respecto a la posición básica de un plano horizontal de referencia.
- Desviación lateral.** La desviación de la posición real de un punto o recta dentro de un plano horizontal, respecto a la posición básica de un punto o recta de referencia, situados en ese plano.
- Desviación relativa.** La desviación entre las posiciones reales de dos elementos en un plano, o entre elementos adyacentes en una construcción, o la distancia de un punto, recta o plano a un elemento de referencia.
- Desviación de la vertical.** La desviación entre la posición de un punto, línea o plano y la posición básica de una línea vertical o plano vertical de referencia. Cuando se aplica a muros o pilares se llama desplome.

- Dimensión básica o posición básica.** Dimensión o posición que sirve de referencia para establecer los límites de desviación (Fig. A-4-3).

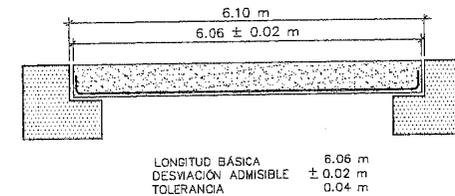


Figura A-4-3

- Planeidad.** El grado en que una superficie se aproxima a un plano. (Fig. A-4-4).

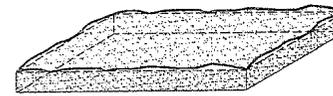


Figura A-4-4

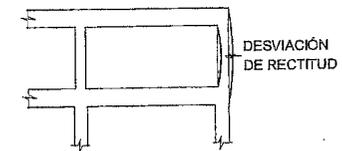


Figura A-4-5

- Rectitud.** El grado en que una línea se aproxima a una recta. (Fig. A-4-5).
- Superficie no vista.** La superficie de un elemento de hormigón destinada a ser revestida con tendidos, enfoscados, aplacados, etc., o que no va a ser observada por el usuario durante la vida útil de la construcción.
- Superficie vista.** La superficie de un elemento de hormigón que no va a ser revestida, salvo con pinturas, y que va a ser observada por el usuario durante la vida útil de la construcción.
- Tolerancia.** La diferencia entre los límites admisibles para las desviaciones de una dimensión o posición (Fig. A-4-3). La tolerancia es un valor absoluto sin signo.

Por ejemplo: Desviaciones admisibles  $\begin{cases} +30 \text{ mm} \\ -20 \text{ mm} \end{cases}$   
Tolerancia = 50 mm

## A-4.3 SELECCIÓN DEL SISTEMA DE TOLERANCIAS

Las tolerancias adoptadas en un proyecto deben ser las más amplias compatibles con el funcionamiento adecuado de la construcción. No deben establecerse tolerancias cuyo control no sea necesario.

Debe tenerse siempre presente que el sistema de tolerancias establecido tiene repercusión sobre los aspectos resistentes, estéticos, funcionales y económicos de la construcción.

Cualquier sistema de tolerancias más estricto de lo necesario, incrementará el coste de la obra y quizá también el plazo de ejecución, sin beneficio alguno para la propiedad. La mayoría de las obras admiten tolerancias relativamente amplias sin que ello cree problemas de acabado ni posteriores de funcionamiento.

Se debe ser especialmente cuidadoso con la falsa experiencia derivada de sistemas de tolerancias innecesariamente estrictos, que si bien han sido incluidos en Pliegos de Condiciones, no han sido realmente aplicados, es decir que ni el Constructor los ha cumplido ni los Organismos de Control ni la Dirección de Obra los han verificado. Las mediciones reales en obras han demostrado que las desviaciones habituales (y por tanto aceptables) son generalmente mucho mayores de lo que se piensa.

El sistema que se expone a continuación está destinado a obras de hormigón de tipo usual. Para algunas desviaciones específicas se indican distintas desviaciones admisibles según tipos de uso o grados de acabado. De todas formas su adaptación a cada proyecto concreto puede requerir alguna modificación puntual.

#### A-4.4 PRINCIPIOS GENERALES.

- Las tolerancias se aplican a las cotas indicadas en los planos. Deberá evitarse el doble dimensionamiento, pero en principio si a una dimensión o posición le corresponden varias tolerancias en el sistema descrito en este documento, se entiende que rige la más estricta salvo que se indique otra cosa.
- La construcción no debe en ningún caso traspasar los límites de propiedad.
- En caso de dimensiones fraccionadas que formen parte de una dimensión total, las tolerancias deben interpretarse individualmente y no son acumulativas.
- Las comprobaciones deben realizarse antes de retirar apeos, puntales y cimbras en los elementos en que tal operación pueda producir deformaciones.
- El Constructor debe mantener las referencias y marcas que permitan la medición de desviaciones durante el tiempo de ejecución de la obra.
- De acuerdo con ISO (A-4.10) los valores para las desviaciones admisibles deben elegirse dentro de la serie preferente 10, 12, 16, 20, 24, 30, 40, 50, 60, 80, 100.
- Este documento no entra en la forma de medir las desviaciones. Véase ISO 1976-1 (A-4.11) e ISO 1976-2 (A-4.12).
- Si se han respetado las tolerancias establecidas, la medición y abono de los elementos se hace con las dimensiones básicas indicadas en los planos, es decir sin considerar las desviaciones ocurridas en la ejecución.
- Si las desviaciones indicadas en este documento son excedidas en la construcción y causan problemas en su uso, podrán aplicarse las penalizaciones económicas establecidas para ello en el Pliego de Condiciones del Proyecto, pero la aceptación o rechazo de la parte de obra correspondiente debe basarse en el estudio de la trascendencia que tales desviaciones puedan tener sobre la seguridad, funcionalidad y durabilidad y aspecto de la construcción.

#### A-4.5 DESVIACIONES ADMISIBLES

Se indican siempre en mm.

##### A-4.5.1 ARMADURAS

##### A-4.5.1.1 Armaduras activas

- Para la posición de los tendones de pretensado, en comparación con la posición definida en proyecto:

Para  $\ell \leq 200 \text{ mm}$

Para tendones que sean parte de un cable, tendones simples y cordones:

$$\Delta = \pm 0,025 \ell$$

Para  $\ell > 200 \text{ mm}$

Para tendones que sean parte de un cable y para tendones simples:

$$\Delta = \pm 0,025 \ell \text{ ó } \Delta = \pm 20 \text{ mm (lo que sea mayor).}$$

Para cordones:  $\Delta = \pm 0,04 \ell \text{ ó } \Delta = \pm 30 \text{ mm (lo que sea mayor).}$

donde  $\ell$  indica el canto o anchura de la sección transversal.

- Se pueden utilizar otras tolerancias distintas de las definidas en el párrafo a) si se demuestra que no reducen el nivel requerido de seguridad.
- Tolerancias para el recubrimiento del hormigón. La desviación del recubrimiento no excederá los valores:
  - $\pm 5 \text{ mm}$  en elementos prefabricados
  - $\pm 10 \text{ mm}$  en elementos hormigonados *in situ*.

##### A-4.5.1.2 Armaduras pasivas

- Corte de barras (Fig. A-4-6).

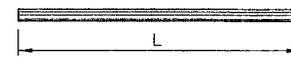


Figura A-4-6

$$L \leq 6 \text{ m} \quad \pm 20 \text{ mm}$$

$$L > 6 \text{ m} \quad \begin{cases} +20 \text{ mm} \\ -30 \text{ mm} \end{cases}$$

- Forma y doblado de barras (Fig. A-4-7).

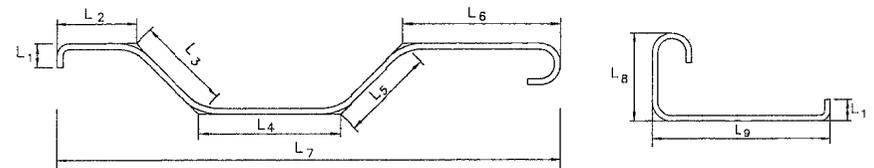


Figura A-4-7

b-1) Cotas en general

$L_1$  a  $L_6$ ,  $L_8$  y  $L_9$ :

$$L_i \leq 6 m \quad \pm 20 mm$$

$$L_i > 6 m \quad \begin{cases} +20 mm \\ -30 mm \end{cases}$$

$L_7$ :

$$L_7 \leq 6 m \quad \pm 20 mm$$

$$L_7 > 6 m \quad \begin{cases} +20 mm \\ -30 mm \end{cases}$$

b-2) Cotas que afectan al canto (Fig. A-4-8)



Figura A-4-8

$$L \leq 1 m \quad \pm 10 mm$$

$$1 m < L \leq 2 m \quad \begin{cases} +12 mm \\ -16 mm \end{cases}$$

$$L > 2 m \quad \begin{cases} +16 mm \\ -20 mm \end{cases}$$

b-3) Radios de doblado (Fig. A-4-9)

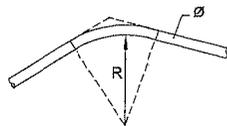


Figura A-4-9

$$\phi \leq 25 mm \quad \pm 15 mm$$

$$\phi > 25 mm \quad \pm 25 mm$$

c) Forma y doblado de estribos y cercos (Figs. A-4-10 y A-4-11)

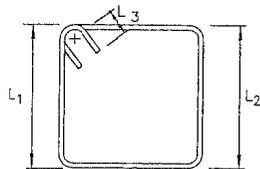


Figura A-4-10

$L_1$  y  $L_2$ :

$$\phi \leq 25 mm \quad \pm 16 mm$$

$$\phi > 25 mm \quad \begin{cases} +20 mm \\ -24 mm \end{cases}$$

$$\{L_1 - L_2\} \leq 10 mm$$

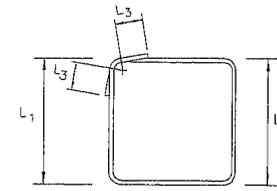


Figura A-4-11

$L_3$  y  $L_4$ :

$$\phi \leq 25 mm \quad \pm 16 mm$$

$$\phi > 25 mm \quad \begin{cases} +20 mm \\ -24 mm \end{cases}$$

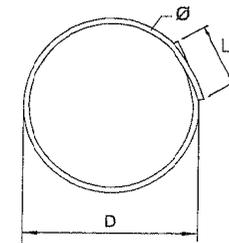


Figura A-4-12

D (Fig. A-4-12)

$$\phi \leq 25 mm \quad \pm 15 mm$$

$$\phi > 25 mm \quad \begin{cases} +20 mm \\ -24 mm \end{cases}$$

d) Colocación

d-1) Recubrimientos (Fig. A-4-13)

$$\text{Desviación en menos:}^1 \begin{cases} \text{Control de Calidad Normal} & -10 mm \\ \text{Control de Calidad Intenso} & -5 mm \end{cases}$$

Desviaciones en más:

Dimensión  $h$  de la pieza en el sentido del recubrimiento

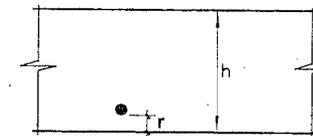


Figura A-4-13

$$\begin{array}{ll} h \leq & 100 mm \quad 6 mm \\ 100 < h \leq & 300 mm \quad 10 mm \\ 300 < h \leq & 600 mm \quad 12 mm \\ h > & 600 mm \quad 16 mm \end{array}$$

<sup>1</sup> Los valores indicados corresponden al establecimiento de recubrimientos en los planos iguales a los mínimos establecidos en la Norma, incrementados en 5 mm en caso de control de ejecución intenso y 10 mm en caso de control de ejecución normal. Los valores nominales de los recubrimientos corresponden a los separadores a emplear. (Ver MODEL CODE 90 (A-4.8) y EUROCÓDIGO EC-2 (A-4.9)).

d-2) Desviaciones en sentido transversal respecto a la posición básica (Fig. A-4-14) (Salvo lo cubierto por d - 4)

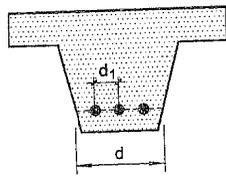


Figura A-4-14

$$\begin{aligned} d &\leq 100 \text{ mm} \pm 6 \text{ mm} \\ 100 < d &\leq 300 \text{ mm} \pm 10 \text{ mm} \\ 300 < d &\leq 600 \text{ mm} \pm 16 \text{ mm} \\ d > 600 \text{ mm} &\pm 24 \text{ mm} \end{aligned}$$

d-3) Distancia entre armaduras consecutivas (Fig. A-4-14)

Se admite una desviación de la distancia  $d_i$  no mayor de  $\pm 24$  mm sin exceder  $\pm \frac{d_i}{4}$ . El valor mínimo en cualquier caso debe cumplir con lo establecido en las normas.

d-4) Desviación de la posición básica del eje de una barra, en series de barras paralelas, en muros, losas, zapatas, etc.

$$\pm 50 \text{ mm}$$

(El número total de barras no debe ser inferior al especificado).

d-5) Desviación de la posición básica de estribos

$$\pm \frac{h}{12}$$

siendo  $h$  el canto de la viga.

(El número total de estribos de cada campo de secuencia de estribos no debe ser inferior al especificado. La desviación en menos de la distancia del primer estribo en los apoyos de una viga a la cara del apoyo es de  $-12$  mm).

d-6) Desviación de la posición básica de cercos

$$\pm \frac{b}{12}$$

siendo  $b$  el lado menor de la sección rectangular del pilar.

(El número total de cercos por tramo del pilar no debe ser inferior al especificado).

d-7) Situación en la dirección del eje de la pieza de puntos medios de arcos de doblado y extremos de barras.

En semiluces de vanos simplemente apoyados o articulados:  $\pm 24 \text{ mm}$

En los casos restantes:  $\pm 50 \text{ mm}$

d-8) Longitudes  $L$ , de anclaje y solape

$$+ 0,10 L \geq 50 \text{ mm}$$

$$- 0,05 L \geq - 50 \text{ mm}, \text{ con mínimo de } 12 \text{ mm}$$

#### A-4.5.2 CIMENTACIONES

a) Variación en planta del c.d.g. de cimientos aislados. (Ver f) para pilotes). (Fig. A-4-15)

$\pm 0,02$  de la dimensión del cimiento en la dirección correspondiente, sin exceder de  $\pm 50$  mm.

b) Niveles

- Cara superior del hormigón de limpieza

$$\begin{cases} - 50 \text{ mm} \\ + 20 \text{ mm} \end{cases}$$

- Cara superior del cimiento (ver g) para pilotes)

$$\begin{cases} + 20 \text{ mm} \\ - 50 \text{ mm} \end{cases}$$

- Espesor del hormigón de limpieza

$$- 30 \text{ mm}$$

c) Dimensiones en planta ( $a_1 - a$  ó  $b_1 - b$ ) (Fig. A-4-16)

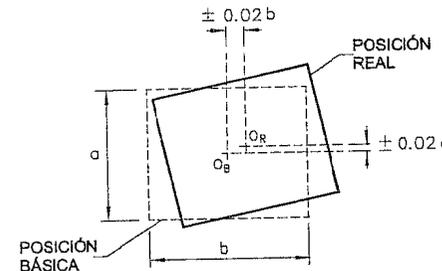


Figura A-4-15

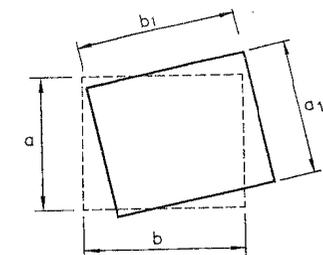


Figura A-4-16

- Cimientos encofrados  $\begin{cases} + 40 \text{ mm} \\ - 20 \text{ mm} \end{cases}$

- Cimientos hormigonados contra el terreno:

Dimensión no superior a 1 m

$$\begin{cases} + 80 \text{ mm} \\ - 20 \text{ mm} \end{cases}$$

Dimensión superior a 1 m pero no superior a 2,5 m

$$\begin{cases} + 120 \text{ mm} \\ - 20 \text{ mm} \end{cases}$$

Dimensión superior a 2,5 m  $\begin{cases} + 200 \text{ mm} \\ - 20 \text{ mm} \end{cases}$

d) Dimensiones de la sección transversal (Como mínimo las establecidas en A-4-5.3.d).

$+ 5\% \geq 120 \text{ mm}$   
 $- 5\% \leq -20 \text{ mm}$

e) Planeidad

Desviaciones medidas después de endurecido y antes de 72 horas desde el vertido del hormigón, con regla de 2 m colocada en cualquier parte de la cara superior del cimiento y apoyada sobre dos puntos cualesquiera.<sup>1</sup>

- Del hormigón de limpieza:  $\pm 16 \text{ mm}$
- De la cara superior del cimiento:  $\pm 16 \text{ mm}$
- De caras laterales:  $\pm 16 \text{ mm}$

(Sólo para cimientos encofrados)

f) Desviación en planta del c.d.g. de la cara superior de un pilote

- Inspección reducida:  $\pm 150 \text{ mm}$
- Inspección normal:  $\pm 100 \text{ mm}$
- Inspección intensa:  $\pm 50 \text{ mm}$

g) Desviación en el nivel de la cara superior de un pilote, una vez descabezado  $\begin{cases} - 60 \text{ mm} \\ + 30 \text{ mm} \end{cases}$

h) Desviación en el diámetro  $d$  de la sección del pilote  $\begin{cases} + 0,1 d \geq + 100 \text{ mm} \\ - 20 \text{ mm} \end{cases}$

#### A-4.5.3 ESTRUCTURAS DE EDIFICIOS CONSTRUIDAS "IN SITU"

a) Desviación de la vertical

Siendo  $H$  la altura del punto considerado respecto al plano horizontal que se tome como referencia.

a-1) Líneas y superficies en general

	$H \leq 6 \text{ m}$	$\Delta =$		$\pm 24 \text{ mm}$
$6 \text{ m} < H$	$H \leq 30 \text{ m}$	$\Delta = \pm 4 H$	$\nearrow$	$\pm 50 \text{ mm}$
	$H \geq 30 \text{ m}$	$\Delta = \pm \frac{5}{3} H$	$\nearrow$	$\pm 150 \text{ mm}$

( $\Delta =$  en mm para  $H$  en m)

a-2) Arista exterior de pilares de esquina vistos, y juntas verticales de dilatación vistas

	$H \leq 6 \text{ m}$	$\Delta =$		$\pm 12 \text{ mm}$
$6 \text{ m} < H$	$H \leq 30 \text{ m}$	$\Delta = \pm 2 H$	$\nearrow$	$\pm 24 \text{ mm}$
	$H \geq 30 \text{ m}$	$\Delta = \pm \frac{4}{5} H$	$\nearrow$	$\pm 80 \text{ mm}$

( $\Delta =$  en mm para  $H$  en m)

b) Desviaciones laterales

- Piezas en general  $\Delta = \pm 24 \text{ mm}$
- Huecos en losas y forjados.
  - Desviación del centro para huecos de dimensión en la dirección considerada hasta 300 mm  $\Delta = \pm 12 \text{ mm}$
  - Huecos en losas de forjados.
    - Desviación de los bordes para huecos de dimensiones en la dirección considerada superior a 300 mm  $\Delta = \pm 12 \text{ mm}$
- Juntas serradas. Juntas en general  $\Delta = \pm 16 \text{ mm}$

c) Desviaciones de nivel

c-1) Cara superior de losas

- c-1.1) Cara superior de losas de pavimento  $\pm 20 \text{ mm}$
- c-1.2) Cara superior de losas y forjados, antes de retirar puntales  $\pm 20 \text{ mm}$
- c-1.3) Cara inferior encofrada de piezas, antes de retirar puntales,  $\pm 20 \text{ mm}$
- c-1.4) Dinteles, parapetos y acanaladuras y resaltos horizontales vistos  $\pm 12 \text{ mm}$

d) Dimensiones de la sección transversal

Escuadría de vigas, pilares, pilas, canto de losas y forjados y espesor de muros (Dimensión  $D$ )

$D \leq 300 \text{ mm}$	$\begin{cases} +10 \text{ mm} \\ - 8 \text{ mm} \end{cases}$
$300 \text{ mm} < D \leq 1000 \text{ mm}$	$\begin{cases} +12 \text{ mm} \\ -10 \text{ mm} \end{cases}$
$D > 1000 \text{ mm}$	$\begin{cases} +24 \text{ mm} \\ -20 \text{ mm} \end{cases}$

<sup>1</sup> No aplicable a elementos de dimensión inferior a 2 m.

e) *Desviación relativa*

e-1) *Escaleras*<sup>1</sup>

Diferencia de altura entre contrahuellas consecutivas:	3 mm
Diferencia de ancho entre huellas consecutivas:	6 mm

e-2) *Acanaladuras y resaltos*

Ancho básico inferior a 50 mm	± 3 mm
Ancho básico entre 50 y 300 mm	± 6 mm

e-3) *Desviaciones de cara encofrada de elementos respecto al plano teórico*

Desviación en 3 m:

e-3.1) Desviación vertical de aristas exteriores de pilares vistos y juntas en hormigón visto	± 6 mm
---	--------

e-3.2) Restantes elementos	±10 mm
----------------------------	--------

e-4) *Desviación relativa entre paneles consecutivos de encofrados de elementos superficiales*

**Clasificación de la superficie**<sup>2</sup>

Clase A	± 3 mm
Clase B	± 6 mm
Clase C	±12 mm
Clase D	±24 mm

e-5) *Planeidad de acabado de losas de pavimentos y losas y forjados de piso*

Desviación vertical medida con regla de 3 m colocada en cualquier parte de la losa o forjado y apoyada sobre dos puntos, antes de retirar los puntales, después de endurecido el hormigón y dentro de las primeras 72 h a partir del vertido.

**Clasificación del acabado superficial**

**Desviación**

Llaneado mecánico (Tipo "Helicóptero")	±12 mm
Maestreado con regla	± 8 mm
Liso	± 5 mm
Muy liso	± 3 mm

*Notas:*

- No deben especificarse tolerancias para losas y forjados de piso no cimbrados ya que la retracción y las flechas pueden afectar de forma importante a la medida de las desviaciones.
- El método de la regla es muy imperfecto y hoy va siendo sustituido por la evaluación estadística de medidas de planeidad y de nivelación. Véase por ejemplo la norma norteamericana ASTM "Standard Tests Method for Determining Floor Flatness and Levelness Using the F-Number System" (A-4.14).

f) *Aberturas en elementos*

f-1) Dimensiones de la sección transversal	$\left\{ \begin{array}{l} + 24 \text{ mm} \\ - 6 \text{ mm} \end{array} \right.$
f-2) Situación del centro	±12 mm

A-4.5.4 *PIEZAS PREFABRICADAS*<sup>1</sup>

A-4.5.4.1 *Tolerancias de fabricación de elementos lineales*

a) Longitud de pieza, L	±0,001 L
Con un mínimo de 5 mm para longitudes hasta 1 m y 20 mm para longitudes mayores	

b) *Dimensiones transversales, D*

$D \leq 150 \text{ mm}$	± 3 mm
$150 \text{ mm} < D \leq 500 \text{ mm}$	± 5 mm
$500 \text{ mm} < D \leq 1000 \text{ mm}$	± 6 mm
$D > 1000 \text{ mm}$	±10 mm

c) *Flecha lateral medida respecto al plano vertical que contiene al eje de la pieza, en función de la luz L*

$L \leq 6 \text{ m}$	± 6 mm
$6 \text{ m} < L \leq 12 \text{ m}$	±10 mm
$L > 12 \text{ m}$	±12 mm

d) *Desviación de la contraflecha respecto al valor básico de proyecto, medido en el momento del montaje*

Piezas en general	$\pm \frac{L}{750} \neq \pm 16 \text{ mm}$
-------------------	--

1 Aplicable a escaleras en que el peldaño se realiza con el propio hormigón, sin material de revestimiento.

2 Debe seleccionarse la Clase correspondiente en el Proyecto.

1 No aplicable a pilotes prefabricados.

Piezas consecutivas en la colocación  $\pm \frac{L}{1000} \not\geq \pm 12 \text{ mm}$

siendo  $L$  la longitud de la pieza.

(Esta segunda condición sólo rige si la desviación afecta al aspecto estético).

e) *Planeidad de la superficie de la cara superior. Desviación medida con regla de 3 m colocada en dos puntos cualesquiera, en el momento del montaje.*

e-1) Si no han de recibir encima losa superior de hormigón "in situ"  $\pm 6 \text{ mm}$

e-2) Si han de recibir encima losa superior de hormigón "in situ"  $\pm 12 \text{ mm}$

#### A-4.5.4.2 Tolerancias de fabricación de elementos superficiales

a) *Longitud, siendo  $L$  la dimensión básica*

$L \leq 6 \text{ m} \quad \pm 8 \text{ mm}$

$6 \text{ m} < L \leq 12 \text{ m} \quad \begin{cases} +12 \text{ mm} \\ -16 \text{ mm} \end{cases}$

$L > 12 \text{ m} \quad \begin{cases} +16 \text{ mm} \\ -20 \text{ mm} \end{cases}$

b) *Desviaciones en las dimensiones de la sección transversal ( $D$ )*

$D \leq 600 \text{ mm} \quad \pm 6 \text{ mm}$

$60 \text{ m} < D \leq 1000 \text{ m} \quad \pm 8 \text{ mm}$

$D > 1000 \text{ m} \quad \pm 10 \text{ mm}$

c) *Aberturas en paneles*

Dimensiones en la abertura  $\pm 6 \text{ mm}$

Posición de las líneas centrales de la abertura  $\pm 6 \text{ mm}$

d) *Elementos embebidos*

Tomillos  $\pm 6 \text{ mm}$

Placas soldadas  $\pm 24 \text{ mm}$

Anclajes  $\pm 12 \text{ mm}$

e) *Alabeo medido en el momento del montaje*

$\pm 5 \text{ mm}$  por metro de distancia a la más próxima de las esquinas adyacentes, pero no más de  $\pm 24 \text{ mm}$ .

f) *Arqueo. (Siendo  $D$  la longitud de la diagonal de la pieza).*

$\pm 0,003 D \not\geq \pm 24 \text{ mm}$

#### A-4.5.4.3 Desviaciones de montaje

a) *Desviaciones respecto a la vertical:* Rige A-4.5.3.a)

b) *Desviaciones laterales:* Rige A-4.5.3.b)

c) *Desviaciones de nivel:* Rige A-4.5.3.c)

d) *Desviaciones en muros de paneles*

d-1) Ancho de junta en paneles vistos  $\pm 6 \text{ mm}$

d-2) Variación de ancho a lo largo de la junta entre dos paneles vistos:

$\pm 2 \text{ mm}$  por metro y como mínimo  $\pm 1,5 \text{ mm}$  entre dos puntos cualesquiera a lo largo de la junta, sin exceder en ningún caso:  $\pm 6 \text{ mm}$ .

d-3) Cejas entre dos paneles adyacentes  $\pm 6 \text{ mm}$

e) *Desviación de nivel entre bordes de caras superiores de piezas adyacentes*

e-1) Si llevan losa superior  $\pm 16 \text{ mm}$

e-2) Si no llevan losa superior  $\pm 6 \text{ mm}$

e-3) Piezas de cubierta sin losa superior  $\pm 16 \text{ mm}$

e-4) Elementos con funciones de guías o maestras  $\pm 2 \text{ mm}$

f) *Colocación de viguetas resistentes y semirresistentes en forjados*

f-1) Desviación del apoyo de bovedilla en vigueta  $d_1$  (Fig. A-4-17)

$$\pm 5 \text{ mm} \not\geq \pm \frac{d_1}{3}$$

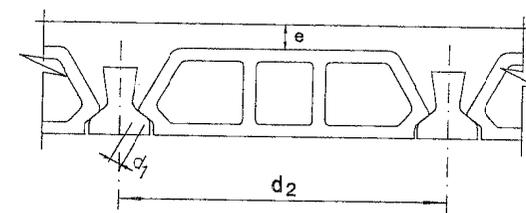


Figura A-4-17

(Medido respecto a la dimensión básica indicada en la Autorización de Uso).

Nota: En la práctica es más fácil controlar esta desviación admisible mediante el control de la desviación de la distancia entre ejes de

viguetas, limitada a  $\pm 10 \text{ mm} \not\geq \pm \frac{2d_1}{3}$

f-2) Entregas de viguetas o armaduras salientes en vigas (Fig. A-4-18).

- Vigas de borde (Longitud  $L_1$ )  $\pm 15$  mm
- Vigas interiores (Longitud  $L_2$ )  $\pm 15$  mm

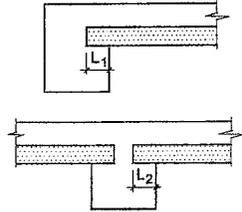


Figura A-4-18

f-3) Espesor de losa superior <sup>1</sup>  $\left. \begin{array}{l} - 6 \text{ mm} \\ + 10 \text{ mm} \end{array} \right\}$

A-4.5.5 PANTALLAS, NÚCLEOS, TORRES, CHIMENEAS, PILAS Y OTROS ELEMENTOS HORMIGONADOS CON ENCOFRADO DESLIZANTE

a) *Desviación de la vertical. Corrimiento horizontal respecto a la posición básica de cualquier punto de referencia en la base del elemento, en función de la altura H.*

$H \leq 30 \text{ m}$        $\Delta = 1,5 H$        $\nabla$        $12 \text{ mm}$

$H > 30 \text{ m}$        $\Delta = \pm \frac{2}{5} H$        $\nabla$        $\pm 100 \text{ mm}$

( $\Delta$  en mm para H en m)

b) *Desviación lateral entre elementos adyacentes:*  $\pm 50 \text{ mm}$

c) *Espesor de muros y paredes:*

Espesor no superior a 250 mm  $\left. \begin{array}{l} + 12 \text{ mm} \\ - 10 \text{ mm} \end{array} \right\}$

Espesor superior a 250 mm  $\left. \begin{array}{l} + 16 \text{ mm} \\ - 10 \text{ mm} \end{array} \right\}$

d) *Desviación relativa de superficies planas encofradas.*

Pueden desviarse de la posición plana básica sin exceder  $\pm 6$  mm en 3 m.

A-4.5.6 MUROS DE CONTENCIÓN Y MUROS DE SÓTANO

a) *Desviación de la vertical. Corrimiento horizontal de cualquier punto del alzado respecto a la posición básica de cualquier punto de referencia situado en la cara superior del cimient, en función de la altura H.*

$H \leq 6 \text{ m}$        $\left. \begin{array}{l} \text{Trasdós} \\ \text{Intradós} \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} \pm 30 \text{ mm} \\ \pm 20 \text{ mm} \end{array} \right\}$

$H > 6 \text{ m}$        $\left. \begin{array}{l} \text{Trasdós} \\ \text{Intradós} \end{array} \right\}$   $\left. \begin{array}{l} \pm 40 \text{ mm} \\ \pm 24 \text{ mm} \end{array} \right\}$

b) *Espesor e:*

$e \leq 500 \text{ mm}$   $\left. \begin{array}{l} + 16 \text{ mm} \\ - 10 \text{ mm} \end{array} \right\}$

$e > 500 \text{ mm}$   $\left. \begin{array}{l} + 20 \text{ mm} \\ - 16 \text{ mm} \end{array} \right\}$

En muros hormigonados contra el terreno, la desviación máxima en más será de 40 mm.

c) *Desviación relativa de las superficies planas de intradós o de trasdós.*

Pueden desviarse de la posición plana básica sin exceder  $\pm 6$  mm en 3 m.

d) *Desviación de nivel de la arista superior del intradós, en muros vistos:*  $\pm 12 \text{ mm}$

e) *Tolerancia de acabado de la cara superior del alzado, en muros vistos:*  $\pm 12 \text{ mm}$  con regla de 3 m apoyada en dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón.

A-4.5.7 OBRAS HIDRÁULICAS Y SANITARIAS

A-4.5.7.1 Canales

a) *Desviación lateral*

Tramos rectos  $\pm 50 \text{ mm}$

Tramos curvos  $\pm 100 \text{ mm}$

<sup>1</sup> Medido sumergiendo un clavo en el hormigón fresco, en clave de bovedilla. (La posición de la clave se determina tanteando con el clavo).

- b) Ancho de la sección a cualquier nivel, siendo  $B$  el ancho básico:  
 $\Delta = \pm (2,5 B + 24) \text{ mm}$   
 ( $\Delta$  en mm para  $B$  en metros)
- c) Desviación de nivel
- c-1) Solera  $\pm 12 \text{ mm}$
- c-2) Coronación de cajeros  
 siendo  $H$  el calado total  
 $\Delta = \pm (5 H + 24) \text{ mm}$   
 ( $\Delta$  en mm para  $H$  en metros)
- d) Espesor  $e$  de soleras y cajeros  
 $\pm \frac{e}{10}$  siempre que se mantenga el valor básico determinado como media de las medidas en tres puntos cualesquiera distantes entre sí 10 m, a lo largo del canal.

#### A-4.5.7.2 Alcantarillas, sifones, etc.

- a) Desviación lateral
- a-1) Línea del eje  $\pm 24 \text{ mm}$
- a-2) Posición de puntos de la superficie interior, siendo  $D$  la dimensión interior máxima  
 $\Delta = \pm 5 D \text{ mm} \nabla \pm 12 \text{ mm}$   
 ( $\Delta$  en mm para  $D$  en m)
- b) Desviación de nivel
- b-1) Soleras o fondos  $\pm 12 \text{ mm}$
- b-2) Superficies de cajeros  $\pm 12 \text{ mm}$
- c) Dimensión "e" del espesor
- |                         |             |          |   |
|-------------------------|-------------|----------|---|
| $e \leq 300 \text{ mm}$ | $+0,05 e$   | $\nabla$ | $\left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ mm} \\ - 8 \text{ mm} \end{array} \right.$  |
| $e > 300 \text{ mm}$    | $+ 0,05 e$  | $\nabla$ | $\left\{ \begin{array}{l} 16 \text{ mm} \\ - 10 \text{ mm} \end{array} \right.$ |
|                         | $- 0,025 e$ | $\nabla$ |   |

#### A-4.5.8 PUENTES HORMIGONADOS "IN SITU". (Para pilas deslizadas véase A-4.5.5).

- a) Desviación de la vertical
- Superficies vistas  $\pm 20 \text{ mm}$
- Superficies ocultas  $\pm 40 \text{ mm}$

- b) Desviación lateral
- Eje  $\pm 24 \text{ mm}$
- c) Desviación de nivel
- Cara superior de superficies de hormigón y molduras y acanaladuras horizontales:
- Vistas  $\pm 20 \text{ mm}$
- Ocultas  $\pm 40 \text{ mm}$
- d) Planeidad del pavimento
- Dirección longitudinal:  
 3 mm con regla de 3 m apoyada sobre dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón y antes de 72 horas de vertido.
- Dirección transversal:  
 6 mm con regla de 3 m apoyada sobre dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón y antes de 72 horas de vertido.
- e) Aceras y rampas
- En cualquier dirección:  
 6 mm con regla de 3 m apoyada sobre dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón y antes de 72 horas de vertido.
- f) Dimensiones de la sección transversal
- f-1) Espesor "e" de la losa superior
- |                         |  |
|-------------------------|--|
| $e \leq 250 \text{ mm}$ | $\left\{ \begin{array}{l} +10 \text{ mm} \\ - 8 \text{ mm} \end{array} \right.$  |
| $e > 250 \text{ mm}$    | $\left\{ \begin{array}{l} +12 \text{ mm} \\ - 10 \text{ mm} \end{array} \right.$ |
- f-2) Dimensiones transversales,  $D$ , de pilas, vigas, muros, estribos, etc.
- |   |  |
|---|--|
| $D \leq 300 \text{ mm}$                   | $\left\{ \begin{array}{l} +10 \text{ mm} \\ - 8 \text{ mm} \end{array} \right.$  |
| $300 \text{ mm} < D \leq 1000 \text{ mm}$ | $\left\{ \begin{array}{l} +12 \text{ mm} \\ - 10 \text{ mm} \end{array} \right.$ |
| $D > 1000 \text{ mm}$                     | $\left\{ \begin{array}{l} +16 \text{ mm} \\ - 12 \text{ mm} \end{array} \right.$ |
- f-3) Dimensiones de huecos en elementos de hormigón  $\pm 12 \text{ mm}$

- g) *Desviación relativa*
- g-1) Posición de huecos en elementos de hormigón  $\pm 12 \text{ mm}$
- g-2) Superficies planas encofradas respecto a la posición básica del plano.
- Desviaciones en 3 m:
- Superficies vistas  $\pm 12 \text{ mm}$
- Superficies ocultas  $\pm 24 \text{ mm}$
- g-3) Superficies no encofradas, aparte pavimentos y aceras, respecto a la posición básica del plano de referencia.
- Desviaciones:
- En 3 m  $\pm 6 \text{ mm}$
- En 6 m  $\pm 10 \text{ mm}$

#### A-4.5.9 PAVIMENTOS Y ACERAS (No aplicable a carreteras)

- a) *Desviaciones laterales*
- a-1) Posición de pasadores  
(Desviación del eje)  $\pm 24 \text{ mm}$
- a-2) Desviación de pasadores respecto al eje del pavimento  
(Corrimiento del extremo del pasador en dirección de la junta).  $\pm 6 \text{ mm}$
- b) *Desviaciones de planeidad*
- b-1) En dirección longitudinal:  
3 mm con regla de 3 m apoyada sobre dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón y antes de 72 horas de vertido.
- b-2) En dirección transversal:  
6 mm con regla de 3 m apoyada sobre dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón y antes de 72 horas de vertido.
- b-3) Aceras y rampas. En cualquier dirección:  
6 mm con regla de 3 m apoyada sobre dos puntos cualesquiera, una vez endurecido el hormigón y antes de 72 horas de vertido.

#### A-4.5.10 OBRAS CIVILES DE ELEMENTOS DE GRAN ESPESOR NO INCLUIDAS EN OTROS APARTADOS

- a) *Desviación de la vertical*
- Superficies vistas  $\pm 30 \text{ mm}$
- Superficies ocultas  $\pm 50 \text{ mm}$

- b) *Desviación lateral*
- Superficies vistas  $\pm 30 \text{ mm}$
- Superficies ocultas  $\pm 50 \text{ mm}$
- c) *Desviación de nivel*
- Superficies vistas, fratasadas o encofradas  $\pm 12 \text{ mm}$
- Superficies ocultas, fratasadas o encofradas  $\pm 24 \text{ mm}$
- d) *Desviación relativa*
- d-1) Superficies planas encofradas respecto a la posición básica del plano.
- Desviaciones en 3 m.
- Superficies vistas  $\pm 12 \text{ mm}$
- Superficies ocultas  $\pm 24 \text{ mm}$
- d-2) Superficies no encofradas, aparte pavimentos y aceras, respecto a la posición básica del plano de referencia.
- Desviaciones:
- En 3 m  $\pm 6 \text{ mm}$
- En 6 m  $\pm 10 \text{ mm}$

#### BIBLIOGRAFÍA

- (A-4.1) CALAVERA RUIZ, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; BLANCO GARCÍA, F.; CORTÉS BRETÓN, J.M.; DÍAZ LOZANO, J.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; CORRAL FOLGADO, C.; HOSTALET ALBA, F.; JORDÁN DE URRÍES DE LA RIVA, J.; JALVO GARCÍA J.; LUZÓN CÁNOVAS, J.M.; TAPIA MENÉNDEZ J. y MUÑOZ MESTO, A. "Tolerancias en la construcción de obras de hormigón". Cuadernos INTEMAC, nº 18, 2º Trimestre. 1995.
- (A-4.2) CALAVERA, J.; "The state of the art of the problems of tolerances in concrete structures". FIP 78. 8th Congress. Londres. Mayo 1978.
- (A-4.3) URIARTE, M.A.; "Tolerancia dimensional en estructuras de edificios". Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos de Álava. 1980.
- (A-4.4) F.I.P. "Tolerancias en estructuras de hormigón". (Versión española). Hormigón y Acero. 1971.
- (A-4.5) H.P. 5-79 "Recomendaciones para la disposición y colocación de armaduras". ATEP e IETCC. Madrid. 1979.
- (A-4.6) ACI 117-90 "Standard specifications for tolerances for concrete construction and materials". 1990.

- (A-4.7) TOLERANCES FOR CONCRETE STRUCTURES. Joint Committee of Commission of Practical Construction and Commission on Prefabrication. F.I.P. (1970)<sup>1</sup>.
- (A-4.8) MODEL CODE CEB-FIP. 1990.
- (A-4.9) EUROCODE N° 2 "Design of concrete structures. Part 1 General rules and rules for buildings". Commission of the European Communities. 1989.
- (A-4.10) ISO 1803/1 "Construction immobiliarie - Tolerances - Vocabulaire - Partie 1: Termes généraux" (1985).
- (A-4.11) ISO 3443/5 "Construction immobiliarie - Tolerances pour le bâtiment - Partie 5: Serie de valeurs à utiliser pour la spécification de tolerances" (1982).
- (A-4.12) ISO 1976/1 "Tolerances pour le bâtiment - Méthodes de mesure des bâtiment et des produits pour le bâtiment - Partie 1: Methodes et instruments" (1989).
- (A-4.13) ISO 1976/2 "Tolerances pour le bâtiment - Méthodes de mesure des bâtiment et des produits pour le bâtiment - Partie 2: Positions des points de mesure" (1989).
- (A-4.14) ASTM E 1155-87 "Standard test method for determining floor flatness and levelness using the f-number system". (1987).
- (A-4.15) CIB. Publication 112 "Tolerances". (1989).
- (A-4.16) CALAVERA, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; VALENCIANO, F. "Manual de Ferralla". Coedición INTEMAC-ANIFER. 2ª Edición. Madrid, 1999.

<sup>1</sup> Este Joint Committee fue presidido por J. Calavera. La referencia (A-4.4) es la versión española de la publicación de la F.I.P.

## ANEJO N° 5

### RECOMENDACIONES PARA HORMIGÓN DE ALTAS PRESTACIONES

#### A-5.1 INTRODUCCIÓN

Aunque EHE en su Anejo 11 trata este tema bajo el nombre de "hormigón de alta resistencia (HAR)", hemos preferido emplear el término más general de hormigón de altas prestaciones (HAP). Aparte de que es un nombre que se va imponiendo en la literatura técnica, en especial, se correlaciona bien con las expresiones "high performance" en inglés y "hautes performances" en francés.

Una razón adicional es que a veces se producen hormigones de altas prestaciones sin que sean de alta resistencia. Dos ejemplos típicos son el empleo de hormigones con microfílica, de resistencia media, para aumentar su durabilidad y el de hormigones de resistencia 25 ó 30 MPa, pero autocompactados, que constituyen un caso de alta prestación sin ser de alta resistencia.

En la práctica no cabe duda de que la mayoría de los casos de empleo de estos hormigones se basan en el interés que presenta la alta resistencia.

El articulado de EHE es válido para hormigones de resistencia no superior a 50 MPa. No todo ese articulado es válido para el hormigón de resistencias superiores y por eso el Anejo 11 introduce las modificaciones necesarias en aquellos aspectos que lo requieren, para extender el empleo hasta 100 MPa.

#### A-5.2 DESARROLLO DE LOS HAP

Históricamente el desarrollo en los HAP se inicia en los Estados Unidos hacia finales de los 60, buscando economías y posibilidades para los edificios de gran altura.

Sin embargo no ha sido ese el único interés impulsor de los HAP, sino que pueden señalarse cinco grandes corrientes diferentes en su desarrollo, que simplificadoamente se resumen en la figura A-5-1

LAS CINCO CORRIENTES DEL HAP				
1	EDIFICIOS ALTOS	U. S. A.	~	1970
2	PUNTES	U. S. A. / JAPÓN	~	1975
3	PREFABRICACIÓN	U. S. A.	~	1975
4	PLATAFORMAS PETROLÍFERAS	NORUEGA	~	1980
5	LOSAS Y PLACAS DE GRAN ESBELTEZ	SUIZA	~	1980

Figura A-5-1

El desarrollo de la alta resistencia no ha sido, como es lógico, paralelo al crecimiento de la altura. La figura A-5-2 indica el desarrollo de la altura a través del tiempo.

#### HAP - DESARROLLO DE LA ALTURA

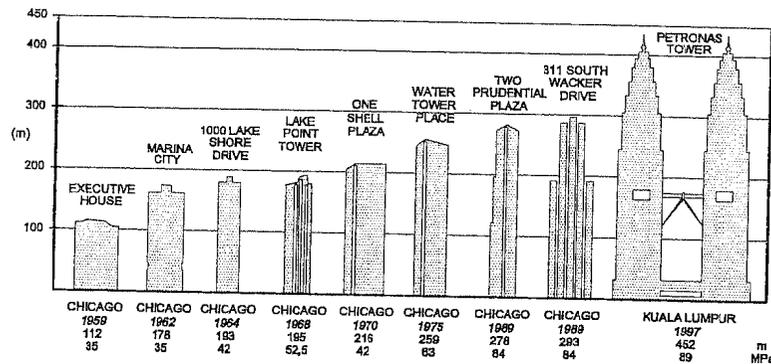


Figura A-5-2

La figura A-5-3 indica el desarrollo de la resistencia a través de los años.

#### HAP - DESARROLLO DE LA RESISTENCIA

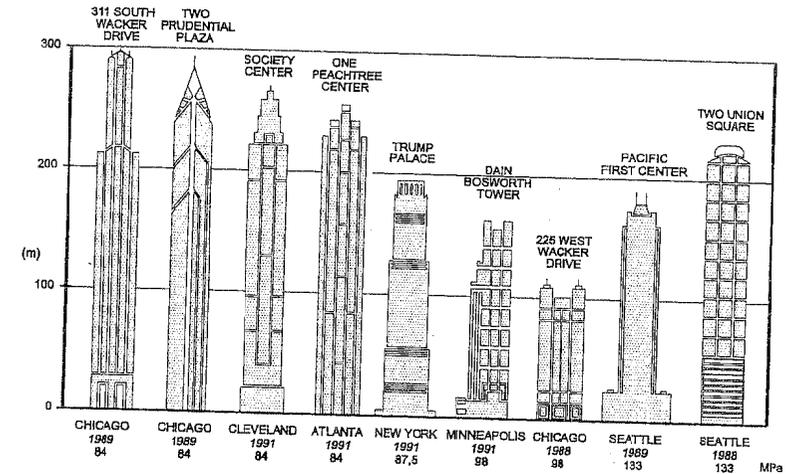


Figura A-5-3

Los campos de aplicación de los HAP son hoy muy diversos. En la figura A-5-4 se resumen los más importantes.

CAMPOS DE UTILIZACIÓN	
•	PUNTES DE CARRETERA
•	PUNTES DE FERROCARRIL
•	TÚNELES
•	EDIFICIOS ALTOS
•	PLATAFORMAS PETROLÍFERAS
•	CENTRALES NUCLEARES
•	PAVIMENTOS
•	PREFABRICACIÓN
	<ul style="list-style-type: none"> <li>PUNTES</li> <li>NAVES</li> <li>POSTES</li> <li>LOSAS</li> <li>TUBOS</li> </ul>

Figura A-5-4

NORMATIVA DESTACADA		
INTERNACIONAL:	CEB-FIP MODEL CODE 1990	
NACIONAL:	SUECIA	BBK-1979
	JAPÓN	JSCE-1980
	FINLANDIA	MK B4-1983
	CANADÁ	CAAN 3 M 84 - 1984
	U. S. A.	ACI 318-89
	NORUEGA	NS 3473-1992
	HOLANDA	NEN 6720 - 1994
	ALEMANIA	DA ISb - 1993
	ESPAÑA	EHE

Figura A-5-5

La mayoría de los países han ido redactando normas específicas para los HAP, o bien añadiendo partes específicas en sus normas generales.

La figura A-5-5 resume el desarrollo de la Normativa, que naturalmente ha seguido con retraso a la utilización real de este material.

La información sobre el tema es hoy amplísima y una bibliografía seleccionada es la indicada en las referencias (A-5.1), (A-5.2), (A-5.3), (A-5.4), (A-5.5), (A-5.6), (A-5.7) y (A-5.8).

### A-5.3 ASPECTOS DIFERENCIALES DE LOS HAP RESPECTO A LOS HORMIGONES ORDINARIOS

#### A-5.3.1 CAMPO DE APLICACIÓN

Lo que sigue es directamente aplicable a hormigones compuestos por cemento, agua, áridos y aditivos y, como única adición, el humo de sílice<sup>1</sup>. Por supuesto pueden emplearse otras adiciones previa justificación experimental.

#### A-5.3.2 PESO PROPIO

Se deben tomar los siguientes

Hormigón en masa 24 kN/m<sup>3</sup>

Hormigón armado y pretensado 26 kN/m<sup>3</sup>

#### A-5.3.3 CEMENTOS

Se deben utilizar los del tipo 1. Generalmente se emplean los tipos CEM 1 42,5R y CEM 1 52,5R.

El suministrador del cemento debe entregar el certificado de características, que en este caso debe incluir la composición potencial del cemento.

Dadas las dosificaciones habitualmente empleadas, el incremento de temperatura puede ser muy alto. (En las Torres Petronas, fotografía 1-7, en la primera torre se alcanzaron 92°C en el centro de los pilares de planta baja, de sección 2,40 · 2,40 m. En la segunda torre se reestudió la dosificación reduciendo el contenido de cemento con una adición de cenizas volantes, y se rebajó la temperatura a 85°C).

Por supuesto pueden emplearse cementos de bajo calor de hidratación, pero en general esto no es imprescindible si la dosificación es estudiada por especialistas que alcancen la alta resistencia con una buena dosificación y no con un incremento indiscriminado de la cantidad de cemento.

#### A.5.3.4 ÁRIDOS

Se han utilizado en general calizas, basaltos, ofitas, etc.

En los Ensayos de González Isabel (A-5.5) en INTEMAC, con árido calizo y dosificaciones de 420 kg/m<sup>3</sup> de CEM 52,5 se alcanzaron resistencias (en obra) de 60 MPa y con 8% de microsílíce y 480 kg/m<sup>3</sup> de CEM 52,5 se alcanzan los 80 MPa.

En general el tamaño máximo óptimo de árido suele ser del orden de 12 mm.

#### A-5.3.5 ADITIVOS

La producción de HAP para empleos generales no es posible sin la utilización de aditivos superfluidificantes. De hecho es usual manejar relaciones A/C ≈ 0,28 con descensos de cono de ABRAMS prácticamente totales.

<sup>1</sup> Frecuentemente se designa también como microsílíce. Es un subproducto recogido en los filtros anticontaminación de las fábricas de aleaciones de ferrosilicio. Su finura oscila entre 50 y 100 veces mayor que la del cemento y tiene propiedades hidráulicas. Véase UNE 83460-94 (A-5.9).

Sin embargo este tipo de aditivos producen un incremento rápido de la consistencia del hormigón, al reducir el tiempo de fraguado del cemento y el endurecimiento de la masa. Los ensayos previos son en este caso imprescindibles y frecuentemente la solución más conveniente pasa por el empleo de dos superfluidificantes de diferente familia.

#### A-5.3.6 ADICIONES

Como hemos dicho, para resistencias en obra no superiores a 60 MPa no es necesario el uso de humo de sílice. Para valores de resistencia superiores tal adición es necesaria. En general la dosificación de humo de sílice, expresada en porcentaje de la de cemento no suele ser superior al 8% ya que con valores superiores no se consiguen incrementos apreciables de resistencia del hormigón y en cambio se incrementa mucho su coste.

#### A-5.3.7 LA DOSIFICACIÓN

Actualmente la dosificación de los HAP requiere estudios muy especializados para conseguir la alta resistencia con contenidos moderados de cemento.

#### A-5.3.8 EL ENSAYO DE PROBETAS

Los HAP presentan tres aspectos particulares que deben ser tenidos en cuenta:

- Frecuentemente y dado que el tamaño máximo del árido nunca pasa de los 25 mm, se emplean para el control probetas de 100 mm de diámetro y 200 mm de altura. Los coeficientes de conversión habituales a probetas 150/300 no sirven para estos hormigones. El mejor sistema es determinarlos directamente mediante ensayos. Como un orden de magnitud, la resistencia en probetas 100/200 es del orden del 1,05 para H-60 y decrece hasta 1,00 para H-100.
- El refrentado con mortero de azufre, siempre que la fusión se realice con temperatura muy controlada es válido para resistencias hasta 80 MPa. Para resistencias mayores es necesario recurrir a productos especiales de refrentado.
- Un punto esencial en el ensayo de HAP es el uso de prensas de capacidad holgada, con sensibilidad de rótulas de alto nivel y con platos de rigidez adecuada.

El empleo de prensas de poca capacidad conduce a almacenamientos importantes de energía durante el ensayo, con falseamiento importante de los resultados.

#### A-5.3.9 ASPECTOS RELACIONADOS CON LA DURABILIDAD

La estructura de los HAP, en cualquier caso pero en especial cuando incorporan humo de sílice, presenta una porosidad muy inferior a la de los hormigones ordinarios, lo cual conduce a que presenten también una reducida permeabilidad lo que repercute en:

- Mejor durabilidad frente a ataques químicos en general.
- Mejor durabilidad frente a problemas de corrosión de armaduras debido a la menor penetración de anhídrido carbónico, con la consiguiente reducción del espesor de carbonatación y a la menor penetración del ión cloro.
- Mejor resistencia a los ciclos hielo-deshielo.
- Recordamos la necesidad de controlar el calor generado en las primeras horas (Ver 69.1 y en particular la figura 69-1) a través de una dosificación bien estudiada.
- La resistencia de los HAP a la acción del fuego está insuficientemente estudiada. El hecho de que retengan más agua en la matriz los hace propicios a la expulsión del recubrimiento con más facilidad que en los hormigones ordinarios.

### A-5.3.10 DATOS DE LOS MATERIALES PARA EL PROYECTO

#### a) Resistencia a compresión

La serie tipificada por EHE es la siguiente, medida en probeta cilíndrica 150/300.

H-55 H-60 H-70 H-80 H-90 H-100



ROTURA DE UNA PROBETA DE HORMIGÓN

CON  $f_{ck} = 115 \text{ MPa}$   
(Cortesía de INTEMAC)

Figura A-5-6

El HAP en masa es un material frágil (Ver figura A-5-5) lo cual no quiere decir que el HAP armado o pretensado no presenten la ductilidad necesaria.

#### b) Resistencia a tracción

Las fórmulas correspondientes a los hormigones ordinarios ([28.1], [28.2] y [28.3]) son conservadoras para los HAP.

#### c) Módulo de deformación

Las fórmulas generales [28.10] y [28.11] son válidas hasta  $f_{ck} = 100 \text{ MPa}$

MÓDULO INSTANTÁNEO TANGENTE DE DEFORMACIÓN

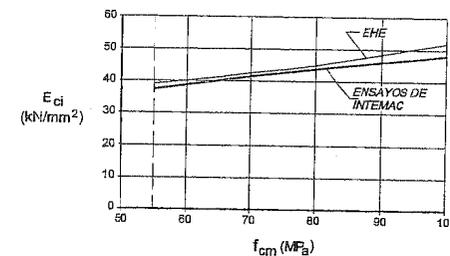


Figura A-5-7

La figura A-5-7 muestra la comparación de los valores de EHE con los obtenidos en ensayos de GONZÁLEZ ISABEL (A-5.5) en INTEMAC.

#### d) Retracción

La figura A-5-8 adaptada de la referencia (A-5-6) muestra que si bien a edades cortas los HAP presentan valores más altos de la retracción que los hormigones ordinarios, a plazos medios y largos los valores son sensiblemente iguales.

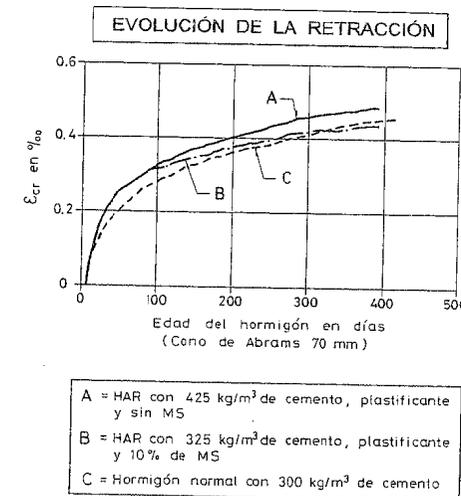
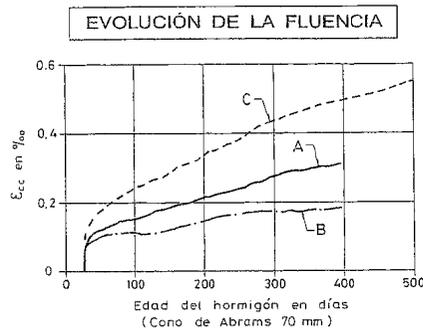


Figura A-5-8

#### e) Fluencia

Los valores generales de EHE son conservadores para los HAP, especialmente si incorporan humo de sílice.



A = HAR con 425 kg/m<sup>3</sup> de cemento, plastificante y sin MS  
 B = HAR con 325 kg/m<sup>3</sup> de cemento, plastificante y 10‰ de MS  
 C = Hormigón normal con 300 kg/m<sup>3</sup> de cemento

Figura A-5-9

A falta de datos de experimentación directa, la figura A-5-9 adaptada de la referencia (A-5-6) muestra la importante reducción de fluencia que presentan los HAR.

f) Estado límite último de tensiones normales

EHE establece lo siguiente:

Se puede utilizar el diagrama parábola rectángulo pero reduciendo la deformación al valor de

$$\varepsilon_{co} = 0,0035 \frac{50}{f_{ck}} \leq 0,002 \quad [A-5.1]$$

La figura A-5-10 presenta la evolución de los diagramas al aumentar la resistencia.

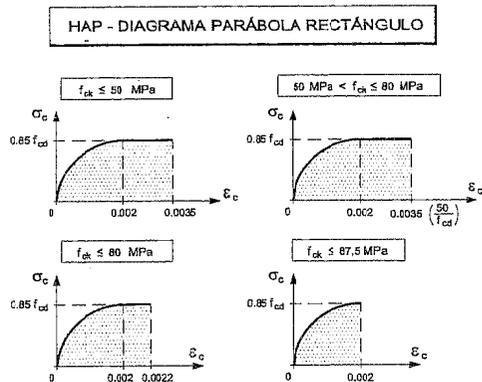


Figura A-5-10

Otra posibilidad, muy utilizada en la práctica, es adoptar un diagrama rectangular tal como se indica en la figura A-5-11.

RECTÁNGULO:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= 0,85 f_{cd} \\ y &= \lambda x \\ \lambda &= \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \leq \frac{2}{3} \\ (\text{si } x > \frac{h}{\lambda}, y &= h) \end{aligned}$$

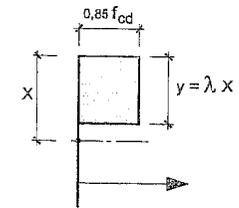
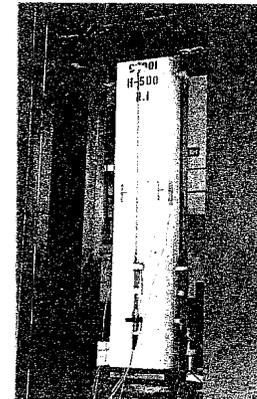


Figura A-5-11

Una fórmula general (adoptada por la Norma Noruega (NS-3473-1992) sustituye el valor  $0,85 f_{cd}$  por  $K \cdot f_{cd}$ , donde  $K$  varía de 0,8 para  $f_{ck} = 50 \text{ MPa}$  hasta 0,7 para  $f_{ck} = 100 \text{ MPa}$ .

Los ensayos de pilares a escala real realizados por INTEMAC en 1992 (A-5.8), presentaron una coincidencia excelente con esta fórmula.

Las figuras A-5-12 y A-5-13 presentan aspectos generales de estos ensayos



(Cortesía de INTEMAC)  
Figura A-5-12

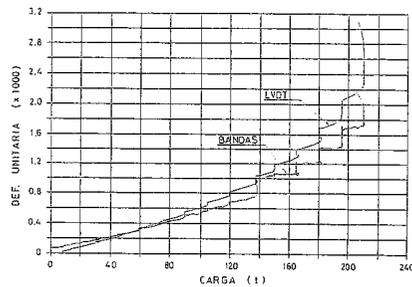


(Cortesía de INTEMAC)  
Figura A-5-13

Los diagramas compresión-acortamiento en pilares, a medida que aumenta la resistencia van reduciendo el escalón horizontal.

CURVAS CARGA - ACORTAMIENTO EN PILARES  
ENSAYOS DE INTEMAC - 1992

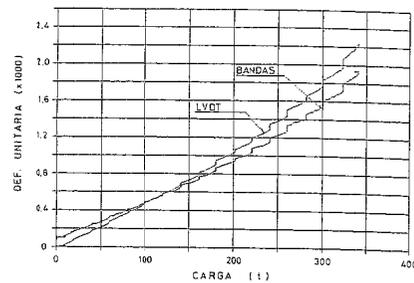
H - 25



a)

CURVAS CARGA - ACORTAMIENTO EN PILARES  
ENSAYOS DE INTEMAC - 1992

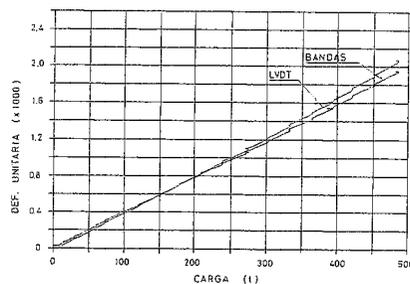
H - 60



b)

CURVAS CARGA - ACORTAMIENTO EN PILARES  
ENSAYOS DE INTEMAC - 1992

H - 100



c)

Figura A-5-14

La figura A-5-14 presenta las curvas de tres pilares con resistencias 25, 60 y 100 MPa.

g) *Esfuerzo cortante*

Dado que la rotura en los planos de las fisuras se produce, para resistencias altas, con rotura del árido, el rozamiento en las fisuras es inferior al esperable.

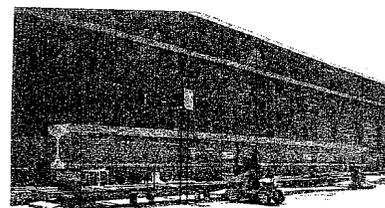
De acuerdo con ello, en el cálculo del valor de  $V_{cu}$  no se considerarán valores de  $f_{ck}$  superiores a 60 MPa.

Un punto de especial interés es el de la máxima compresión en las bielas con HAP.

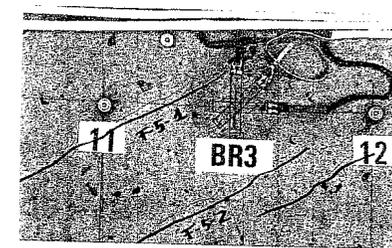
La normativa tanto del CEB como de los Eurocódigos han ido exagerando en sucesivas ediciones los márgenes de prudencia al aumentar el valor de  $f_{ck}$ .

A la vista de ello, FEDECE encargó un estudio a los Profesores A. APARICIO, F. del POZO y J. CALAVERA, cuyo detalle figura en la referencia (A-5-10).

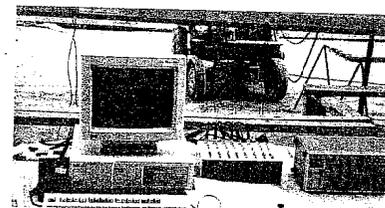
Las figuras A-5-15 a A-5-20 indican los tipos de vigas ensayadas y algunos aspectos de los ensayos



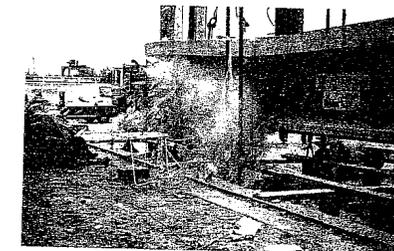
A-5-15



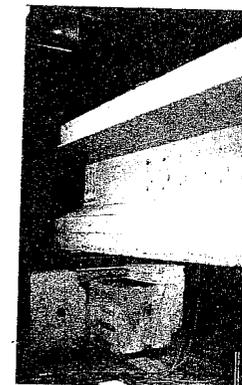
A-5-16



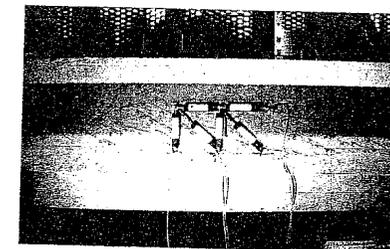
A-5-17



A-5-18



A-5-19



A-5-20

Los resultados demostraron claramente que los límites establecidos por el CEB y los Eurocódigos eran excesivamente prudentes.

De acuerdo con ello EHE establece como compresión máxima de bielas ( $\sigma_{cd}$ ) por cortante los valores siguientes

$$f_{ck} \leq 60 \text{ MPa}$$

$$60 < f_{ck} \leq 80 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} > 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cd} = 0,6 f_{cd}$$

$$\sigma_{cd} = (0,9 - 0,005 f_{ck}) f_{cd}$$

$$\sigma_{cd} = 0,5 f_{cd}$$

La figura A-5-21 recoge la comparación entre las sucesivas normas del CEB y de los Eurocódigos y la formulación adoptada por EHE.

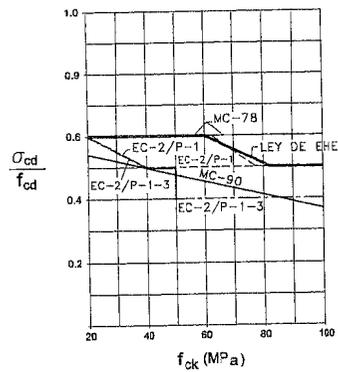


Figura A-5-21

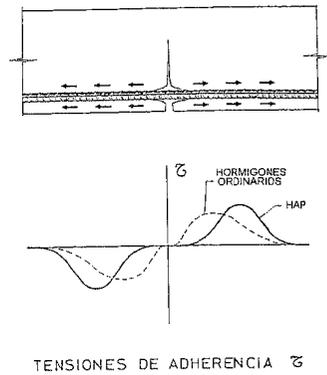


Figura A-5-22

h) Torsión

Rigen para las bielas las mismas fórmulas que para esfuerzo cortante.

i) Punzonamiento

Como en el caso de esfuerzo cortante la resistencia a considerar en el cálculo para la colaboración del hormigón no será superior a 60 MPa.

El valor de la compresión en bielas se limita a  $0,3 f_{cd}$ .

j) Adherencia y anclaje

A falta de experimentación directa, pueden utilizarse las fórmulas establecidas para hormigones ordinarios, no considerando en el cálculo valores de  $f_{ck}$  superiores a 50 MPa.

La figura A-5-21 muestra en esquema la mejora de adherencia y el más rápido anclaje en los labios de las grietas que supone el empleo de HAP.

Esto mejora el fenómeno de "tensión-stiffening" y reduce las flechas en mayor medida de lo que cabría esperar solamente del aumento de  $E_c$ .

Las fórmulas generales de cálculo de deformaciones, especialmente las correspondientes a deformaciones diferidas, están del lado de la seguridad. Un trabajo interesante sobre el tema es el citado como referencia (A-5-11).

k) Juntas de hormigonado y contracción

Las temperaturas más altas alcanzadas a continuación del hormigonado obligan a respetar estrictamente lo indicado en el Capítulo 24 para las juntas de contracción.

Un caso particular pero de especial interés es el de edificios de gran altura, en los cuales normalmente se emplea HAP en pilares de plantas bajas y medias mientras las vigas y losas suelen hormigonarse con hormigones H-30 ó H-35.

Existen dos alternativas

- En la primera, el nudo (Fig. A-5-23a)) ha de ser hormigonado con HAP. El proceso normal de ejecución, si el hormigón de los pilares supera en más de un 40% el de vigas y forjados<sup>1</sup> es hormigonar con HAP una zona de losas y vigas de longitud 600 mm alrededor del pilar y hormigonar el resto de la estructura horizontal con el hormigón elegido para vigas y losas. El hormigón de vigas y losas, alrededor de la zona de 600 mm de H.A.P. debe ser colocado cuando éste esté todavía en estado plástico<sup>2</sup>.

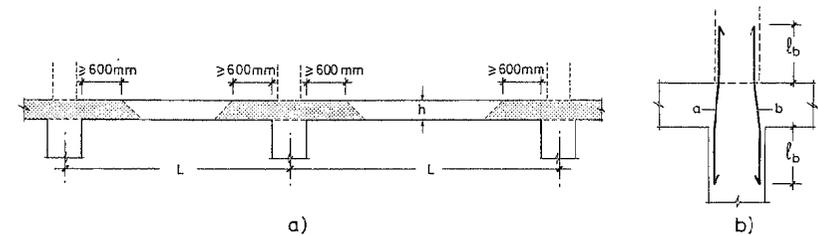


Figura A-5-23

- Una segunda alternativa es emplear en el nudo el hormigón de la losa pero incrementar la armadura longitudinal (Fig. A-5-23b) a y b, ancladas en el tramo superior e inferior.

En esta segunda alternativa una hipótesis aceptada por el ACI, si existen vigas o losas confinando las cuatro caras del pilar, es suponer que el hormigón del nudo tiene una resistencia

$$f_{ck,n} = 0,75 f_{ck,HAP} + 0,35 f_{ck,losa}$$

donde  $f_{ck,HAP}$  es la resistencia del hormigón de los pilares y  $f_{ck,losa}$  la de vigas y forjados.

1 La razón de permitir una diferencia del 40% es la hiperresistencia de los nudos por razones diversas. Véase J. CALAVERA (A-5-12).

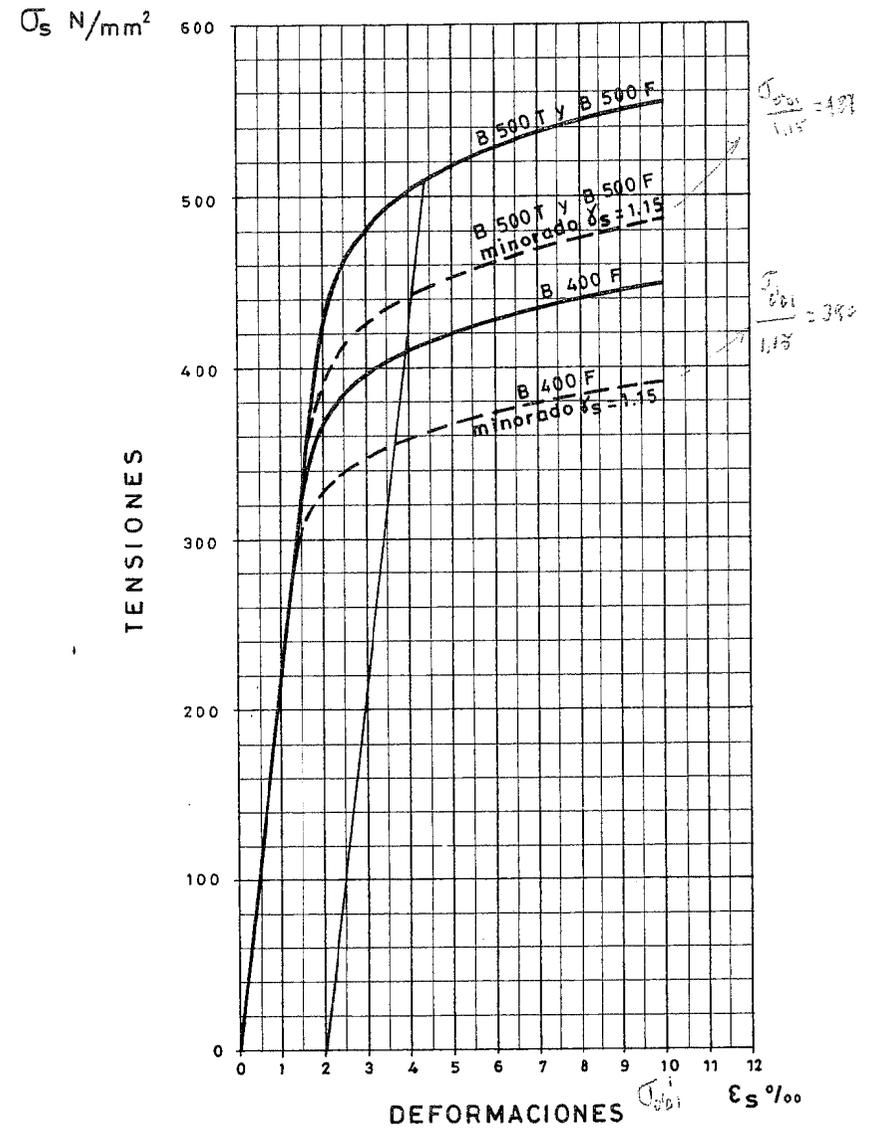
2 Una alternativa, es sustituir la zona de 600 mm por L/4, en cuyo caso carece de importancia que el HAP haya endurecido, pues se trata de una junta de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 24. Lo anterior se refiere a edificios en que las acciones verticales son preponderantes. De otra forma puede ser necesario el empleo de otras longitudes en lugar de L/4.

## BIBLIOGRAFIA

- (A-5.1) MALIER, Y.; "Les Betons a hautes performances". Presses d l'école nationale des Ponts et chaussées. 1990.
- (A-5.2) HOLAND, I.; HELLAND, S.; JAKOBSEN, B.; LENSCHOW, R.; "Utilization of high strength concrete". Proceedings Symposium in Stavanger, Norway. June 15-18, 1987.
- (A-5.3) HOLAND, I.; "Design aspects of high-strength concrete (Session IV A)". Resumes of the Lectures at the 26<sup>th</sup> CEB Plenary Session Dubrovnik. September 20 to 23, 1988.
- (A-5.4) SHAH, SP.; AHMAD, SH.; "High Performance concretes and applications". Edward Arnold (Pub.) LTD. 1994.
- (A-5.5) GONZÁLEZ ISABEL, G.; "Hormigón de alta resistencia". INTEMAC 1993.
- (A-5.6) FIP-CEB. Bulletin d'Information No. 197; "High Strength Concrete". August 1990.
- (A-5.7) AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI); "High Strength Concrete". Seminar Course Manual. 1987.
- (A-5.8) CALAVERA RUIZ, J.; GONZÁLEZ VALLE, E.; FERNÁNDEZ GÓMEZ, J.; GONZÁLEZ ISABEL, G.; "Un estudio de la resistencia a compresión de pilares de hormigón armado, fabricados con hormigón de alta resistencia". Hormigón y Acero. N° 190. 1994.
- (A-5.9) UNE 83460-94; "Adiciones al Hormigón. Humo de Sílice".
- (A-5.10) APARICIO, A.; CALAVERA, J.; DEL POZO, F.J.; "Plan de investigación sobre la compresión máxima en bielas, por esfuerzo cortante para vigas prefabricadas de hormigón pretensado con armaduras pretensas". FEDECE. Madrid, Noviembre 1997.
- (A-5.11) FAVRE, R.; JACCOUD, J.P.; FARRA, B.; MIVELAZ, P.; LECLERCQ, A.; "Cracking and Thightness of reinforced concretes structures and with extension of existing code for their application to crack control of HPC structures". E.P.F.L. Institut de statique et structures béton armé et précontraint. Département de Génie Civil. Publication N° 143. Janvier 1996.
- (A-5.12) CALAVERA RUIZ, J.; "Patología de estructuras de hormigón armado y pretensado". INTEMAC 1996.

## GRÁFICOS Y TABLAS GT

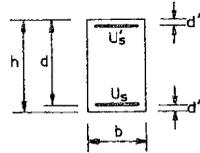
**GT-81**  
**DIAGRAMA DE TENSIONES - DEFORMACIONES**  
**(ACEROS DEFORMADOS EN FRÍO)**



GT-82  
SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN SIMPLE

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



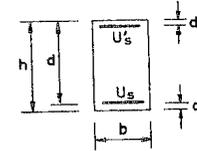
$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

GT-83  
SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN SIMPLE

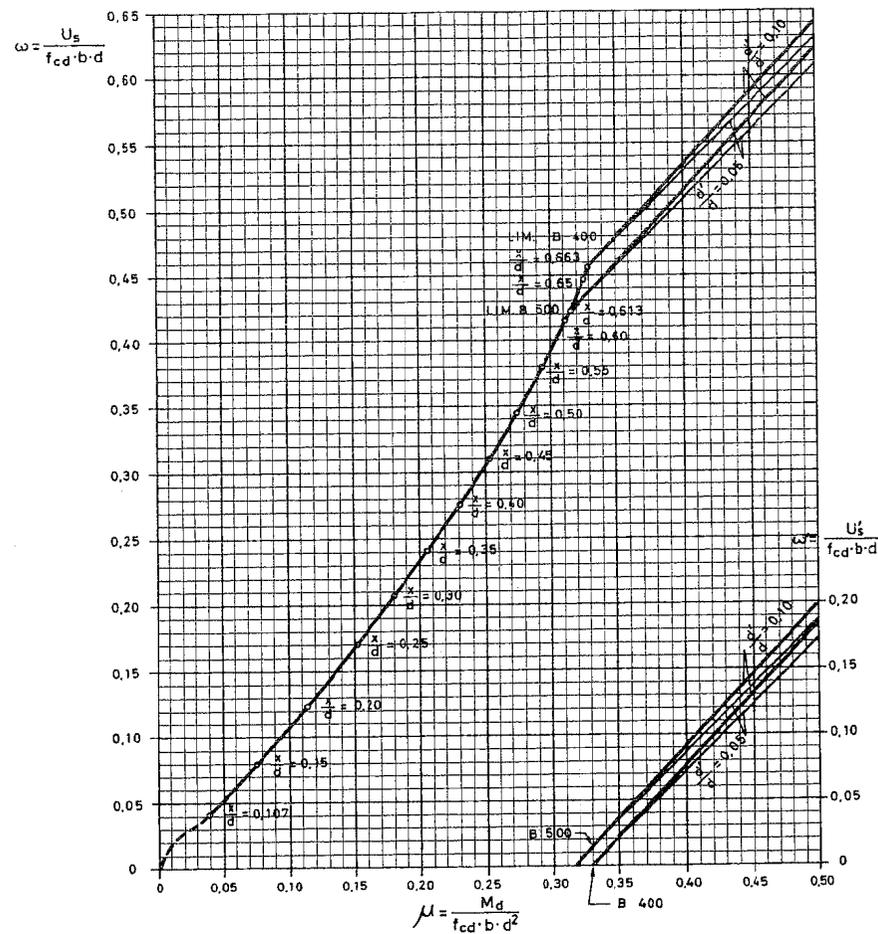
DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRÍO

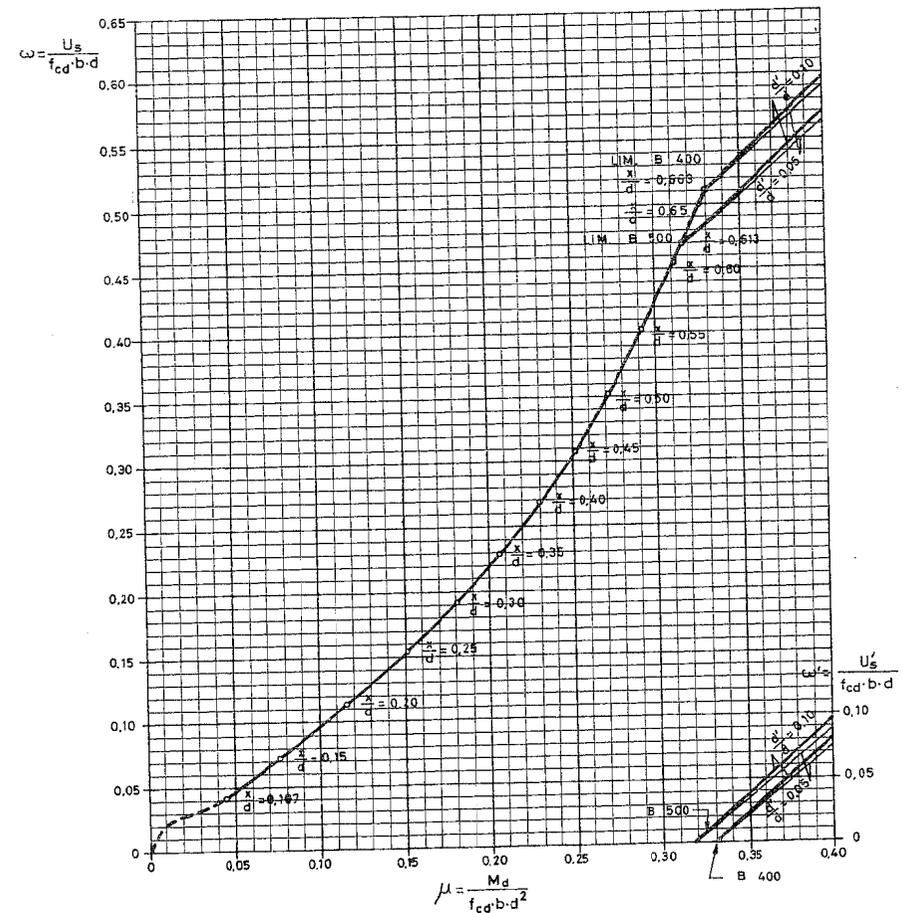


$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$



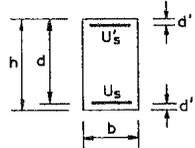
LA ZONA DE TRAZOS ES LA CORRESPONDIENTE A LA CUANTÍA MÍNIMA DE ACUERDO CON LA EHE



LA ZONA DE TRAZOS ES LA CORRESPONDIENTE A LA CUANTÍA MÍNIMA DE ACUERDO CON LA EHE

GT-84  
SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN SIMPLE

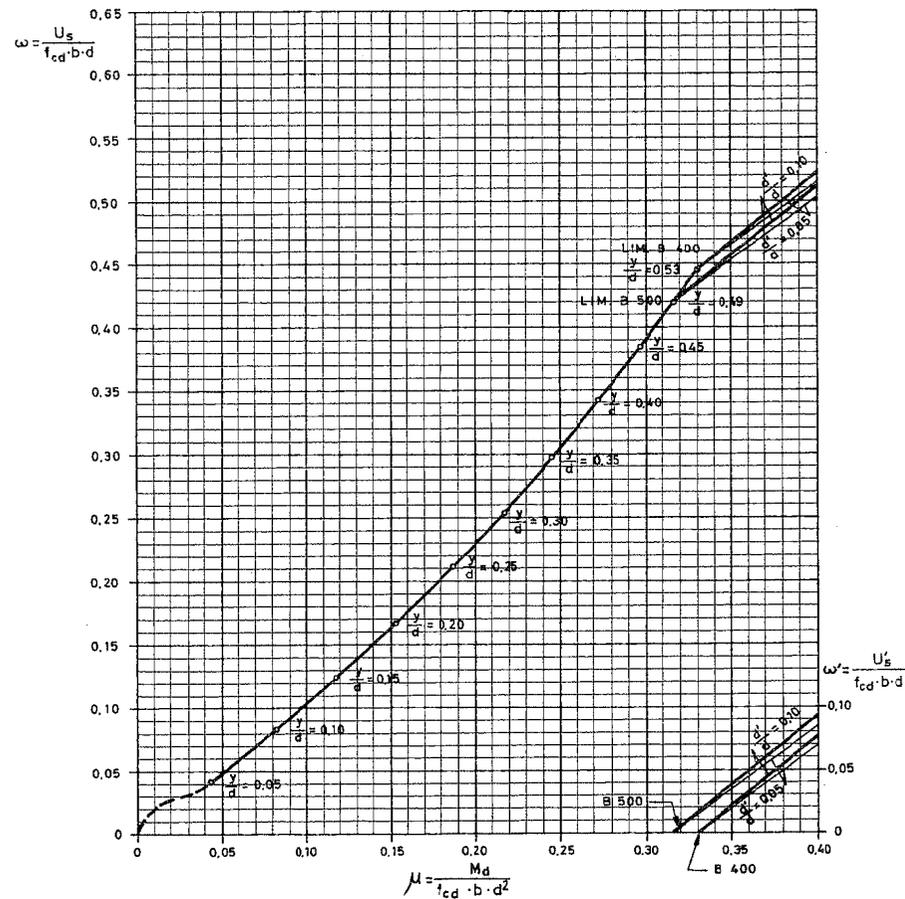
DIAGRAMA RECTANGULAR



ACERO DE DUREZA NATURAL

$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

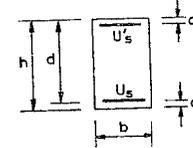


LA ZONA DE TRAZOS ES LA CORRESPONDIENTE A LA CUANTÍA MÍNIMA DE ACUERDO CON LA EHE

GT-85  
SECCIONES RECTANGULARES  
A FLEXIÓN SIMP

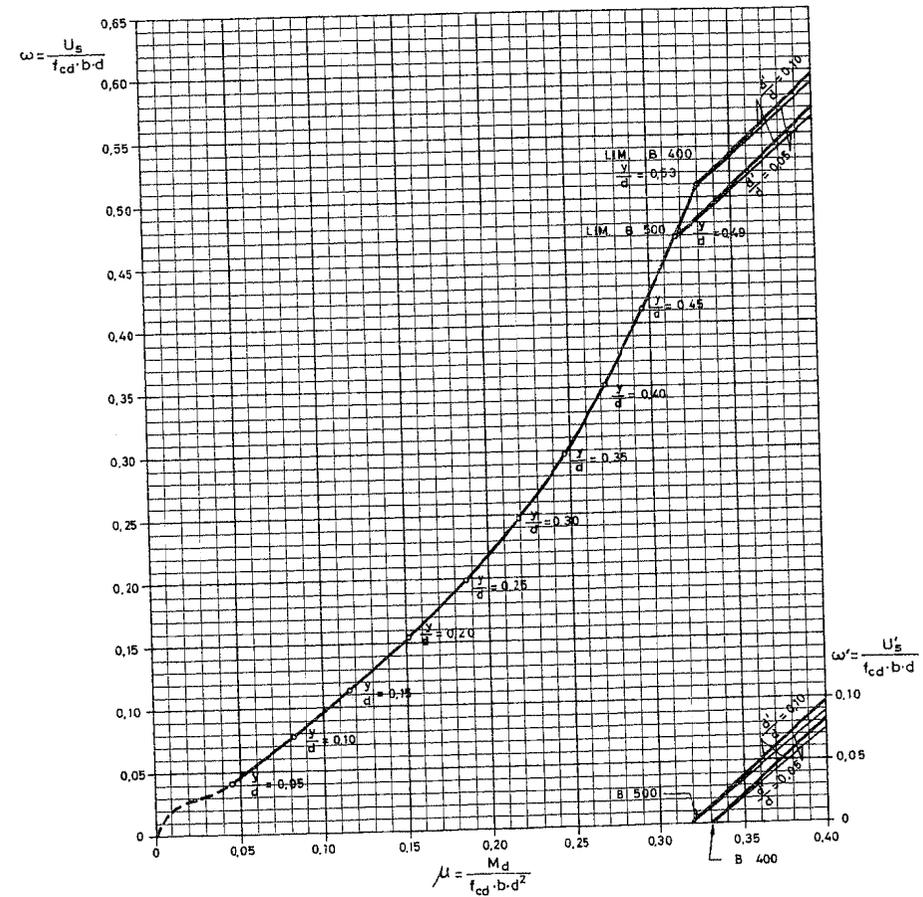
SECCIONES  
RECTANGULARES

DIAGRAMA RECTANGULAR



$$400 \leq f_{yk} \leq 500$$

$$\gamma_s = 1.15$$



LA ZONA DE TRAZOS ES LA CORRESPONDIENTE A LA CUANTÍA MÍNIMA DE ACUERDO CON LA EHE

GT-86

Ø	CAPACIDAD MECÁNICA EN kN SEGÚN EL Nº DE BARRAS. $f_{yd} = 400/1.15 = 347.83$ N									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	9,8	19,7	29,5	39,3	49,2	59,0	68,8	78,7	88,5	98,3
8	17,5	35,0	52,5	69,9	87,4	104,9	122,4	139,9	157,4	174,8
10	27,3	54,6	82,0	109,3	136,6	163,9	191,2	218,5	245,9	273,2
12	39,3	78,7	118,0	157,4	196,7	236,0	275,4	314,7	354,0	393,4
14	53,5	107,1	160,6	214,2	267,7	321,3	374,8	428,3	481,9	535,4
16	69,9	139,9	209,8	279,7	349,7	419,6	489,5	559,5	629,4	699,3
18	88,5	177,0	265,5	354,0	442,6	531,1	619,6	708,1	796,6	885,1
20	109,3	218,5	327,8	437,1	546,4	655,6	764,9	874,2	983,5	1092,7
22	132,2	264,4	396,7	528,9	661,1	793,3	925,5	1057,8	1190,0	1322,2
25	170,7	341,5	512,2	683,0	853,7	1024,4	1195,2	1365,9	1536,6	1707,4
28	214,2	428,3	642,5	856,7	1070,9	1285,0	1499,2	1713,4	1927,6	2141,7
30	245,9	491,7	737,6	983,5	1229,3	1475,2	1721,0	1966,9	2212,8	2458,6
32	279,7	559,5	839,2	1119,0	1398,7	1678,4	1958,2	2237,9	2517,6	2797,4
40	437,1	874,2	1311,3	1748,4	2185,5	2622,5	3059,6	3496,7	3933,8	4370,9
50	683,0	1365,9	2048,9	2731,8	3414,8	4097,7	4780,7	5463,6	6146,6	6829,5

GT-87

Ø	CAPACIDAD MECÁNICA EN kN SEGÚN EL Nº DE BARRAS. $f_{yd} = 500/1.15 = 434.78$ N									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	12,3	24,6	36,9	49,2	61,5	73,8	86,1	98,3	110,6	122,9
8	21,9	43,7	65,6	87,4	109,3	131,1	153,0	174,8	196,7	218,5
10	34,1	68,3	102,4	136,6	170,7	204,9	239,0	273,2	307,3	341,5
12	49,2	98,3	147,5	196,7	245,9	295,0	344,2	393,4	442,6	491,7
14	66,9	133,9	200,8	267,7	334,6	401,6	468,5	535,4	602,4	669,3
16	87,4	174,8	262,3	349,7	437,1	524,5	611,9	699,3	786,8	874,2
18	110,6	221,3	331,9	442,6	553,2	663,8	774,5	885,1	995,7	1106,4
20	136,6	273,2	409,8	546,4	683,0	819,5	956,1	1092,7	1229,3	1365,9
22	165,3	330,6	495,8	661,1	826,4	991,7	1156,9	1322,2	1487,5	1652,8
25	213,4	426,8	640,3	853,7	1067,1	1280,5	1494,0	1707,4	1920,8	2134,2
28	267,7	535,4	803,2	1070,9	1338,6	1606,3	1874,0	2141,7	2409,5	2677,2
30	307,3	614,7	922,0	1229,3	1536,6	1844,0	2151,3	2458,6	2766,0	3073,3
32	349,7	699,3	1049,0	1398,7	1748,4	2098,0	2447,7	2797,4	3147,1	3496,7
40	546,4	1092,7	1639,1	2185,5	2731,8	3278,2	3824,5	4370,9	4917,3	5463,6
50	853,7	1707,4	2561,1	3414,8	4268,5	5122,2	5975,9	6829,5	7683,2	8536,9

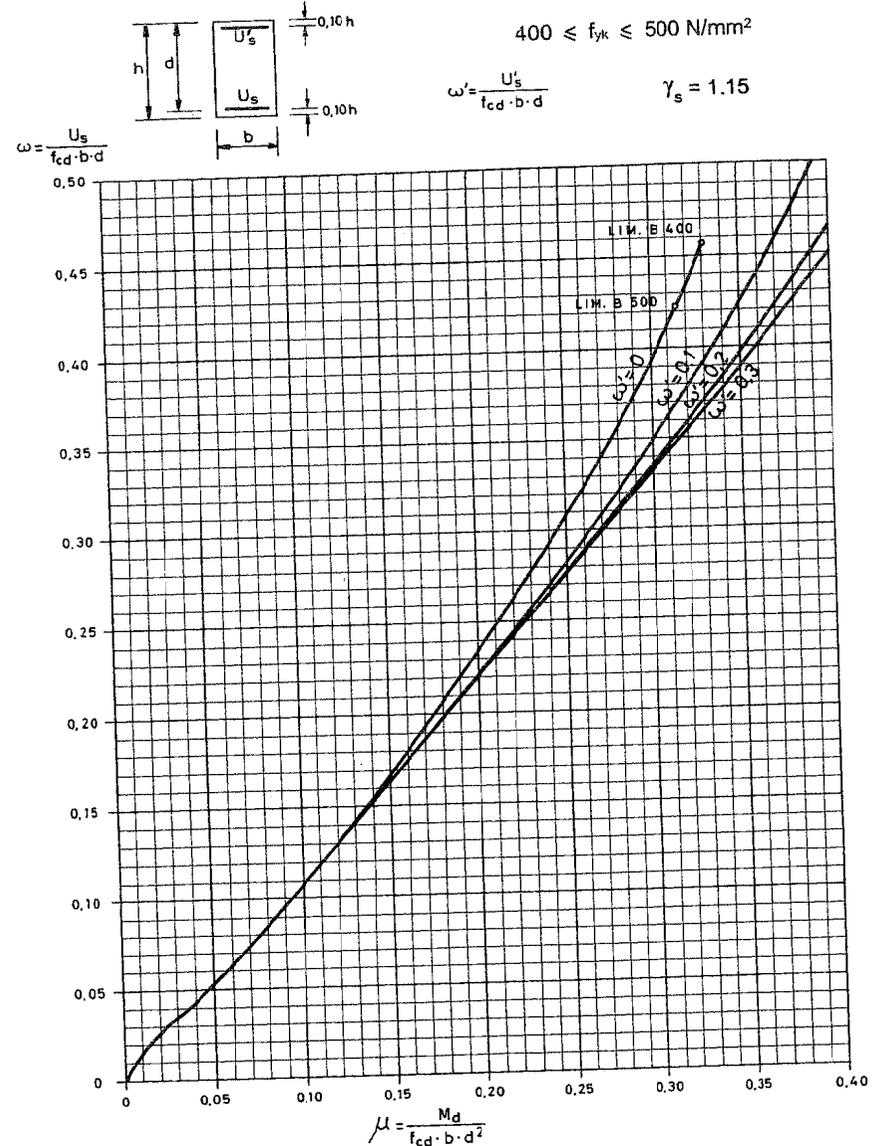
GT-88

SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A F' CON ARMADURA DE COMPRESIÓN NO PERO EXISTENTE

SECCIONES RECTANGULARES

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUR...



SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE, CON ARMADURA DE COMPRESIÓN NO NECESARIA PERO EXISTENTE

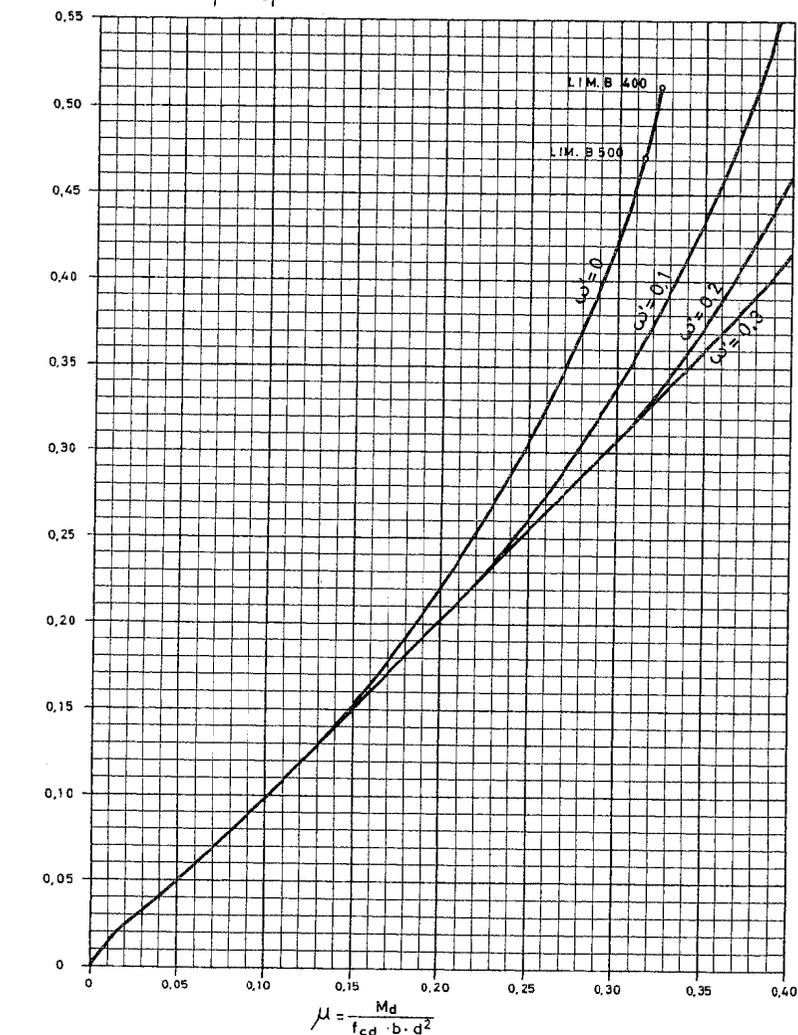
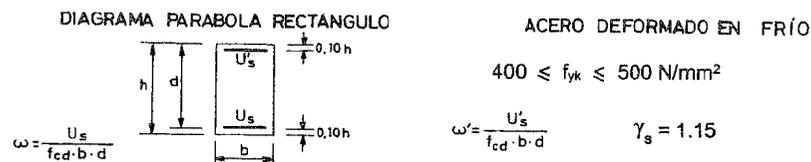
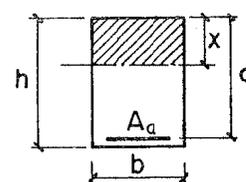


TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE PARA TENSIONES ARBITRARIAS CON ARMADURA SIMPLE



$m = \frac{\sigma_a}{\sigma_h}$   $z = k_z d$

Cálculo de dimensiones

$d = \sqrt{\frac{M_f k_1}{b \sigma_a}}$   $A_a = \frac{b d}{k_4}$   $M_f = \frac{b d^2 \sigma_a}{k_1}$

Determinación de tensiones

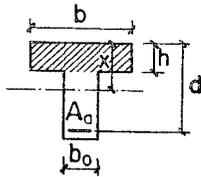
$\sigma_a = \frac{M_f}{k_z d A_a}$   $\sigma_h = \frac{\sigma_a}{m}$

UNIDADES: Mf en ton.cm.; Aa en cm<sup>2</sup>; longitudes en cm.; tensiones en ton/cm<sup>2</sup>

m	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	m	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	m	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9.0	0.792	36.38	28.80	15.0	0.833	72.00	60.00	32	0.884	224.4	200.5
9.1	792	36.89	29.24	15.2	834	73.35	61.20	33	896	235.8	211.2
9.2	793	37.41	29.68	15.4	835	74.71	62.42	34	898	247.4	222.1
9.3	794	37.94	30.13	15.6	837	76.08	63.65	35	900	259.3	233.3
9.4	795	38.46	30.58	15.8	838	77.46	64.88	36	902	271.4	244.8
9.5	0.796	38.99	31.03	16.1	0.839	79.55	66.76	37	0.904	283.8	256.5
9.6	797	39.52	31.48	16.4	841	81.87	68.66	38	906	296.5	268.5
9.7	798	40.05	31.94	16.7	842	83.80	70.58	39	907	309.5	280.8
9.8	798	40.59	32.40	17.0	844	85.97	72.53	40	909	322.7	293.3
9.9	799	41.13	32.87	17.3	845	88.16	74.51	41	911	336.1	306.1
10.0	0.800	41.67	33.33	17.6	0.847	90.36	76.50	42	0.912	349.9	319.2
10.1	801	42.21	33.80	17.9	848	92.59	78.52	43	914	363.8	332.5
10.2	802	42.75	34.27	18.2	849	94.85	80.56	44	915	378.2	346.1
10.3	802	43.30	34.75	18.5	851	97.13	82.63	45	917	392.7	360.0
10.4	803	43.85	35.22	18.8	852	99.43	84.72	46	918	407.5	374.1
10.5	0.804	44.41	35.70	19.1	0.853	101.2	86.84	47	0.919	422.6	388.5
10.6	805	44.96	36.18	19.4	855	104.1	88.98	48	921	438.0	403.2
10.7	805	45.52	36.66	19.7	856	106.5	91.14	49	922	453.8	418.1
10.8	806	46.08	37.15	20.0	857	108.9	93.33	50	923	469.4	433.3
10.9	807	46.65	37.64	20.5	859	112.9	97.03	52	925	502.0	464.5
11.0	0.808	47.21	38.13	21.0	0.861	117.1	100.8	54	0.927	536.6	496.8
11.2	809	48.35	39.12	21.5	863	121.2	104.6	56	930	570.3	530.1
11.4	811	49.50	40.13	22.0	865	125.5	108.5	58	932	606.0	564.5
11.6	812	50.66	41.14	22.5	867	129.8	112.5	60	933	642.9	600.0
11.8	813	51.84	42.16	23.0	868	134.2	116.5	62	935	680.7	636.5
12.0	0.815	53.02	43.20	23.5	0.870	138.6	120.6	64	0.937	719.7	674.1
12.2	816	54.21	44.24	24.0	872	143.2	124.8	67	939	780.1	732.5
12.4	818	55.41	45.30	24.5	873	147.7	129.0	70	941	842.9	793.3
12.6	819	56.63	46.36	25.0	875	152.4	133.3	75	944	952.9	900.0
12.8	820	57.85	47.44	25.5	877	157.1	137.7	80	947	1.070.0	1.013
13.0	0.821	59.08	48.53	26.0	0.878	161.9	142.1	90	0.952	1.323.0	1.260.0
13.2	823	60.32	49.63	26.5	879	166.7	146.6	100	956	1.603	1.533
13.4	824	61.58	50.74	27.0	881	171.6	151.2	110	960	1.910	1.832
13.6	825	62.85	51.86	27.5	882	176.6	155.8	130	965	2.603	2.513
13.8	826	64.12	52.99	28.0	884	181.7	160.5	150	970	3.408	3.300
14.0	0.828	65.41	54.13	28.5	0.885	186.8	165.3	180	0.974	4.803	4.680
14.2	829	66.71	55.28	29.0	886	191.9	170.1	210	978	6.443	6.300
14.4	830	68.02	56.44	29.5	888	197.2	175.0	240	980	8.323	8.160
14.6	831	69.33	57.62	30.0	889	202.5	180.8	270	982	10.443	10.260
14.8	832	70.66	58.80	31.0	891	213.3	190.1	300	984	12.803	12.800

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES DE VIGAS T SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE PARA TENSIONES ARBITRARIAS CON ARMADURA SIMPLE

Sin considerar las tensiones en el nervio



$$e = \frac{h}{d}$$

$$m = \frac{\sigma_a}{\sigma_h}$$

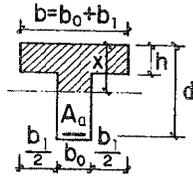
$$z = i_z d$$

$$b_1 = \frac{i_1 M_f}{\sigma_a d^2} \leq b \text{ máximo admisible}$$

$$A_a = \frac{M_f}{\sigma_a z} = \frac{b d}{i_4} \quad M_f = A_a \sigma_a z = \frac{b d^2 \sigma_a}{i_1}$$

Determinación de tensiones  $\sigma_a = \frac{M_f}{i_z d A_a} \quad \sigma_h = \frac{\sigma_a}{m}$

Considerando las tensiones en el nervio



$$M_{f0} = \frac{b_0 d^2 \sigma_a}{k_1} \quad M_{f1} = M_f - M_{f0}$$

$$b_1 = \frac{i_1 M_{f1}}{\sigma_a d^2} \leq b \text{ máximo admisible}$$

$$A_a = d \left( \frac{b_1}{i_4} + \frac{b_0}{k_4} \right) \quad M_f = d^2 \sigma_a \left( \frac{b_1}{i_1} + \frac{b_0}{k_1} \right)$$

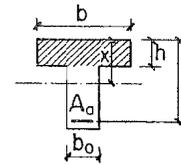
$$h = \sqrt{\frac{M_f}{\sigma_a \left( \frac{b_1}{i_1} + \frac{b_0}{k_1} \right)}} \quad z = \frac{M_f}{\sigma_a A_a}$$

UNIDADES: Momentos tcm, longitudes cm., armaduras cm<sup>2</sup>, tensiones t/cm<sup>2</sup>

φ = h/d	m = 15			m = 20			m = 25			m = 30		
	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0.05	0,976	323	315	0,976	435	424	0,976	549	535	0,976	664	648
6	971	273	265	971	369	358	971	466	452	971	565	549
7	966	238	230	966	321	310	966	407	393	966	494	478
8	962	212	204	962	287	276	962	364	350	962	443	426
9	957	191	183	957	260	248	957	330	316	957	402	385
10	952	175	166	952	238	226	952	302	288	952	371	353
0.11	0,948	161	153	0,948	220	209	0,948	280	266	0,948	344	327
12	943	150	142	943	206	194	943	262	248	943	323	306
13	939	140	131	939	193	181	939	248	233	939	305	287
14	934	133	124	934	182	171	934	234	220	934	289	271
15	930	126	117	930	173	162	930	224	208	930	277	258
0.16	0,925	120	111	0,925	166	154	0,925	214	199	0,925	265	247
17	921	114	105	921	159	147	921	206	190	921	257	237
18	917	110	101	917	153	141	917	198	183	917	248	228
19	913	106	97,4	913	148	136	913	192	176	913	241	221
20	909	103	93,8	909	143	130	909	187	170	909	234	214
0.21	0,906	99,9	90,6	0,906	139	126	0,906	182	166	0,912	229	209
22	901	97,0	87,7	901	135	122	901	177	161	908	224	204
23	897	94,3	84,7	897	132	119	897	173	157	906	220	199
24	893	92,0	82,2	893	129	116	893	170	153	903	216	195
25	889	90,0	80,0	889	126	113	889	167	150	900	214	192
0.26	0,885	88,1	78,1	0,885	124	110	0,885	164	147	0,886	211	189
27	882	86,3	76,2	882	122	108	882	162	145	886	209	188
28	878	84,7	74,4	878	120	106	878	160	142	884	206	185
29	875	83,3	72,9	875	118	104	875	158	141	882	205	183
30	872	81,9	71,4	872	116	103	872	157	139	881	204	181
0.31	0,869	80,6	70,0	0,869	115	101	0,869	156	137	0,870	203	181
32	866	79,6	68,9	866	114	100	866	155	136	880	203	181
33	863	78,8	67,8	863	113	98,5	863	154	135	880	203	180
34	860	77,8	67,0	860	112	97,5	860	153	135	889	203	180
35	857	77,0	66,0	857	111	96,6	857	152	134			
0.36	0,854	76,3	65,2	0,854	111	95,8	0,854	152	134			
37	851	75,6	64,4	851	110	95,1	851	152	133			
38	849	74,9	63,7	849	110	94,5	849	152	133			
39	847	74,2	62,9	847	109	94,1				0,889	203	180
40	845	73,8	62,3	845	109	93,7						
	0,833	72,0	60,0	0,833	109	93,3	0,875	152	133			
	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

Sin considerar las tensiones en el nervio



$$e = \frac{h}{d}$$

$$m = \frac{\sigma_a}{\sigma_h}$$

$$z = i_z d$$

$$b_1 = \frac{i_1 M_f}{\sigma_a d^2} \leq b \text{ máximo admisible}$$

$$A_a = \frac{M_f}{\sigma_a z} = \frac{b d}{i_4} \quad M_f = A_a \sigma_a z = \frac{b d^2 \sigma_a}{i_1}$$

Determinación de tensiones  $\sigma_a = \frac{M_f}{i_z d A_a} \quad \sigma_h = \frac{\sigma_a}{m}$

$$M_{f0} = \frac{b_0 d^2 \sigma_a}{k_1} \quad M_{f1} = M_f - M_{f0}$$

$$b_1 = \frac{i_1 M_{f1}}{\sigma_a d^2} \leq b \text{ máximo admisible}$$

$$A_a = d \left( \frac{b_1}{i_4} + \frac{b_0}{k_4} \right) \quad M_f = d^2 \sigma_a \left( \frac{b_1}{i_1} + \frac{b_0}{k_1} \right)$$

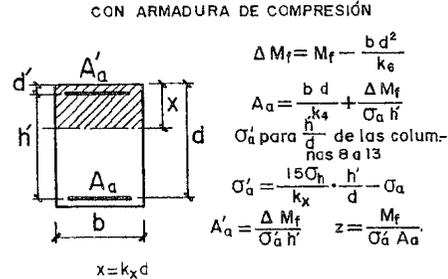
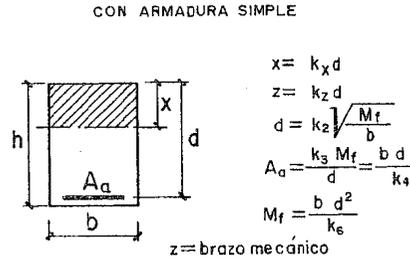
$$h = \sqrt{\frac{M_f}{\sigma_a \left( \frac{b_1}{i_1} + \frac{b_0}{k_1} \right)}} \quad z = \frac{M_f}{\sigma_a A_a}$$

UNIDADES: Momentos tcm, longitudes cm., armaduras cm<sup>2</sup>, tensiones t/cm<sup>2</sup>

φ = h/d	m = 35			m = 40			m = 45			m = 50		
	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>z</sub>	i <sub>1</sub>	i <sub>4</sub>
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0,06	0,976	782	763	0,976	902	880	0,976	1024	1000	0,977	1148	1121
6	972	667	649	972	771	749	972	877	852	972	985	957
7	968	583	564	968	676	654	968	770	745	968	869	840
8	963	524	505	963	609	586	963	695	670	963	736	706
9	958	477	458	958	552	529	958	635	610	958	669	639
10	954	441	420	954	514	490	954	589	562	954	628	598
0,11	0,950	410	390	0,950	480	455	0,951	553	524	0,951	628	597
12	945	386	365	945	452	427	945	522	493	945	594	563
13	942	365	344	942	428	404	942	497	468	942	568	535
14	938	349	326	938	410	384	938	475	446	938	546	513
15	934	333	311	934	394	368	934	457	428	934	528	494
0,16	0,930	321	298	0,931	380	354	0,933	443	414	0,934	512	478
17	927	311	287	927	368	342	927	430	401	927	500	466
18	924	301	278	924	358	332	924	421	391	924	490	455
19	920	293	270	920	350	323	920	412	382	920	482	447
20	917	287	263	917	344	316	917	407	375	917	476	441
0,21	0,914	280	256	0,918	338	310	0,921	401	369	0,925	472	437
22	911	276	251	911	334	305	911	398	365	911	470	434
23	910	271	247	910	330	301	910	394	362	910	470	433
24	907	267	243	907	326	298	907	391	359	907	468	430
25	905	266	240	905	324	295	905	389	358	905	468	429
0,26	0,903	264	238	0,910	323	294						
27	902	262	236	909	322	293						
28	901	260	234	909	322	293						
29	900	259	234									
30	900	259	233									
	0,900	259	233	0,909	322	293	0,917	393	360	0,923	469	433
	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>z</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>4</sub>

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

$\sigma_a = 2.100 \text{ kp/cm}^2$

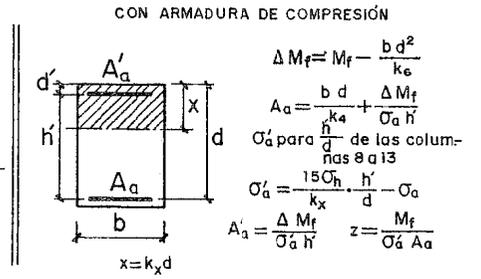
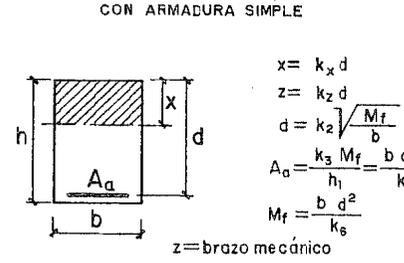


UNIDADES: Momentos tcm. longitudes cm. armaduras cm<sup>2</sup>. tensiones t/cm<sup>2</sup>

$\sigma_h$ t/cm <sup>2</sup>	$k_x$	$k_z$	$k_2 \sqrt{\frac{M_f}{b}}$	$k_3 \frac{M_f}{b d}$	$\frac{A_a}{b d}$	Tensiones de compresión del acero $\sigma_a$ en t/cm <sup>2</sup> para $\frac{h}{d} =$						
						0.87	0.89	0.91	0.93	0.95	0.97	
0.030	0.176	0.941	20.04	0.506	793.33	401.39	0.118	0.169	0.226	0.271	0.322	0.373
32	0.186	0.938	18.93	0.508	706.47	358.15	0.145	0.196	0.248	0.299	0.351	0.403
34	0.195	0.935	17.95	0.509	632.19	322.01	0.171	0.223	0.275	0.327	0.379	0.432
36	0.204	0.932	17.07	0.511	570.37	291.48	0.197	0.250	0.302	0.355	0.408	0.461
38	0.213	0.929	16.29	0.513	517.73	265.42	0.223	0.276	0.330	0.383	0.436	0.490
0.040	0.222	0.926	15.52	0.514	472.50	243.00	0.249	0.303	0.357	0.411	0.465	0.519
41	0.227	0.924	15.25	0.515	452.22	232.93	0.262	0.315	0.371	0.425	0.479	0.534
42	0.231	0.923	14.95	0.516	433.33	223.55	0.275	0.330	0.384	0.439	0.493	0.548
43	0.235	0.922	14.68	0.517	415.68	214.77	0.289	0.343	0.398	0.453	0.508	0.563
44	0.240	0.920	14.37	0.517	399.17	206.55	0.301	0.356	0.412	0.467	0.522	0.577
0.045	0.243	0.919	14.10	0.518	383.67	198.84	0.314	0.370	0.425	0.481	0.536	0.592
46	0.247	0.918	13.84	0.519	369.19	191.60	0.327	0.383	0.439	0.495	0.550	0.606
47	0.251	0.916	13.59	0.520	355.55	184.79	0.340	0.396	0.453	0.509	0.565	0.621
48	0.255	0.915	13.36	0.520	342.67	178.38	0.353	0.410	0.466	0.523	0.579	0.635
49	0.259	0.914	13.13	0.521	330.61	172.33	0.366	0.423	0.480	0.537	0.593	0.650
0.050	0.263	0.912	12.91	0.522	319.20	166.62	0.379	0.436	0.493	0.550	0.607	0.664
51	0.267	0.911	12.70	0.523	308.41	161.21	0.392	0.450	0.507	0.564	0.623	0.679
52	0.271	0.910	12.49	0.523	298.23	156.11	0.406	0.463	0.521	0.578	0.636	0.694
53	0.275	0.908	12.30	0.524	288.58	151.24	0.419	0.477	0.534	0.592	0.650	0.708
54	0.278	0.907	12.11	0.525	279.43	146.67	0.432	0.490	0.543	0.606	0.664	0.723
0.055	0.282	0.906	11.93	0.526	270.75	142.31	0.445	0.503	0.562	0.620	0.679	0.737
56	0.286	0.905	11.75	0.526	262.50	138.16	0.458	0.517	0.575	0.634	0.693	0.752
57	0.289	0.903	11.58	0.527	254.66	134.21	0.471	0.530	0.589	0.648	0.707	0.766
58	0.293	0.902	11.42	0.528	247.21	130.46	0.484	0.543	0.603	0.662	0.721	0.781
59	0.296	0.901	11.26	0.528	240.10	126.87	0.497	0.557	0.616	0.676	0.736	0.795

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

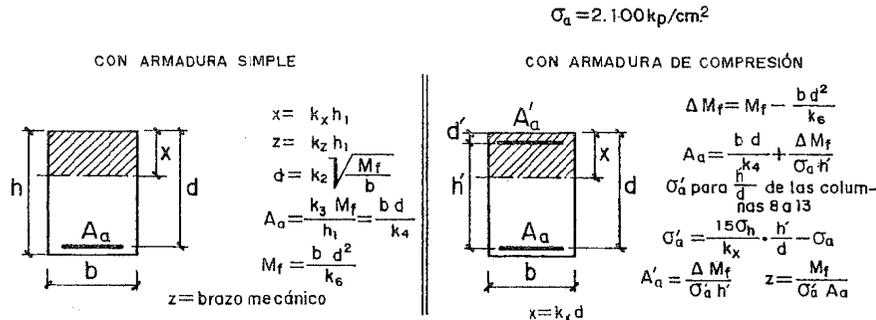
$\sigma_a = 2.100 \text{ kp/cm}^2$



UNIDADES: Momentos tcm. longitudes cm. armaduras cm<sup>2</sup>. tensiones t/cm<sup>2</sup>

$\sigma_h$ t/cm <sup>2</sup>	$k_x$	$k_z$	$k_2 \sqrt{\frac{M_f}{b}}$	$k_3 \frac{M_f}{b d}$	$\frac{A_a}{b d}$	Tensiones de compresión del acero $\sigma_a$ en t/cm <sup>2</sup> para $\frac{h}{d} =$						
						0.87	0.89	0.91	0.93	0.95	0.97	
0.060	0.300	0.900	11.11	0.529	233.33	123.46	0.510	0.570	0.630	0.690	0.750	0.810
61	0.303	0.899	10.96	0.530	228.37	120.19	0.523	0.583	0.644	0.704	0.764	0.825
62	0.307	0.898	10.82	0.530	223.71	117.08	0.536	0.597	0.657	0.718	0.778	0.839
63	0.310	0.897	10.68	0.531	214.81	114.09	0.549	0.610	0.671	0.732	0.793	0.854
64	0.314	0.895	10.55	0.532	211.16	111.24	0.562	0.623	0.685	0.746	0.807	0.868
0.065	0.317	0.894	10.42	0.532	208.79	108.51	0.575	0.637	0.698	0.760	0.821	0.883
66	0.320	0.893	10.29	0.533	198.62	105.89	0.588	0.650	0.712	0.774	0.835	0.897
67	0.324	0.892	10.19	0.534	193.67	103.88	0.601	0.663	0.726	0.788	0.850	0.912
68	0.327	0.891	10.05	0.534	188.92	100.97	0.614	0.677	0.739	0.802	0.864	0.926
69	0.330	0.890	9.93	0.535	183.77	98.65	0.627	0.690	0.753	0.816	0.878	0.941
0.070	0.333	0.889	9.82	0.536	180.00	96.43	0.640	0.703	0.766	0.829	0.892	0.955
71	0.336	0.888	9.71	0.536	175.79	94.29	0.654	0.717	0.780	0.843	0.907	0.970
72	0.340	0.887	9.60	0.537	171.76	92.23	0.667	0.730	0.794	0.857	0.921	0.985
73	0.343	0.886	9.50	0.538	167.87	90.25	0.680	0.743	0.807	0.871	0.935	0.999
74	0.346	0.885	9.40	0.538	164.13	88.34	0.693	0.757	0.821	0.885	0.949	1.014
0.075	0.349	0.884	9.30	0.539	160.53	86.50	0.706	0.770	0.835	0.899	0.964	1.028
76	0.352	0.883	9.21	0.539	157.06	84.73	0.719	0.784	0.848	0.913	0.978	1.043
77	0.355	0.882	9.11	0.540	153.92	83.02	0.732	0.797	0.862	0.927	0.992	1.057
78	0.358	0.881	9.02	0.541	150.49	81.37	0.743	0.810	0.876	0.941	1.006	1.072
79	0.361	0.880	8.93	0.541	147.38	79.77	0.756	0.824	0.889	0.955	1.021	1.086
0.080	0.364	0.879	8.84	0.542	144.38	78.21	0.771	0.837	0.903	0.969	1.035	1.101
81	0.367	0.878	8.76	0.542	141.47	76.74	0.784	0.850	0.917	0.983	1.049	1.116
82	0.369	0.877	8.68	0.543	138.67	75.31	0.797	0.864	0.930	0.997	1.063	1.130
83	0.372	0.876	8.60	0.544	135.95	73.91	0.810	0.877	0.944	1.011	1.078	1.145
84	0.375	0.875	8.52	0.544	133.33	72.56	0.823	0.890	0.958	1.025	1.092	1.159

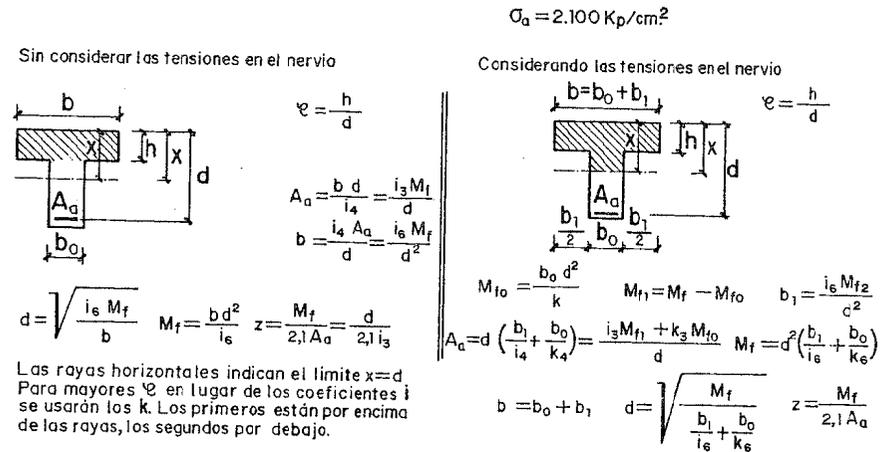
TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE



UNIDADES: Momentos tcm. longitudes cm. armaduras cm<sup>2</sup> tensiones t/cm<sup>2</sup>

$\sigma_h$ t/cm <sup>2</sup>	$k_x$	$k_z$	$k_2 \sqrt{\frac{M_f}{b}}$	$k_3 \frac{M_f}{d}$	$\frac{b d}{k_4}$	$\frac{M_f}{b d^2}$	Tensiones de compresión del acero $\sigma_a$ en t/cm <sup>2</sup> para $\frac{h}{d} =$					
							0,87	0,89	0,91	0,93	0,95	0,97
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,085	0,378	0,874	8,44	0,545	130,80	71,26	0,836	0,904	0,971	1,039	1,105	1,174
86	0,380	0,873	8,37	0,545	128,33	69,99	0,849	0,917	0,985	1,053	1,120	1,188
87	0,383	0,872	8,29	0,546	125,96	68,77	0,862	0,930	0,999	1,067	1,135	1,203
88	0,386	0,871	8,22	0,547	123,66	67,58	0,875	0,944	1,012	1,081	1,149	1,217
89	0,389	0,870	8,15	0,547	121,43	66,43	0,888	0,957	1,026	1,095	1,163	1,232
0,090	0,391	0,870	8,08	0,548	119,26	65,31	0,901	0,970	1,039	1,108	1,177	1,246
91	0,394	0,869	8,01	0,548	117,16	64,22	0,915	0,984	1,053	1,122	1,192	1,261
92	0,397	0,868	7,95	0,549	115,12	63,17	0,928	0,997	1,067	1,136	1,206	1,276
93	0,399	0,867	7,88	0,549	113,15	62,15	0,941	1,010	1,080	1,150	1,220	1,290
94	0,402	0,866	7,82	0,550	111,22	61,15	0,954	1,024	1,094	1,164	1,234	1,305
0,095	0,404	0,865	7,76	0,550	109,36	60,19	0,967	1,037	1,108	1,178	1,249	1,319
95	0,407	0,864	7,70	0,551	107,55	59,25	0,980	1,051	1,121	1,192	1,263	1,334
96	0,409	0,864	7,64	0,551	105,79	58,33	0,993	1,064	1,135	1,206	1,277	1,348
97	0,412	0,863	7,58	0,552	104,09	57,45	1,006	1,077	1,149	1,220	1,291	1,363
98	0,414	0,862	7,52	0,552	102,42	56,58	1,019	1,091	1,162	1,234	1,306	1,377
0,100	0,417	0,861	7,47	0,553	100,80	55,74	1,032	1,104	1,176	1,248	1,320	1,392
102	0,421	0,860	7,36	0,554	97,69	54,13	1,058	1,131	1,203	1,276	1,348	1,421
104	0,426	0,858	7,25	0,555	94,75	52,59	1,084	1,157	1,231	1,304	1,377	1,450
106	0,431	0,856	7,15	0,556	91,95	51,13	1,110	1,184	1,258	1,332	1,406	1,479
108	0,435	0,855	7,05	0,557	89,30	49,74	1,136	1,211	1,285	1,360	1,434	1,508
0,110	0,440	0,853	6,96	0,558	86,78	48,43	1,162	1,237	1,312	1,387	1,462	1,537
115	0,451	0,850	6,74	0,560	80,98	45,39	1,228	1,304	1,381	1,457	1,534	1,610
120	0,462	0,846	6,53	0,563	75,33	42,58	1,293	1,371	1,449	1,527	1,605	1,683
125	0,472	0,843	6,34	0,565	71,23	40,25	1,358	1,438	1,517	1,597	1,676	1,756
130	0,481	0,840	6,17	0,567	67,10	38,08	1,423	1,504	1,585	1,666	1,747	1,828
0,155	0,491	0,836	6,01	0,569	63,38	36,08	1,489	1,571	1,654	1,736	1,819	1,901
140	0,500	0,833	5,86	0,571	60,--	34,29	1,554	1,638	1,722	1,806	1,890	1,974
145	0,509	0,830	5,71	0,573	56,93	32,65	1,619	1,705	1,790	1,876	1,961	2,047
150	0,517	0,828	5,58	0,575	54,13	31,15	1,684	1,771	1,858	1,945	2,032	2,119
155	0,525	0,825	5,46	0,577	51,57	29,77	1,750	1,838	1,927	2,015	2,104	2,192
160	0,533	0,822	5,34	0,579	49,22	28,51	1,815	1,900	1,995	2,085	2,175	2,265

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES DE VIGUETAS T SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE



UNIDADES: Momentos tcm longitudes cm armaduras cm<sup>2</sup> tensiones t/cm<sup>2</sup>

$e = \frac{h}{d}$	$\sigma_h = 0.030 \text{ t/cm}^2$			$\sigma_h = 0.040 \text{ t/cm}^2$			$\sigma_h = 0.050 \text{ t/cm}^2$			$\sigma_h = 0.060 \text{ t/cm}^2$		
	$i_3$	$i_4$	$i_6$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,08	0,494	1,134	560	0,495	802	397	0,495	621	307	0,495	505	260
0,09	0,596	1,047	519	0,497	732	364	0,497	564	280	0,497	458	228
0,10	0,498	981	489	0,499	678	338	0,499	519	259	0,499	420	210
0,11	0,499	929	464	0,501	636	319	0,501	485	243	0,502	390	199
0,12	0,501	889	445	0,503	600	302	0,503	454	228	0,504	365	184
0,13	0,502	855	429	0,504	572	288	0,505	429	217	0,506	344	174
0,14	0,504	832	419	0,506	548	277	0,507	409	207	0,508	326	166
0,15	0,505	816	412	0,508	529	269	0,509	392	200	0,510	311	159
0,16	0,506	805	406	0,509	514	262	0,511	377	193	0,512	298	153
0,17	0,506	800	406	0,511	501	256	0,513	365	187	0,514	287	147
0,18	0,506	797	403	0,512	491	251	0,514	355	182	0,516	278	143
0,19				0,513	483	248	0,515	347	179	0,518	269	139
0,20				0,514	478	246	0,517	339	175	0,519	262	136
0,21				0,514	475	244	0,518	333	172	0,521	256	133
0,22				0,514	473	243	0,520	329	171	0,523	251	131
0,23							0,521	325	169	0,525	247	129
0,24							0,521	322	168	0,525	243	128
0,25	0,506	797	403				0,522	320	167	0,526	240	126
0,26							0,522	320	167	0,527	238	125
0,27							0,522	320	167	0,528	236	125
0,28										0,529	234	124
0,29				0,514	473	243				0,529	234	124
0,30							0,522	320	167	0,529	233	123
0,31												
0,32										0,529	233	123
	$k_3$	$k_4$	$k_6$									

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES DE VIGUETAS T SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

Sin considerar las tensiones en el nervio

$$e = \frac{h}{d}$$

$$A_a = \frac{b d}{i_4} = \frac{i_3 M_f}{d}$$

$$b = \frac{i_4 A_a}{d} = \frac{i_6 M_f}{d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{i_6 M_f}{b}} \quad M_f = \frac{b d^2}{i_6} \quad z = \frac{M_f}{2,1 A_a} = \frac{d}{2,1 i_3}$$

Las rayas horizontales indican el límite x=d. Para mayores e en lugar de los coeficientes i se usarán los k. Los primeros están por encima de las rayas, los segundos por debajo.

Considerando las tensiones en el nervio

$$M_{f0} = \frac{b_0 d^2}{k} \quad M_{f1} = M_f - M_{f0} \quad b_1 = \frac{i_6 M_{f1}}{d^2}$$

$$A_a = d \left( \frac{b_1}{i_4} + \frac{b_0}{k_4} \right) = \frac{i_3 M_{f1}}{d} + k_3 \frac{M_{f0}}{d} \quad M_f = d^2 \left( \frac{b_1}{i_6} + \frac{b_0}{k_6} \right)$$

$$b = b_0 + b_1 \quad d = \sqrt{\frac{M_f}{\frac{b_1}{i_6} + \frac{b_0}{k_6}}} \quad z = \frac{M_f}{2,1 A_a}$$

UNIDADES: Momentos tcm. longitudes cm. armaduras cm<sup>2</sup> tensiones t/cm<sup>2</sup>

h/d	σ <sub>h</sub> = 0,070 t/cm <sup>2</sup>			σ <sub>h</sub> = 0,080 t/cm <sup>2</sup>			σ <sub>h</sub> = 0,090 t/cm <sup>2</sup>			σ <sub>h</sub> = 0,100 t/cm <sup>2</sup>		
	i <sub>3</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>6</sub>	i <sub>3</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>6</sub>	i <sub>3</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>6</sub>	i <sub>3</sub>	i <sub>4</sub>	i <sub>6</sub>
0,08	0,495	426	211	0,495	368	182	0,495	325	160	0,495	290	144
0,09	0,497	385	191	0,498	332	165	0,498	293	146	0,498	261	130
0,10	0,500	352	177	0,500	304	152	0,500	268	134	0,500	229	119
0,11	0,502	326	164	0,502	281	141	0,502	247	124	0,502	220	110
0,12	0,504	306	154	0,504	261	132	0,505	230	116	0,505	204	103
0,13	0,506	287	145	0,507	242	125	0,507	215	109	0,507	191	96,8
0,14	0,509	271	138	0,509	222	118	0,509	203	103	0,509	180	91,5
0,15	0,511	258	132	0,511	205	112	0,512	185	98,8	0,512	170	87,1
0,16	0,513	247	127	0,513	191	106	0,514	184	94,6	0,514	162	83,3
0,17	0,515	237	123	0,516	181	104	0,516	176	90,8	0,516	155	80,1
0,18	0,517	228	118	0,518	169	100	0,518	169	87,5	0,518	149	77,3
0,19	0,519	221	115	0,520	167	97,2	0,520	162	84,3	0,521	143	74,5
0,20	0,521	214	111	0,522	161	94,5	0,522	157	81,9	0,522	138	72,2
0,21	0,523	208	108	0,524	155	91,7	0,524	152	79,6	0,525	133	69,8
0,22	0,524	203	106	0,526	151	89,0	0,526	148	77,8	0,527	129	68,1
0,23	0,526	199	105	0,528	147	86,2	0,528	144	76,1	0,529	126	66,6
0,24	0,528	195	103	0,529	143	83,7	0,530	140	74,2	0,531	123	65,3
0,25	0,529	192	102	0,531	140	81,1	0,532	137	72,9	0,533	120	64,1
0,26	0,530	189	100	0,533	137	78,7	0,534	135	71,1	0,535	117	62,8
0,27	0,532	187	99,5	0,534	134	76,2	0,536	132	70,8	0,537	115	61,8
0,28	0,533	184	98,1	0,537	130	73,8	0,537	130	69,8	0,539	113	60,9
0,29	0,534	183	97,7	0,537	128	71,8	0,539	128	68,1	0,541	111	60,1
0,30	0,534	182	97,2	0,538	126	70,1	0,540	126	66,7	0,542	109	59,1
0,31	0,535	181	96,8	0,539	124	68,7	0,542	125	65,7	0,544	108	58,7
0,32	0,535	180	96,4	0,540	122	67,8	0,543	124	64,3	0,545	106	57,8
0,33	0,536	180	96,4	0,541	120	66,9	0,544	123	63,9	0,547	105	57,1
0,34	0,536	180	96,4	0,541	119	66,5	0,545	122	63,5	0,548	104	56,7
0,35	0,536	180	96,4	0,542	118	66,1	0,546	121	63,1	0,549	103	56,3
0,36	0,536	180	96,4	0,542	117	65,8	0,547	120	62,8	0,550	103	56,0
0,37	0,536	180	96,4	0,542	116	65,5	0,547	120	62,5	0,551	102	55,7
0,38	0,536	180	96,4	0,542	115	65,2	0,548	120	62,2	0,552	101	55,4
0,39	0,536	180	96,4	0,542	114	65,0	0,548	119	61,9	0,552	101	55,2
0,40	0,536	180	96,4	0,542	114	64,8	0,548	119	61,7	0,552	101	55,0
0,41	0,536	180	96,4	0,542	114	64,6	0,548	119	61,5	0,552	101	54,8
0,42	0,536	180	96,4	0,542	114	64,4	0,548	119	61,3	0,552	101	54,6
0,43	0,536	180	96,4	0,542	114	64,2	0,548	119	61,1	0,552	101	54,4
0,44	0,536	180	96,4	0,542	114	64,0	0,548	119	60,9	0,552	101	54,2
0,45	0,536	180	96,4	0,542	114	63,8	0,548	119	60,7	0,552	101	54,0
	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>6</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>6</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>6</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>6</sub>

TABLA PARA EL CÁLCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

σ<sub>a</sub> = 2.400 kp/cm<sup>2</sup>

CON ARMADURA SIMPLE

CON ARMADURA DE COMPRESIÓN

$$x = k_x d$$

$$z = k_z d$$

$$d = k_2 \sqrt{\frac{M_f}{b}}$$

$$A_a = \frac{k_3 M_f}{d} = \frac{b d}{k_4}$$

$$M_f = \frac{b d^2}{k_6}$$

$$\Delta M_f = M_f - \frac{b d^2}{k_6}$$

$$A_a = \frac{b d}{k_4} + \frac{\Delta M_f}{\sigma_a h'}$$

$$\sigma'_a \text{ para } \frac{h'}{d} \text{ de las columnas a 13}$$

$$\sigma'_a = \frac{15 \sigma_h}{k_x} \cdot \frac{h'}{d} - \sigma_a$$

$$A'_a = \frac{\Delta M_f}{\sigma'_a h'}$$

$$z = \frac{M_f}{\sigma_a A_a}$$

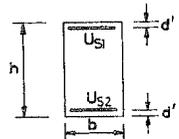
UNIDADES: Momentos tcm. longitudes cm. armaduras cm<sup>2</sup> tensiones t/cm<sup>2</sup>

σ <sub>h</sub> t/cm <sup>2</sup>	k <sub>x</sub>	k <sub>z</sub>	d =		A <sub>a</sub> =		M <sub>f</sub> =	Tensiones de compresión del acero σ <sub>a</sub>					
			k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>6</sub>		0,87	0,89	0,91	0,93	0,95	0,97
0,030	0,158	0,947	21,11	0,440	1,013,0	445,7	0,079	0,136	0,193	0,250	0,307	0,364	
34	175	942	18,87	443	805,5	356,5	132	190	248	306	364	423	
38	192	936	17,12	445	658,2	293,0	184	243	303	362	421	481	
42	208	931	15,68	448	549,6	246,0	236	297	357	418	478	539	
46	223	925	14,50	450	467,3	210,3	288	350	412	474	535	597	
50	238	921	13,51	453	409,2	182,5	340	403	466	530	592	655	
0,052	0,245	0,918	13,07	0,454	375,3	170,7	0,367	0,430	0,494	0,557	0,621	0,685	
54	262	916	12,66	455	352,2	160,2	393	457	521	585	649	714	
56	268	913	12,28	456	330,6	150,7	419	484	548	613	678	743	
58	266	911	11,93	457	311,1	142,2	445	510	576	641	706	772	
60	273	909	11,59	458	293,3	134,4	471	537	603	669	735	801	
0,062	0,279	0,907	11,28	0,459	277,2	127,3	0,497	0,564	0,630	0,697	0,763	0,830	
64	296	905	11,00	461	262,5	120,9	523	590	658	725	792	859	
66	292	903	10,72	462	249,0	114,9	549	617	685	753	820	888	
68	298	901	10,46	463	236,6	109,4	575	644	712	781	849	917	
70	304	899	10,22	464	225,3	104,5	601	670	739	809	877	946	
0,072	0,310	0,897	9,991	0,465	214,8	99,82	0,628	0,697	0,767	0,836	0,906	0,976	
74	316	895	9,773	466	205,1	95,52	654	724	794	864	934	1,005	
76	322	893	9,575	467	196,1	91,52	680	751	821	892	963	1,034	
78	328	891	9,389	468	187,7	87,73	706	777	849	920	991	1,063	
80	333	889	9,185	469	180,0	84,37	732	804	878	948	1,020	1,092	
0,082	0,339	0,887	9,008	0,470	172,7	81,14	0,758	0,831	0,903	0,976	1,048	1,121	
84	344	885	8,828	471	166,0	78,11	784	857	931	1,004	0,77	1,150	
86	349	883	8,577	472	159,6	75,29	810	884	958	1,032	1,05	1,179	
88	355	882	8,522	472	153,7	72,83	836	911	985	1,060	1,134	1,208	
90	360	880	8,374	473	148,1	70,13	862	937	1,012	1,087	1,162	1,237	
0,092	0,365	0,878	8,233	0,474	142,9	67,78	0,889	0,964	1,040	1,115	1,191	1,267	
94	370	877	8,097	475	138,0	65,57	915	991	1,067	1,143	1,219	1,296	
96	375	875	7,977	476	133,3	63,48	941	1,018	1,094	1,171	1,248	1,325	
98	380	873	7,843	477	128,9	61,50	967	1,044	1,122	1,199	1,276	1,354	
100	385	872	7,723	478	124,8	59,64	993	1,071	1,149	1,227	1,305	1,383	
0,102	0,389	0,870	7,668	0,479	129,9	57,88	1,020	1,096	1,176	1,254	1,333	1,412	
104	394	869	7,496	480	117,1	56,19	1,046	1,124	1,204	1,282	1,362	1,441	
106	398	867	7,329	480	113,6	54,6	1,072	1,152	1,230	1,310	1,390	1,470	
108	403	866	7,256	481	110,3	53,08	1,098	1,178	1,258	1,338	1,419	1,499	
110	407	864	7,186	481	107,1	51,64	1,124	1,204	1,286	1,366	1,447	1,528	
0,115	0,418	0,861	6,952	0,484	99,31	48,32	1,189	1,271	1,354	1,436	1,519	1,601	
120	429	857	6,736	486	93,33	45,37	1,254	1,338	1,422	1,506	1,590	1,674	
125	439	854	6,537	488	87,55	42,73	1,319	1,405	1,490	1,576	1,661	1,747	
130	448	851	6,349	489	82,37	40,31	1,384	1,471	1,558	1,645	1,732	1,819	
135	458	847	6,181	491	77,70	38,20	1,450	1,538	1,627	1,715	1,804	1,892	
0,140	0,467	0,844	6,021	0,493	73,47	36,25	1,515	1,605	1,695	1,785	1,875	1,965	
145	475	842	5,872	495	69,63	34,48	1,580	1,672	1,763	1,855	1,945	2,038	
150	484	839	5,732	497	66,13	32,85	1,645	1,738	1,829	1,924	2,017	2,1	

SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN COMPUESTA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$d' = 0,10 h$

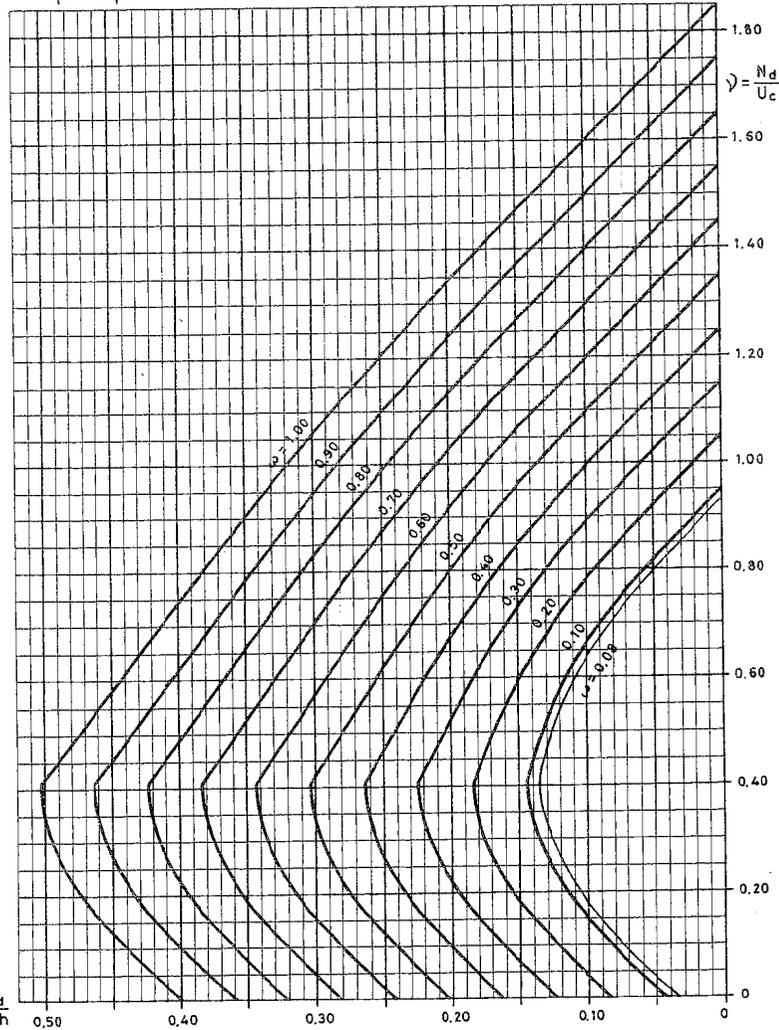
$\gamma_c = 1,50$

$\gamma_s = 1,15$

$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$

$U_{S1} = U_{S2}$

$\omega = \frac{U_{S1} + U_{S2}}{U_c}$

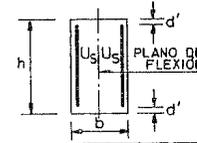


$\mu = \frac{M_d}{U_c h}$

SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN COMPUESTA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

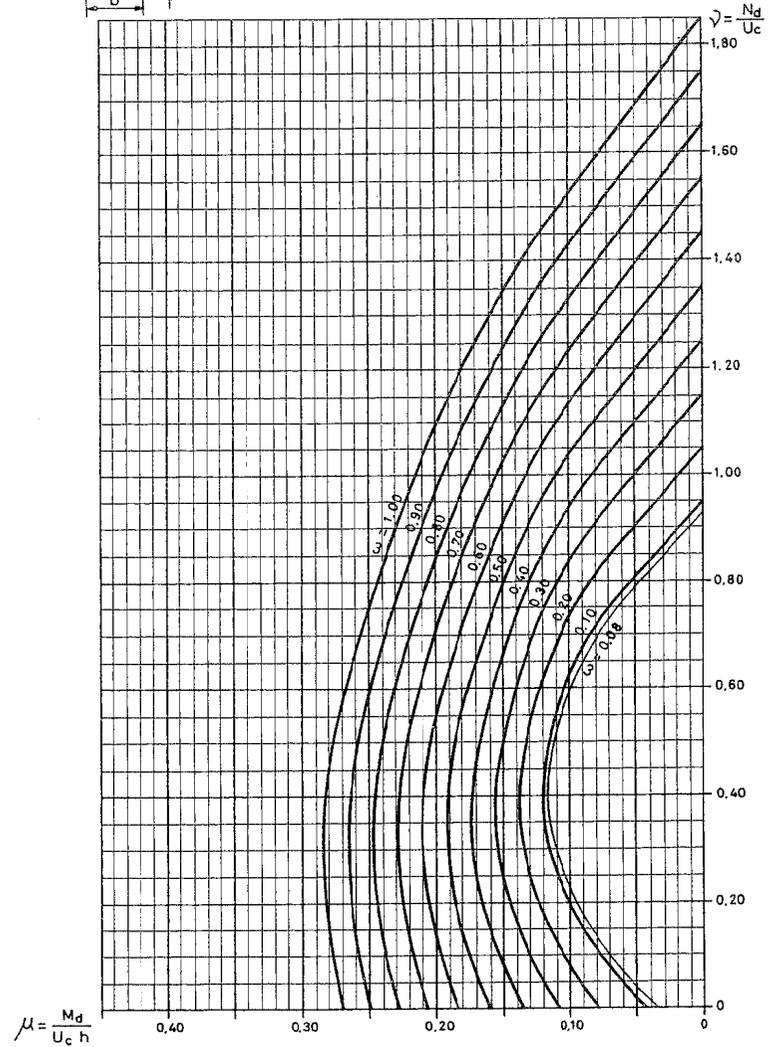
$d' = 0,10 h$

$\gamma_c = 1,50$

$\gamma_s = 1,15$

$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$

$\omega = \frac{2U_S}{U_c}$

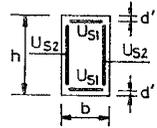


$\mu = \frac{M_d}{U_c h}$

SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN  
COMPUESTA CON ARMADURA EN LAS CUATRO CARAS

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

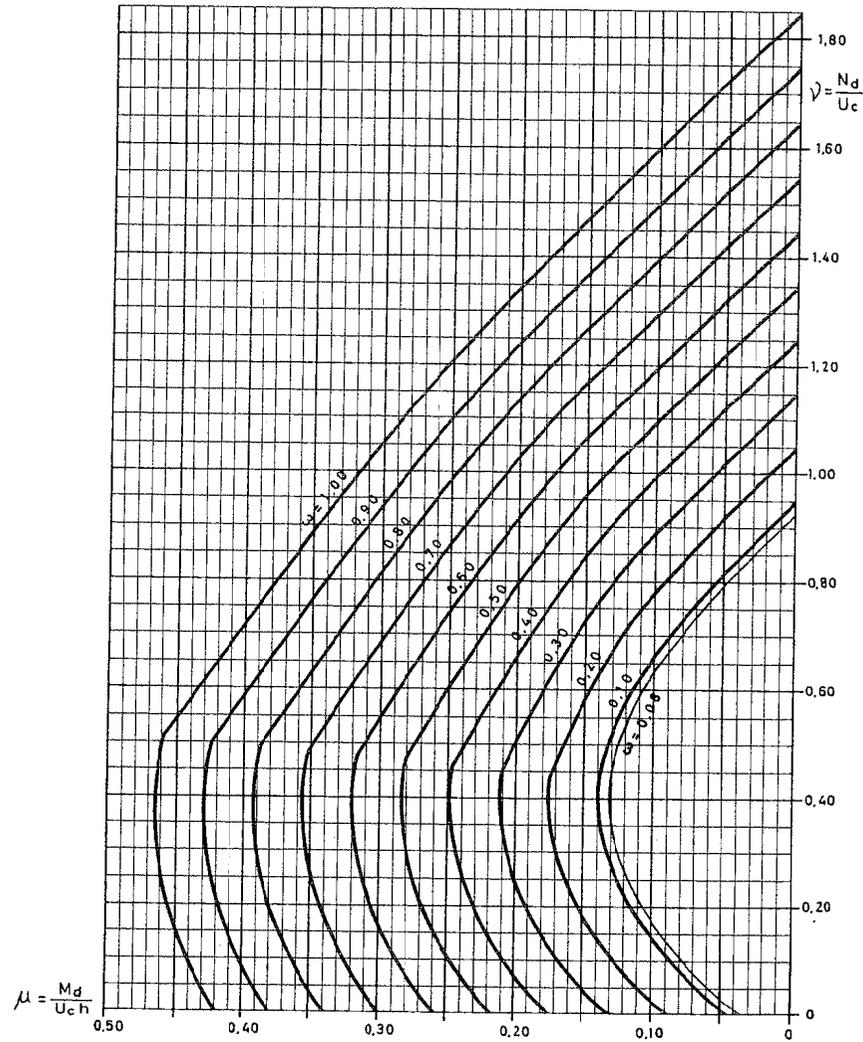
ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$   
 $\gamma_c = 1.50$     $\gamma_s = 1.15$   
 $U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$

$\omega = \frac{2(U_{S1} + U_{S2})}{U_c}$   
 $U_1 = \frac{1}{3} \omega U_c$   
 $U_2 = \frac{1}{6} \omega U_c$

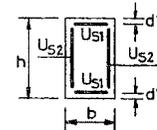
$\frac{U_{S2}}{U_{S1}} = \frac{1}{2}$   
 $d' = 0,05h$



SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN  
COMPUESTA CON ARMADURA EN LAS CUATRO CARAS

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

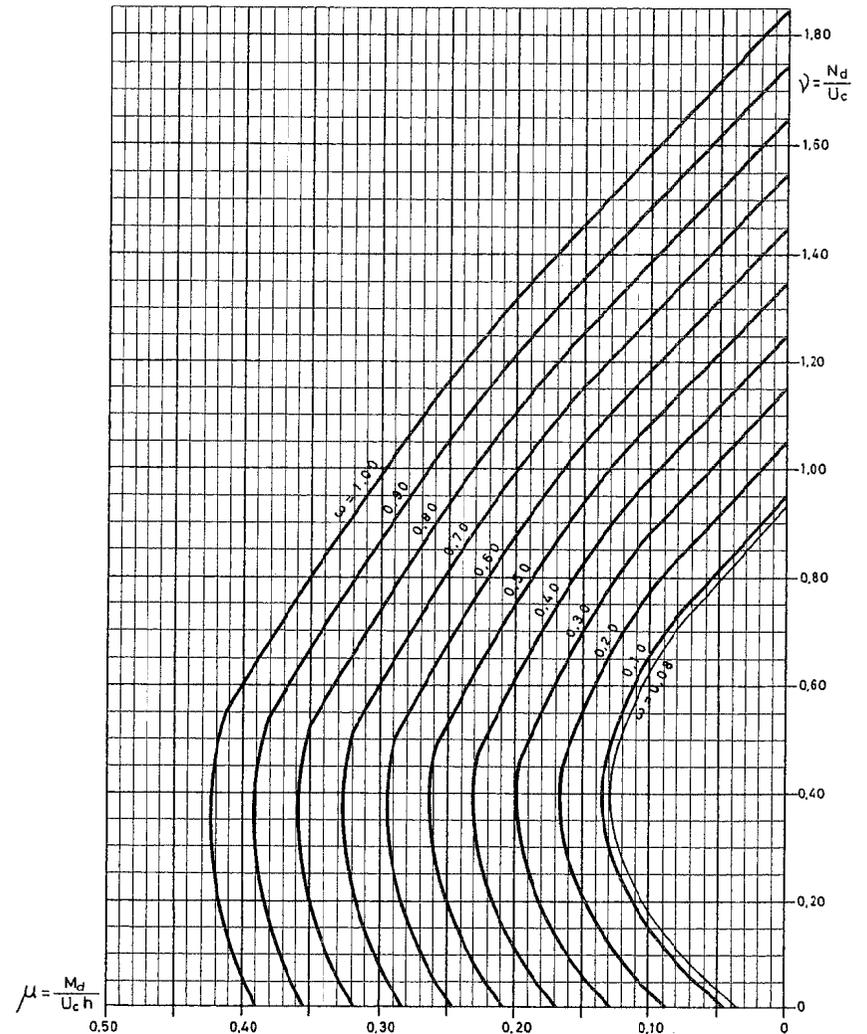
ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$   
 $\gamma_c = 1.50$     $\gamma_s = 1.15$   
 $U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$

$\omega = \frac{2(U_{S1} + U_{S2})}{U_c}$   
 $U_{S1} = U_{S2} = \frac{1}{4} \omega U_c$

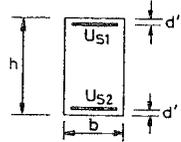
$\frac{U_{S2}}{U_{S1}} = 1$   
 $d' = 0,05 h$



SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$d' = 0,10 h$

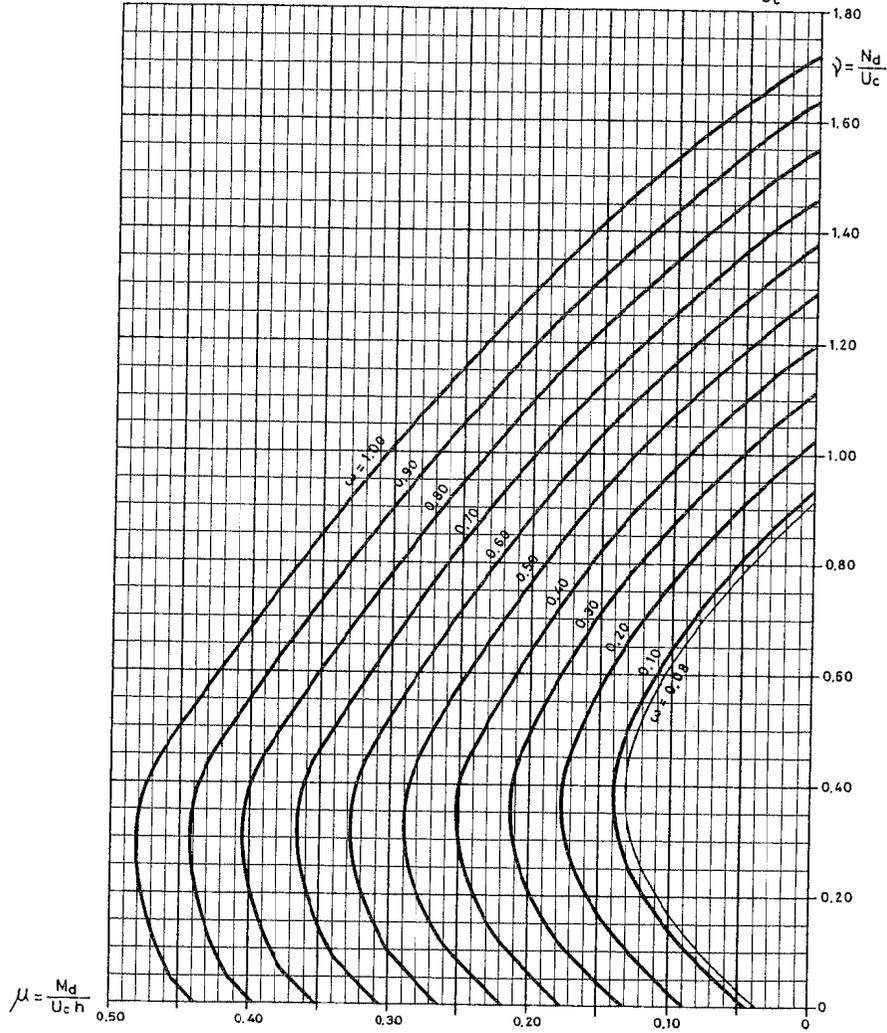
$\gamma_c = 1.50$

$\gamma_s = 1.15$

$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$

$U_{s1} = U_{s2}$

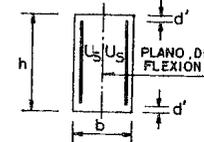
$\omega = \frac{U_{s1} \cdot U_{s2}}{U_c}$



SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

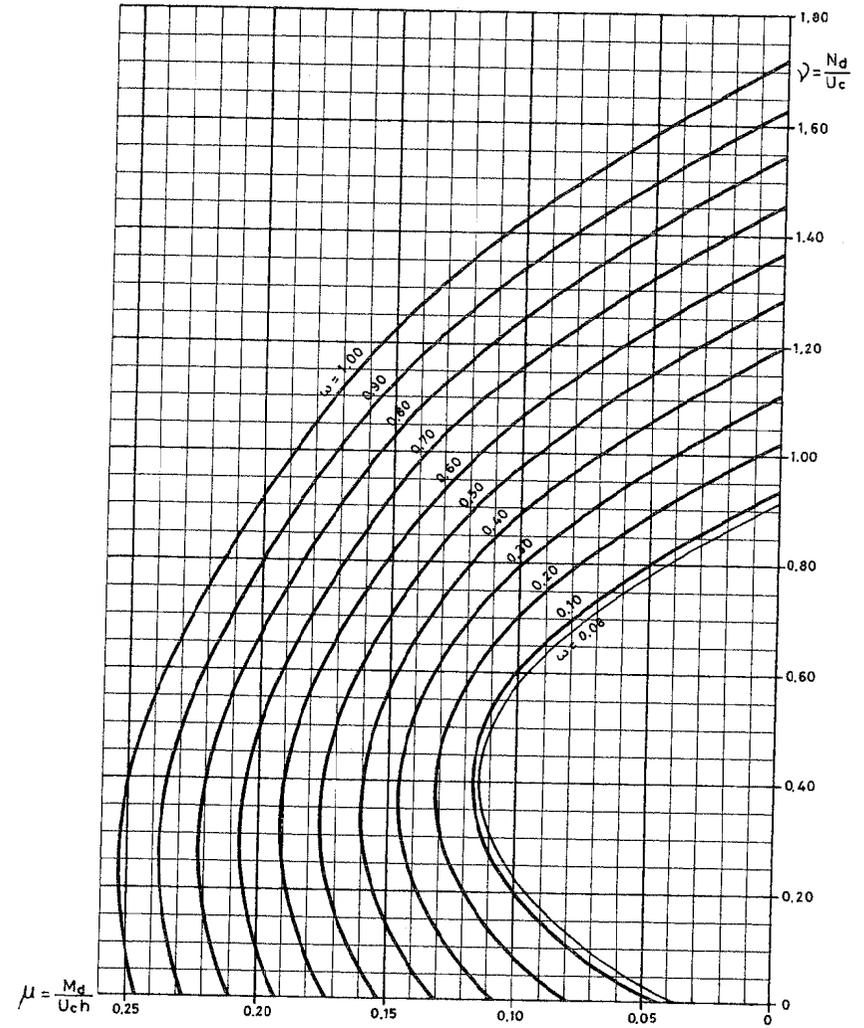
$d' = 0,10 h$

$\gamma_c = 1.50$

$\gamma_s = 1.15$

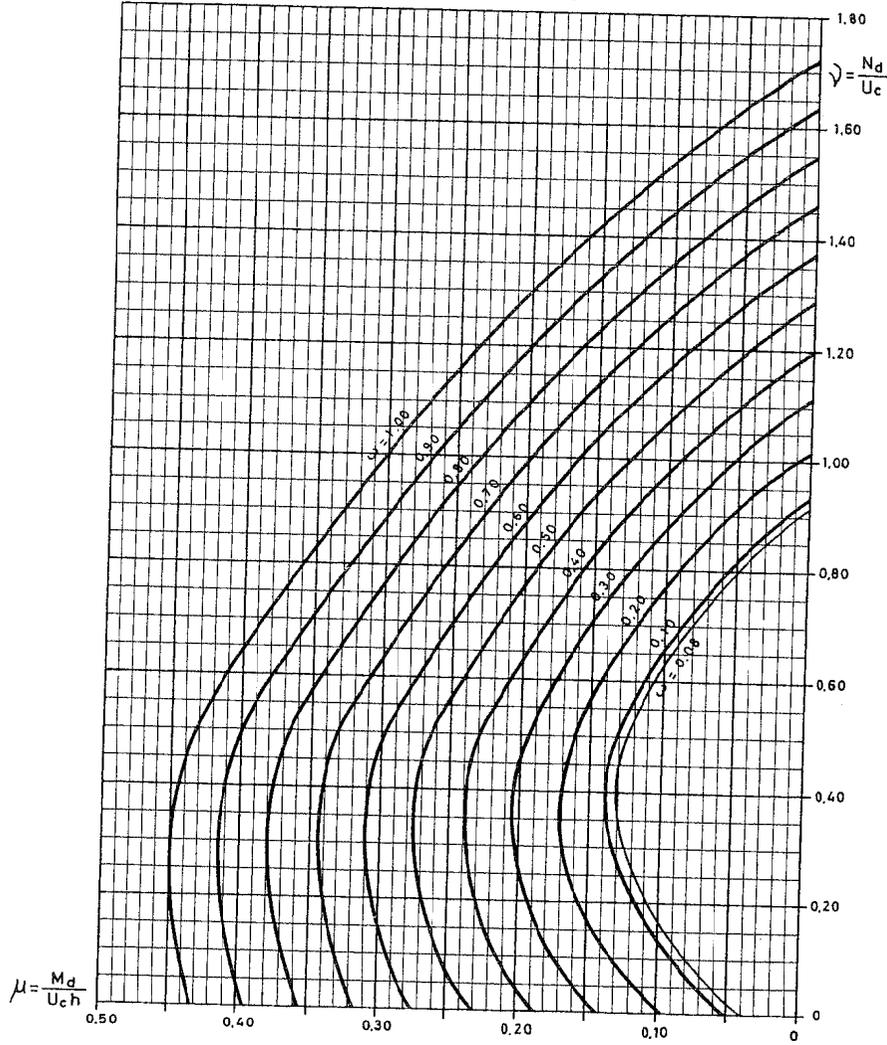
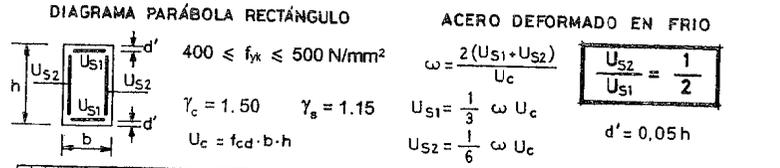
$U_c = f_{cd} \cdot b \cdot h$

$\omega = \frac{2 U_s}{U_c}$



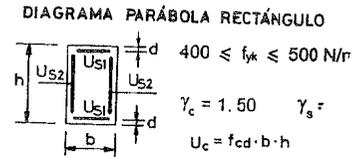
GT-105

SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA EN LAS CUATRO CARAS



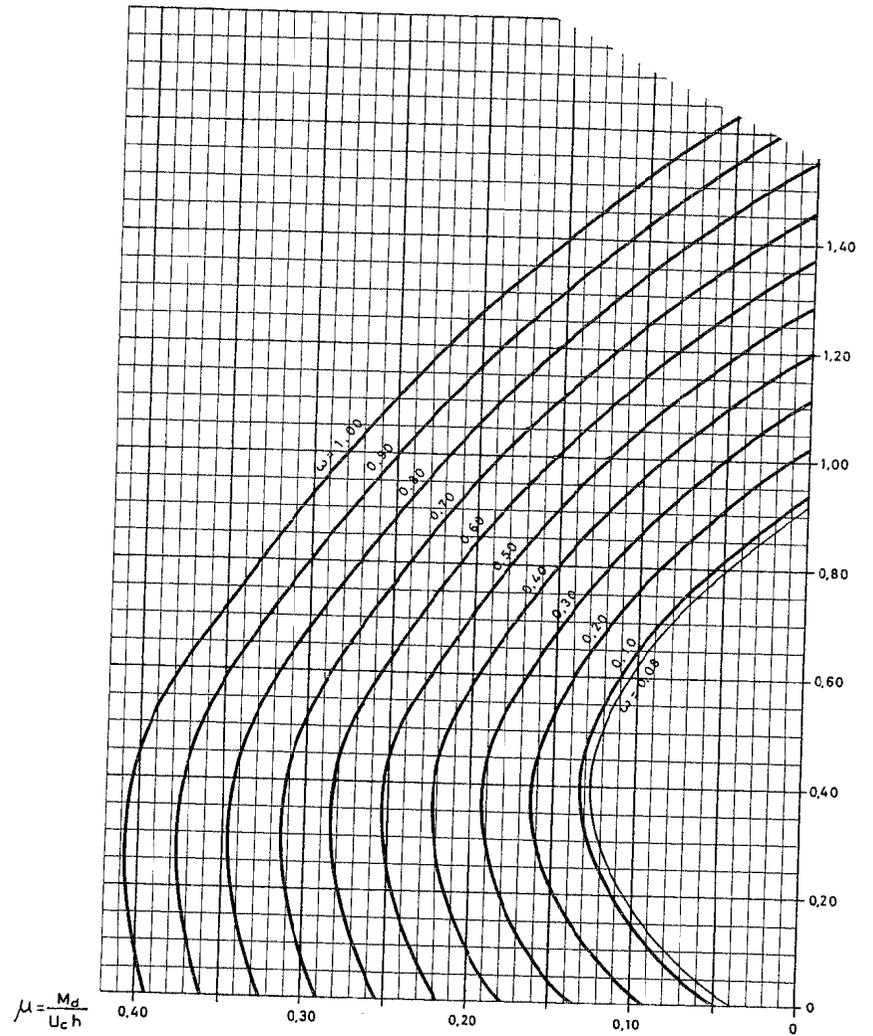
GT-106

SECCIONES RECTANGULARES A FLEXIÓN COMPUESTA EN J



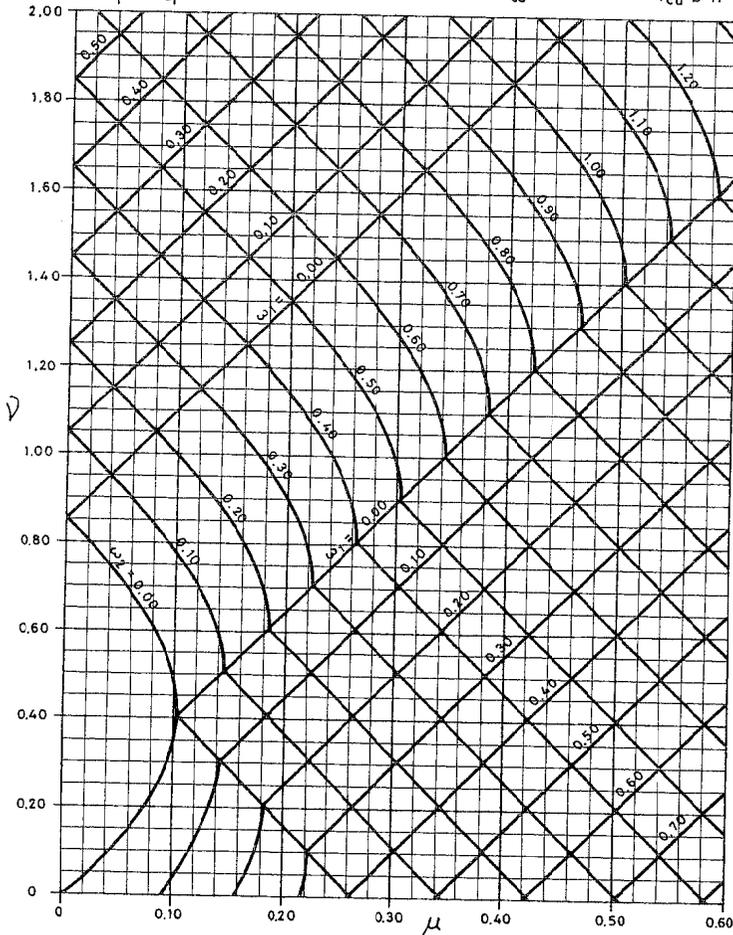
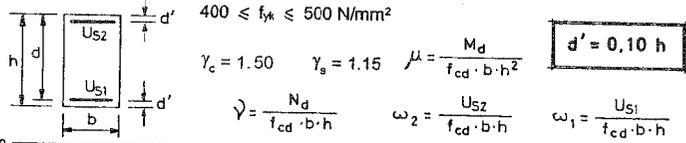
DIMENSIONES RECTANGULARES EN COMPRESIÓN

DIAGRAMA EN FRÍO



DIMENSIONAMIENTO ÓPTIMO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXOCOMPRESIÓN

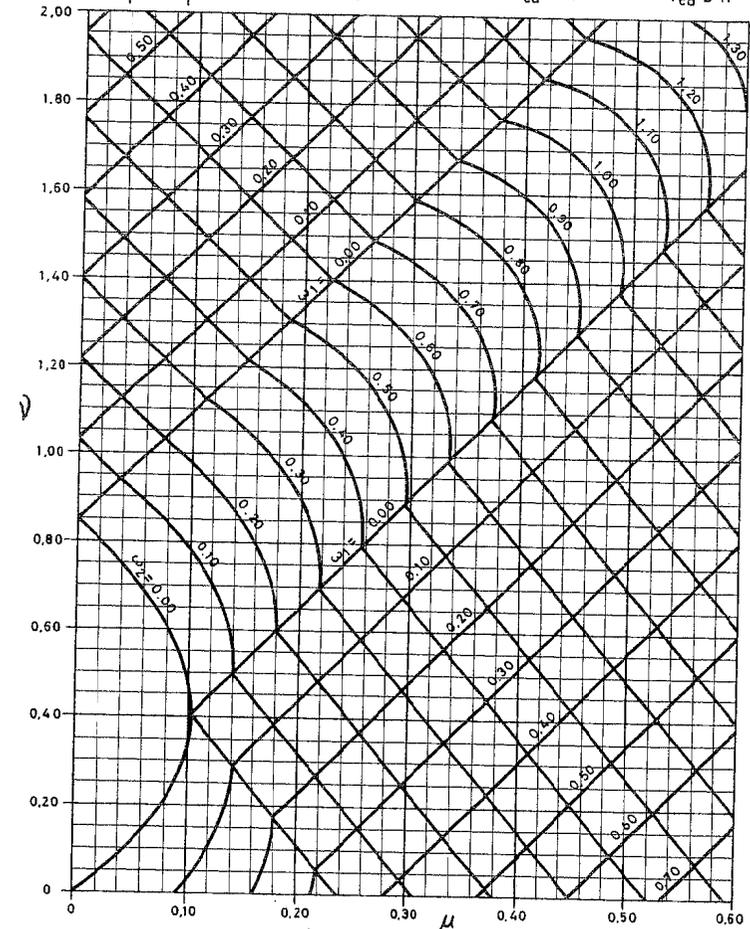
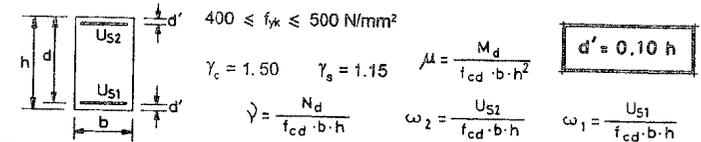
DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO ACERO DE DUREZA NATURAL



- NOTAS
1. LA ARMADURA DE CAPACIDAD MECANICA  $U_{s2}$  ES SIEMPRE LA MAS COMPRIMIDA.
  2. EN LA ZONA COMPRENDIDA ENTRE LAS RECTAS  $\omega_1 = 0,00$ , LA CUANTÍA DE LA ARMADURA INFERIOR ES CONSTANTE E IGUAL A 0,00.
  3. EN LA ZONA DEL TRIÁNGULO LIMITADO POR LA RECTA  $\omega_2 = 0,00$ , LA CURVA  $\omega_2 = 0,00$  Y EL EJE  $\mu$ , LA CUANTÍA DE LA ARMADURA SUPERIOR ES CONSTANTE E IGUAL A 0,00.

DIMENSIONAMIENTO ÓPTIMO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXOCOMPRESIÓN

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO ACERO DEFORMADO EN FRÍO

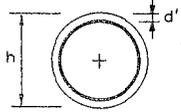


- NOTAS
1. LA ARMADURA DE CAPACIDAD MECANICA  $U_{s2}$  ES SIEMPRE LA MAS COMPRIMIDA.
  2. EN LA ZONA COMPRENDIDA ENTRE LAS RECTAS  $\omega_1 = 0,00$ , LA CUANTÍA DE LA ARMADURA INFERIOR ES CONSTANTE E IGUAL A 0,00.
  3. EN LA ZONA DEL TRIÁNGULO LIMITADO POR LA RECTA  $\omega_2 = 0,00$ , LA CURVA  $\omega_2 = 0,00$  Y EL EJE  $\mu$ , LA CUANTÍA DE LA ARMADURA SUPERIOR ES CONSTANTE E IGUAL A 0,00.

SECCIONES CIRCULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN COMPUESTA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

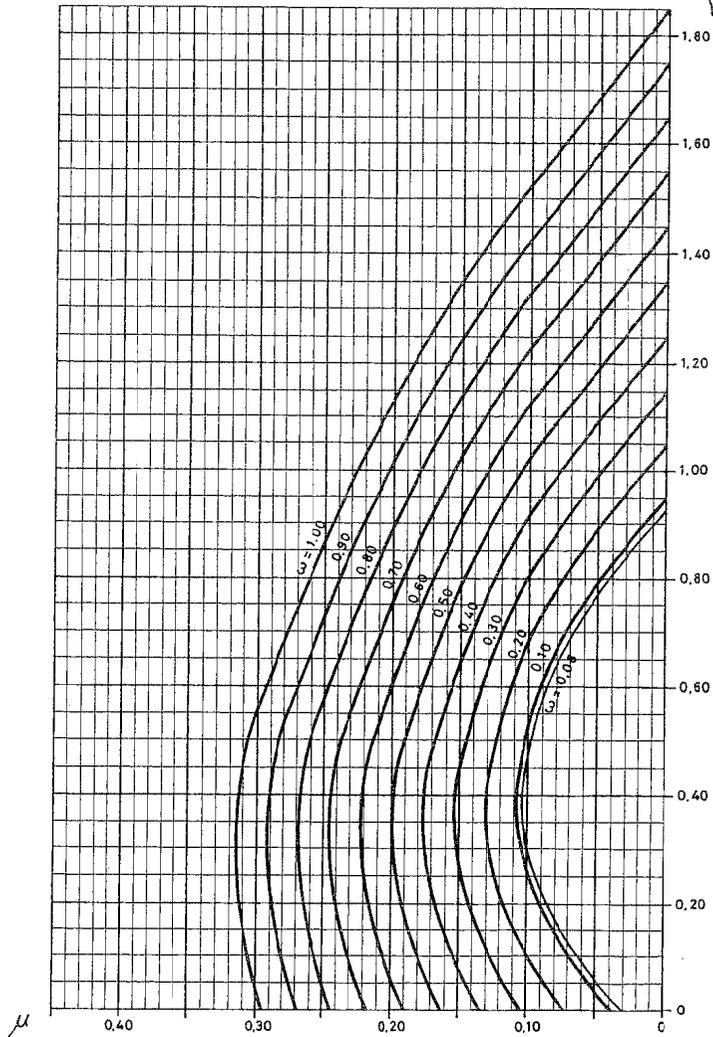
$$\gamma_c = 1.50 \quad \gamma_s = 1.15$$

$$\bar{\nu} = \frac{N_d}{f_{cd} \pi \frac{h^2}{4}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} \pi \frac{h^3}{4}}$$

$$d' = 0.10 h$$

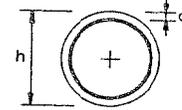
$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} \pi \frac{h^2}{4}}$$



SECCIONES CIRCULARES SOMETIDAS  
A FLEXIÓN COMPUESTA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

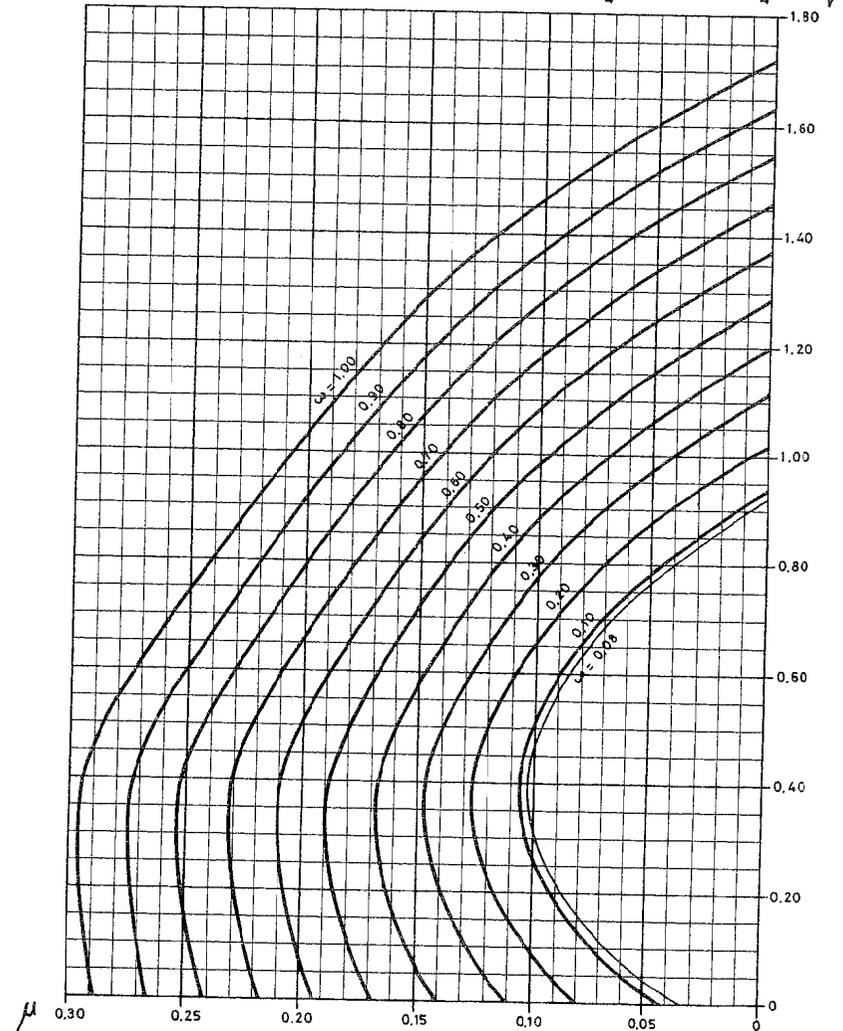
$$\gamma_c = 1.50 \quad \gamma_s = 1.15$$

$$\bar{\nu} = \frac{N_d}{f_{cd} \pi \frac{h^2}{4}}$$

$$\mu = \frac{M_d}{f_{cd} \pi \frac{h^3}{4}}$$

$$d' = 0.10 h$$

$$\omega = \frac{U_s}{f_{cd} \pi \frac{h^2}{4}}$$

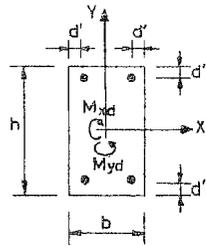


GT-111

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0,10 h$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$A_s =$  Área total de armadura

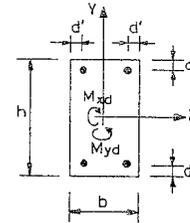
$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

GT-112

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0,10 h$$

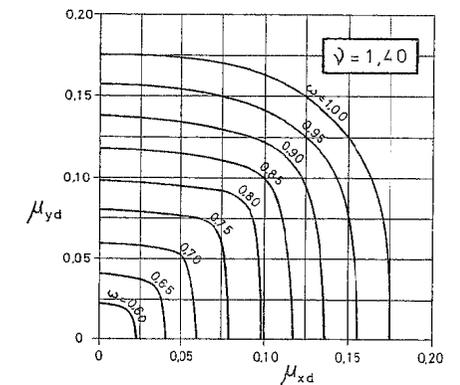
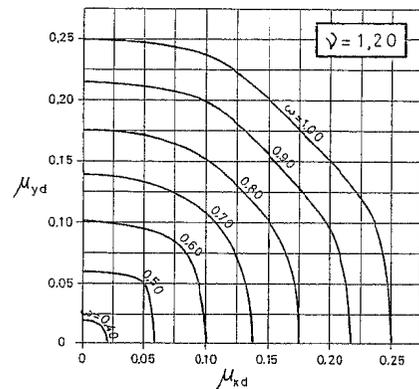
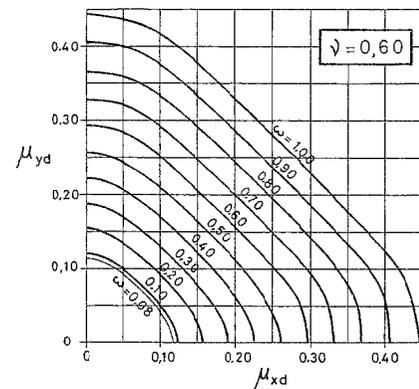
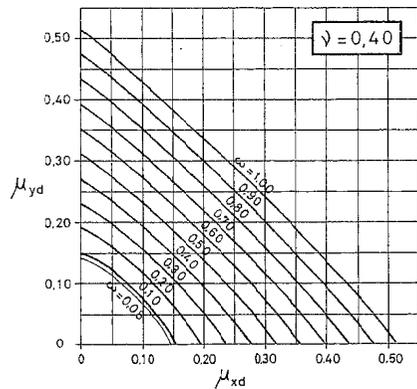
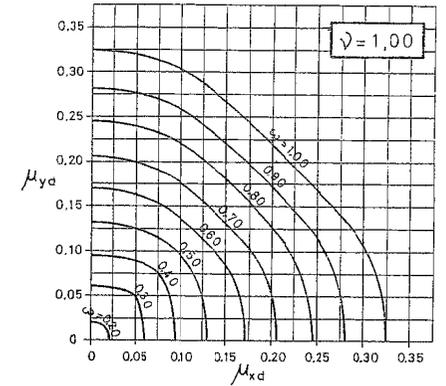
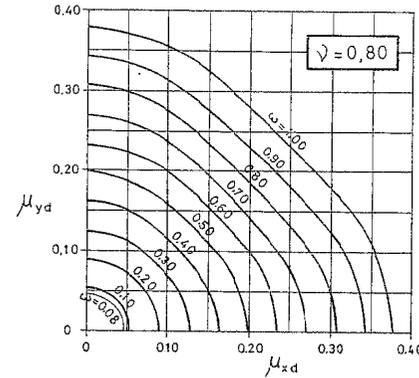
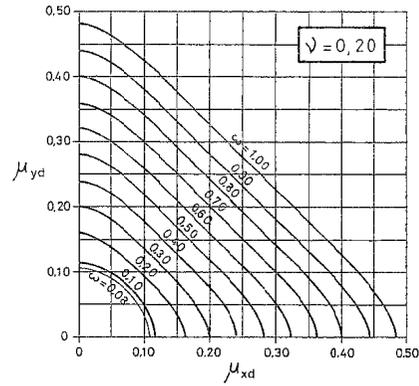
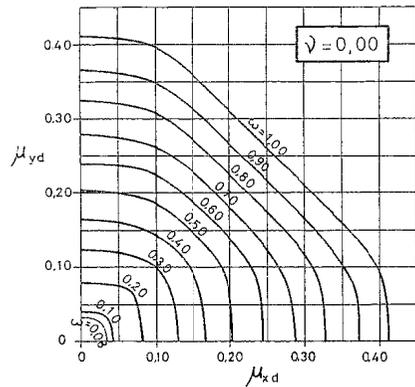
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$A_s =$  Área total de armadura

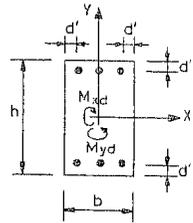
$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$



DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_s = 1.15$

$d' = 0,10 h$

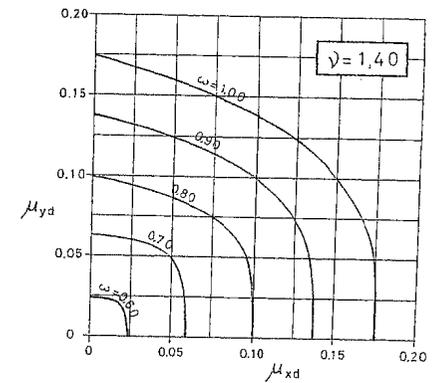
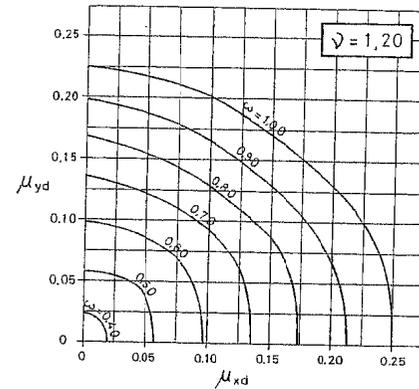
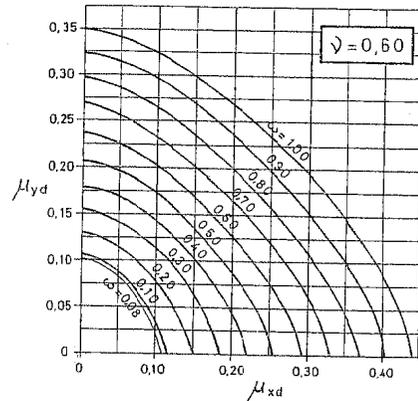
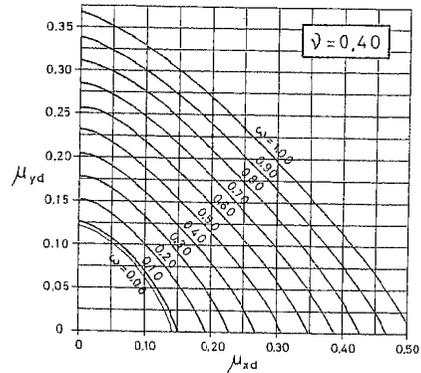
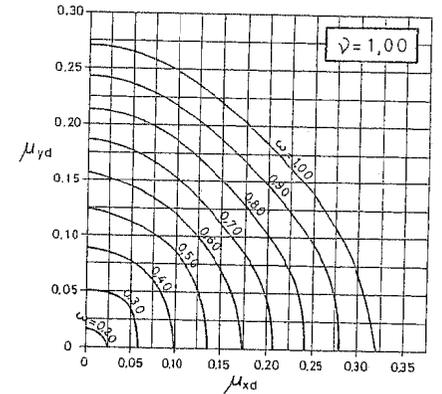
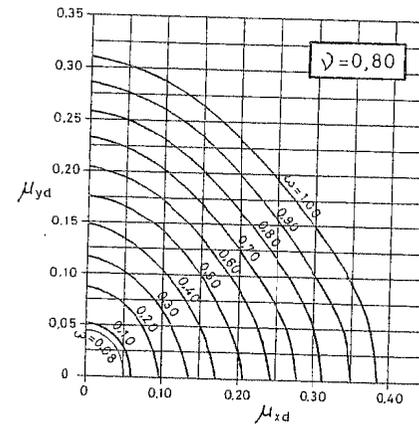
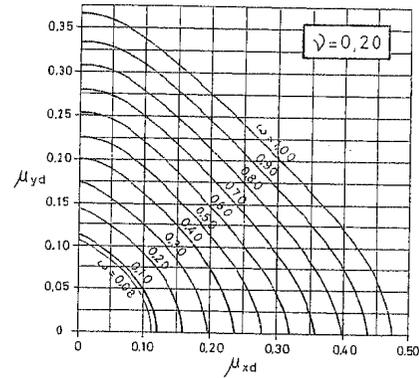
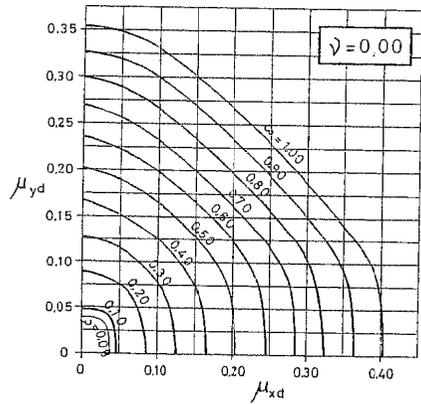
$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$

$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

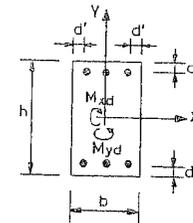
$A_s = \text{Área total de armadura}$



DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_s = 1.15$

$d' = 0,10 h$

$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$

$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

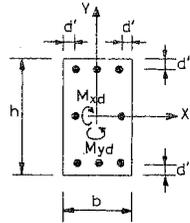
$A_s = \text{Área total de armadura}$

GT-115

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0.10 h$$

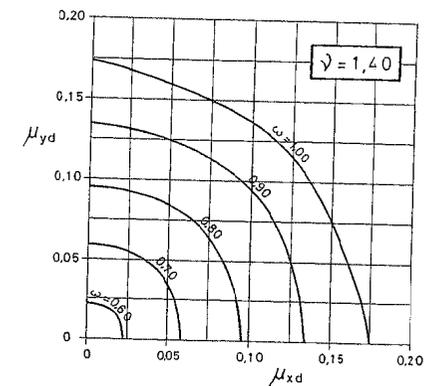
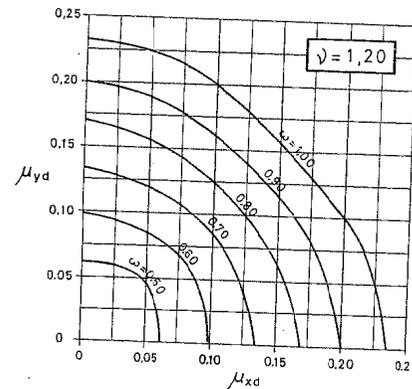
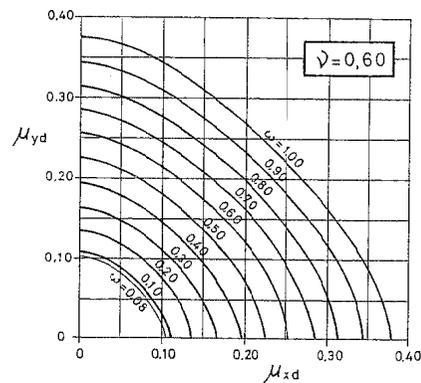
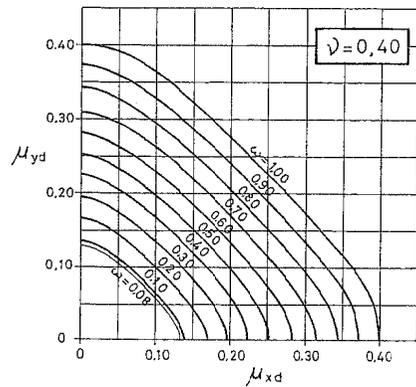
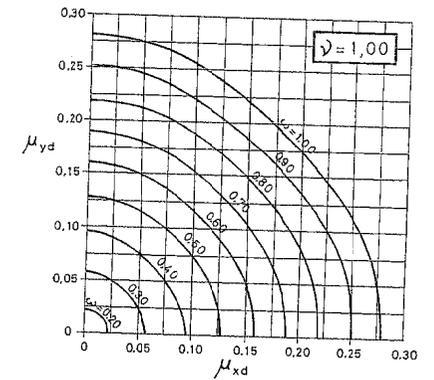
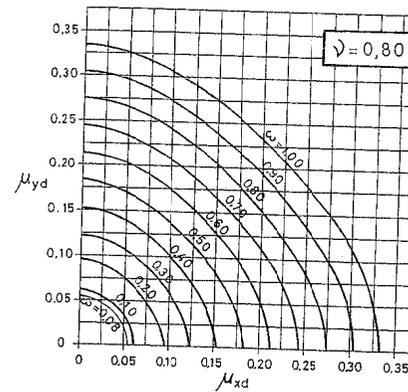
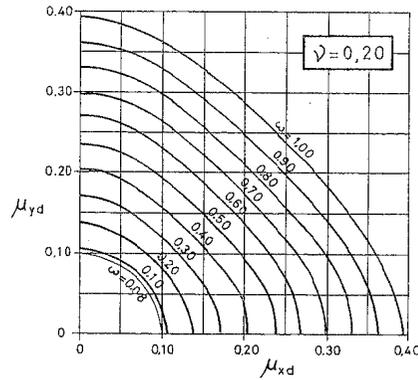
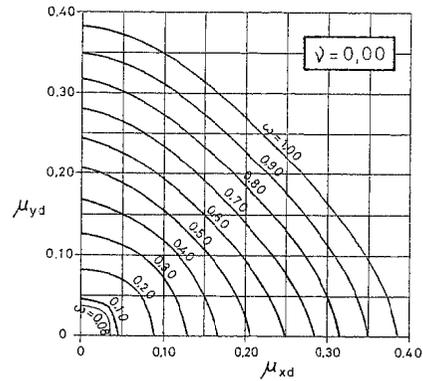
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

$A_s$  = Área total de armadura

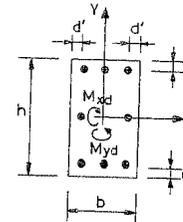


GT-116

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0.10 h$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

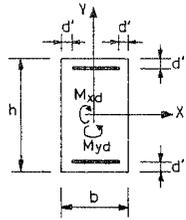
$A_s$  = Área total de armadura

GT-117

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0.10 h$$

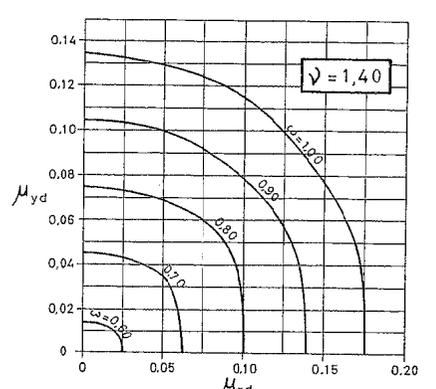
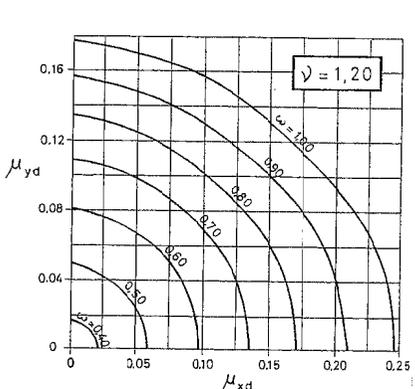
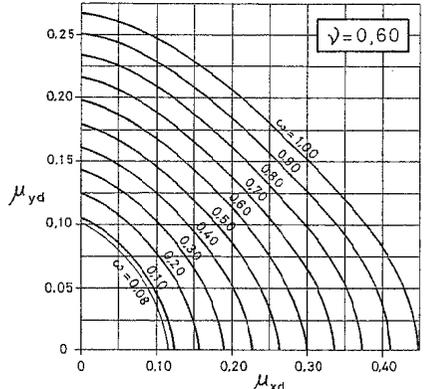
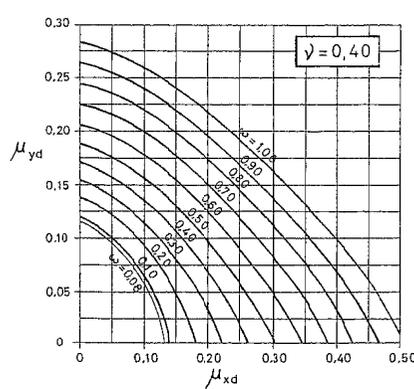
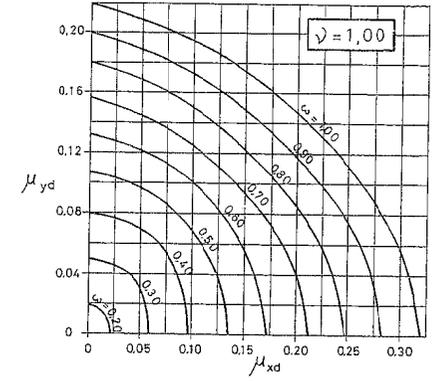
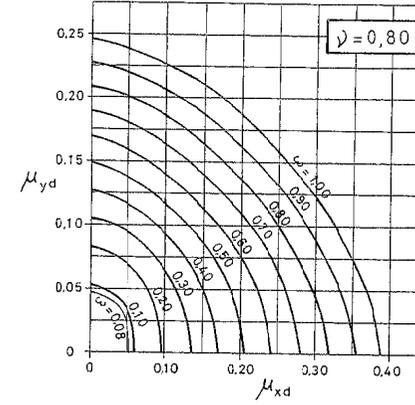
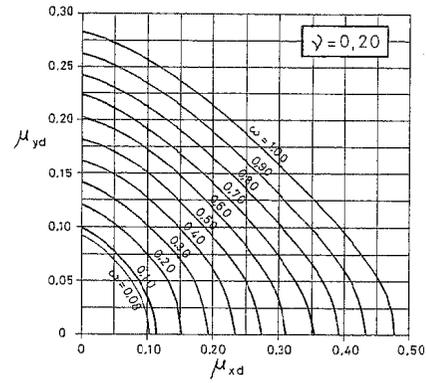
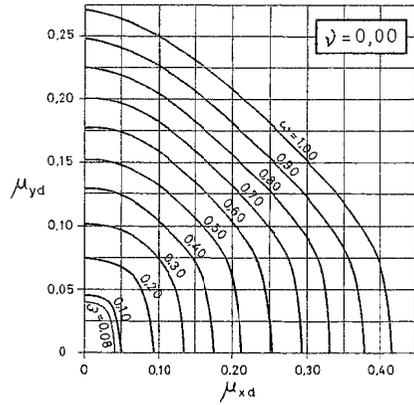
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\gamma = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

$A_s$  = Área total de armadura

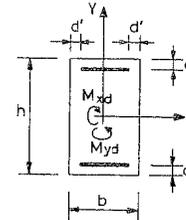


GT-118

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0.10 h$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\gamma = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

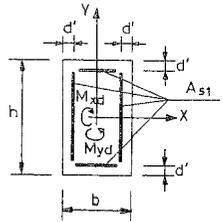
$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

$A_s$  = Área total de armadura

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_s = 1.15$

$d' = 0.10 h$

$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$

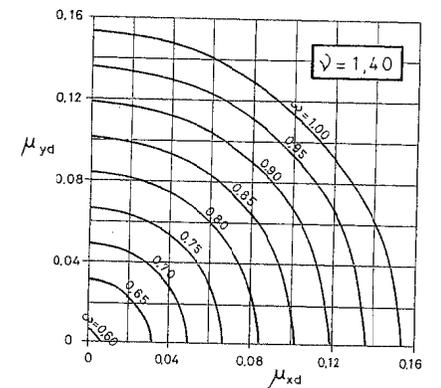
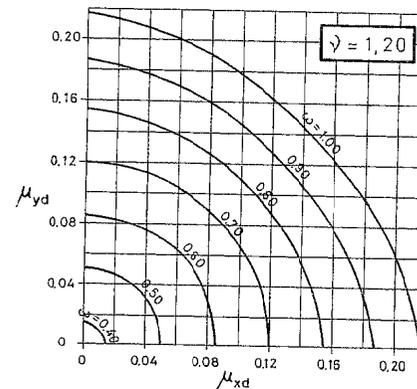
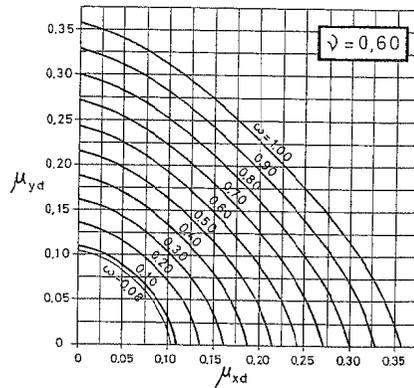
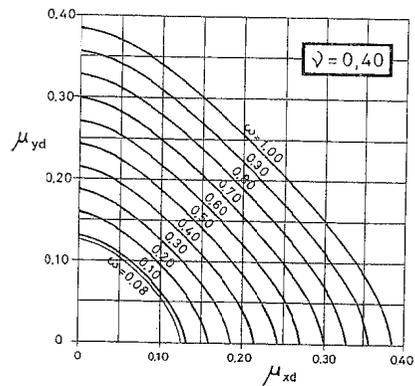
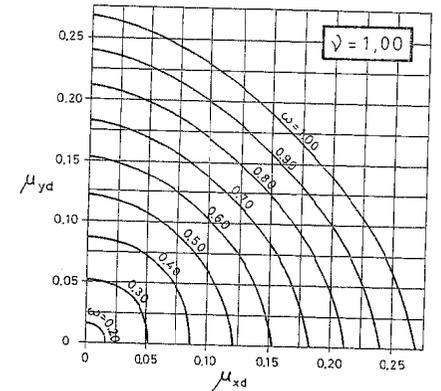
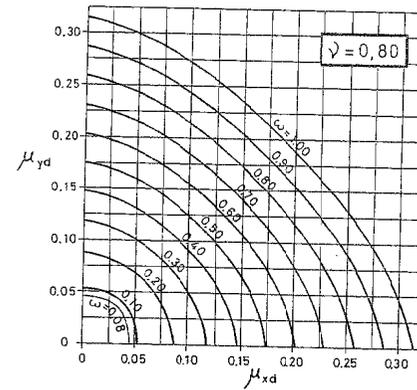
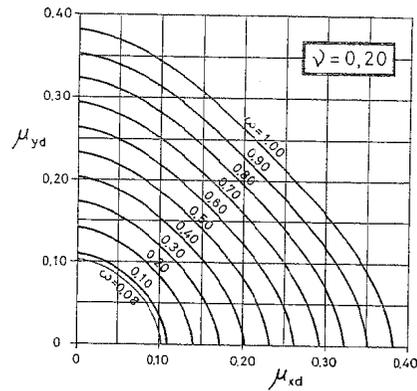
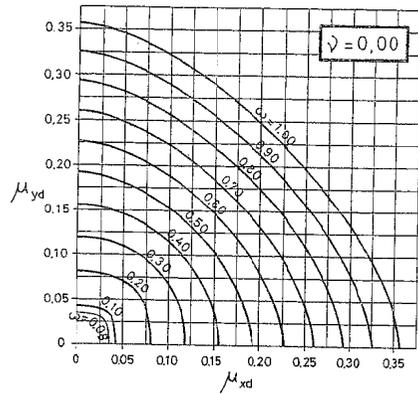
$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

$A_s = \text{Área total de armadura}$

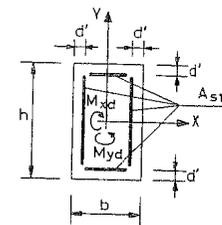
$A_s = 4 A_{s1}$



DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DE DUREZA NATURAL



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_s = 1.15$

$d' = 0.10 h$

$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$

$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

$A_s = \text{Área total de armadura}$

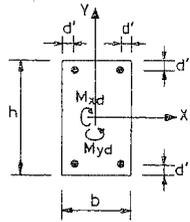
$A_s = 4 A_{s1}$

GT-121

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0,10 h$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

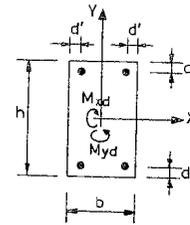
$A_s$  = Área total de armadura

GT-122

DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_s = 1.15$$

$$d' = 0,10 h$$

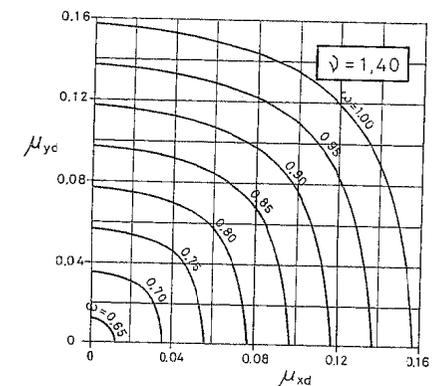
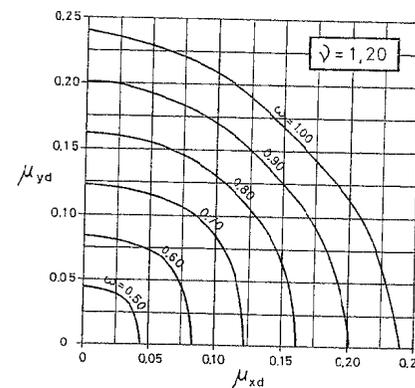
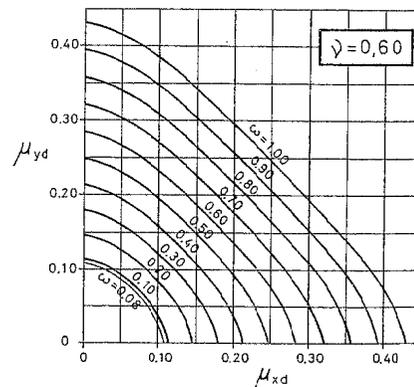
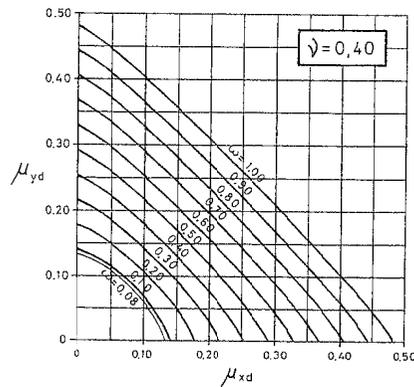
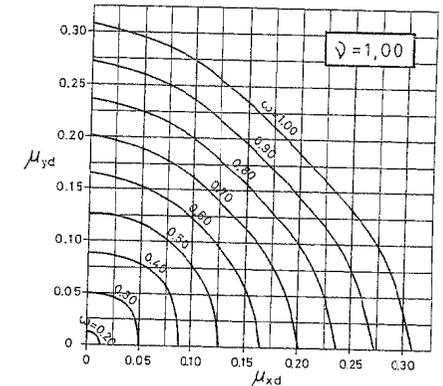
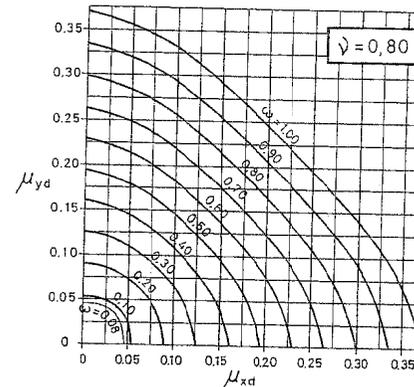
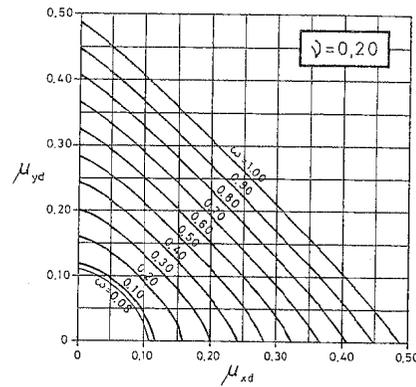
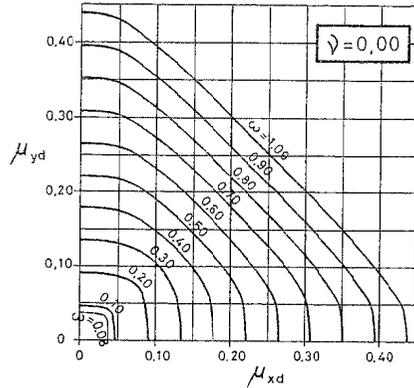
$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$$

$$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$$

$$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$$

$$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$$

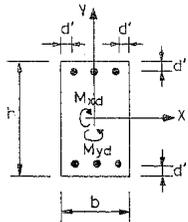
$A_s$  = Área total de armadura



DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_s = 1.15$

$d' = 0,10 h$

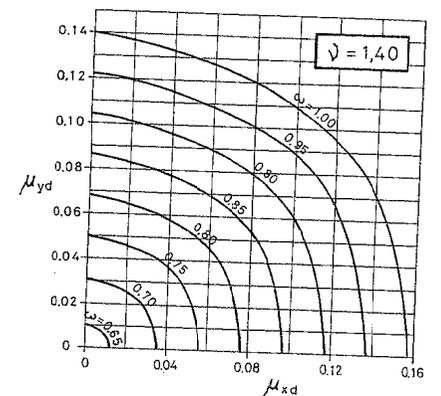
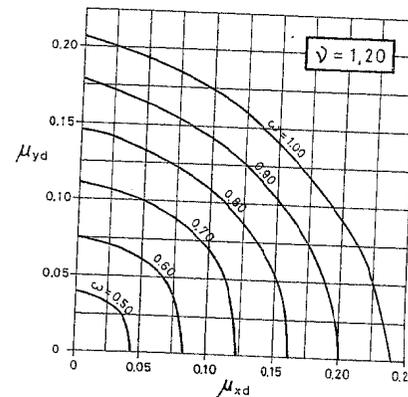
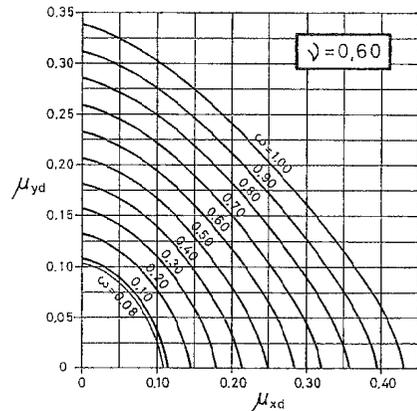
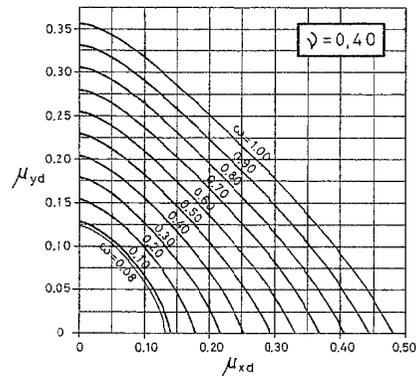
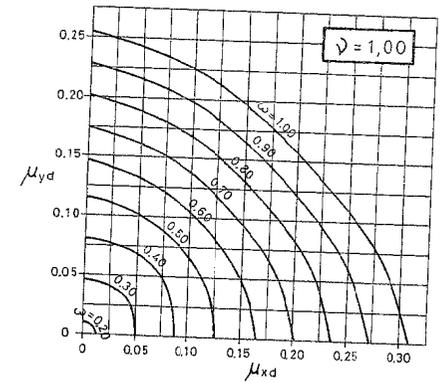
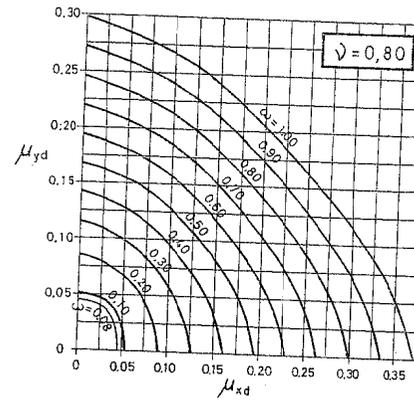
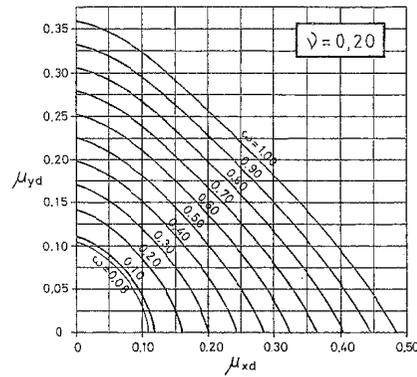
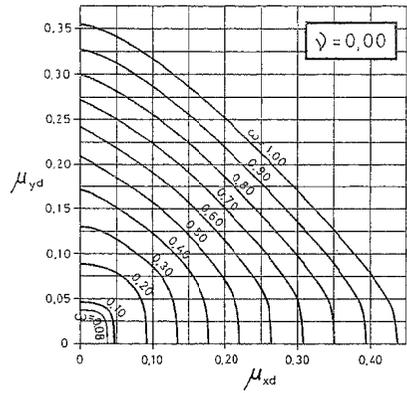
$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$

$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

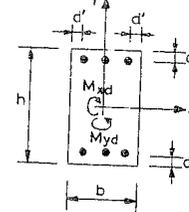
$A_s =$  Área total de armadura



DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXO-COMPRESIÓN ESVIADA

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO

ACERO DEFORMADO EN FRIO



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$

$\gamma_s = 1.15$

$d' = 0,10 h$

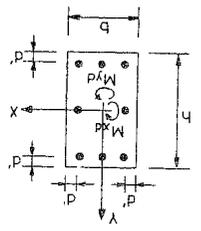
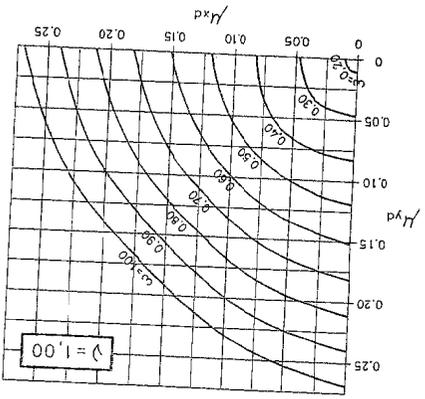
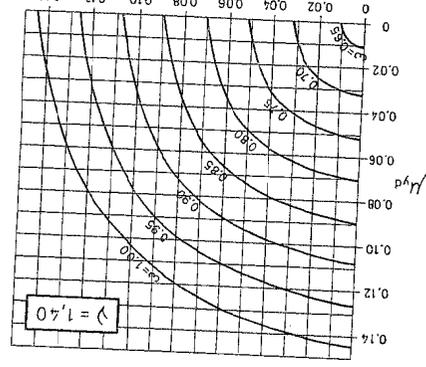
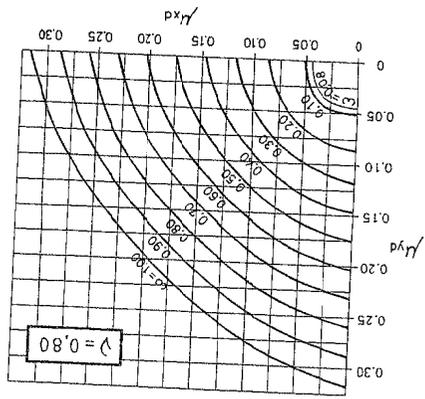
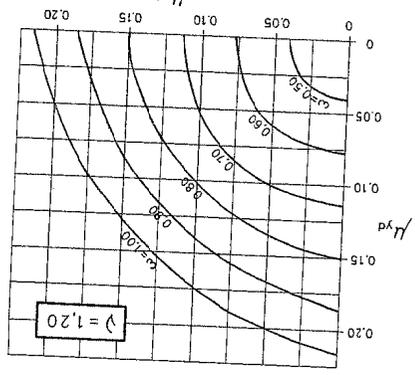
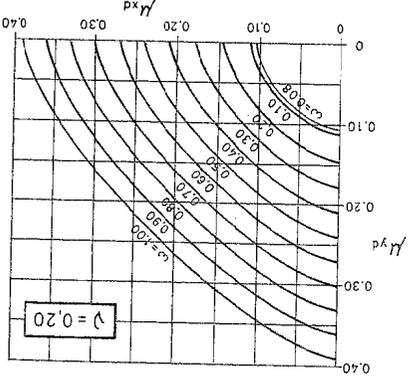
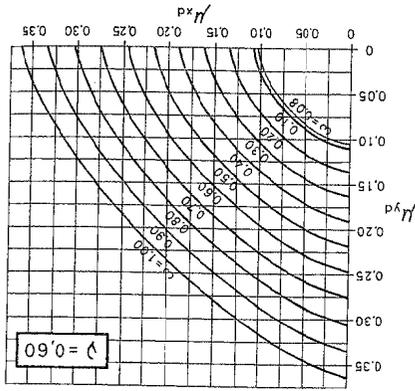
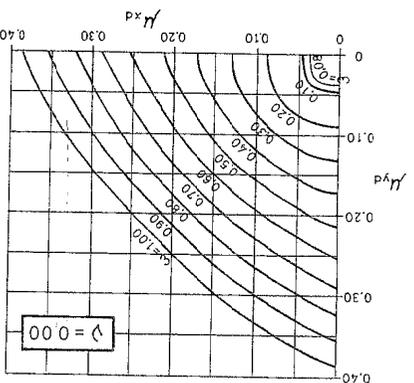
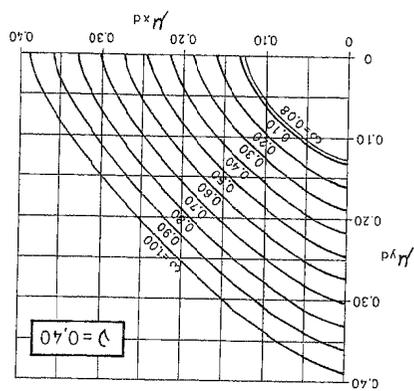
$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$

$\psi = \frac{N_d}{f_{cd} b h}$

$\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$

$\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

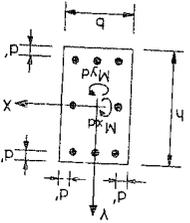
$A_s =$  Área total de armadura



$400 \leq f_k \leq 500 \text{ N/mm}^2$   
 $\gamma_s = 1.15$   
 $\lambda = \frac{A_s f_{yd}}{N_d} = \frac{f_{cd} b h}{N_d}$   
 $\lambda_{yd} = \frac{M_{yd}}{N_d d} = \frac{f_{cd} b h^2}{M_{yd}}$   
 $\lambda_{xd} = \frac{M_{xd}}{N_d d} = \frac{f_{cd} b h^2}{M_{xd}}$

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO  
 ACERO DEFORMADO EN FRÍO  
 DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
 SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESTIADA

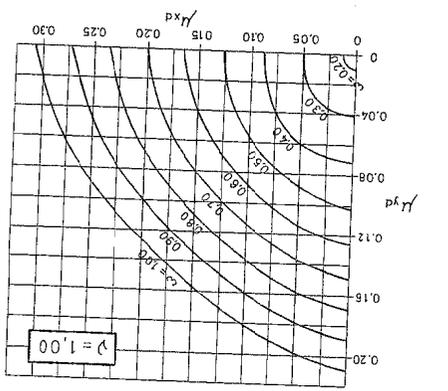
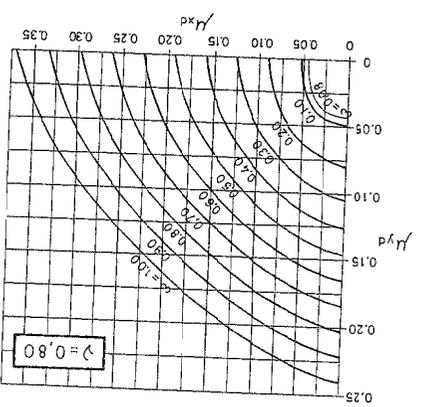
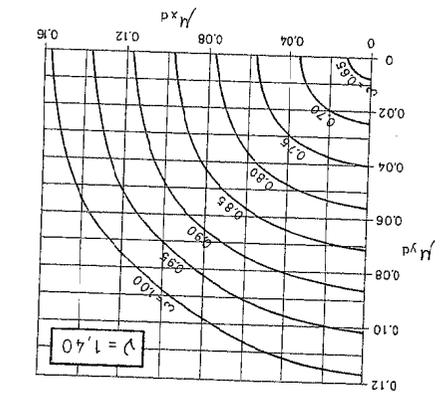
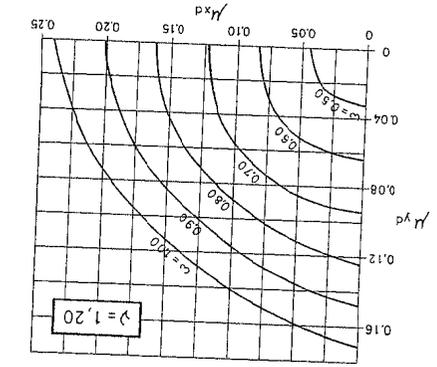
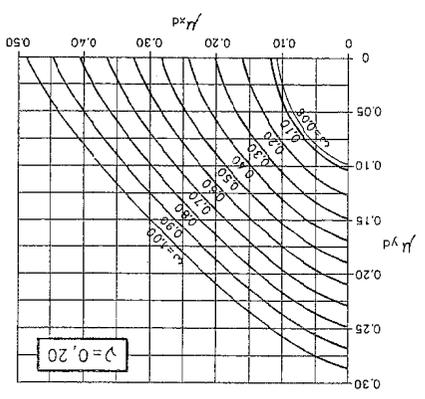
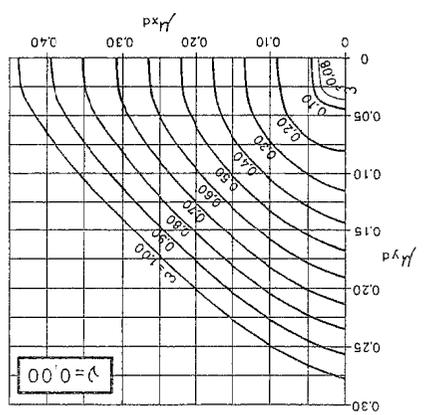
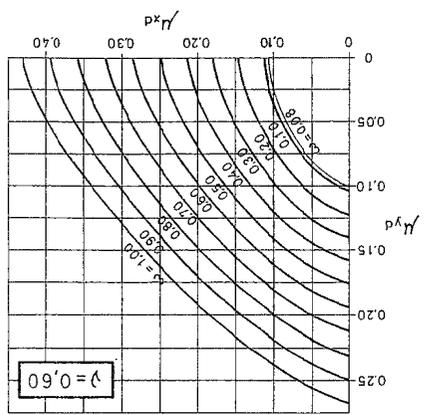
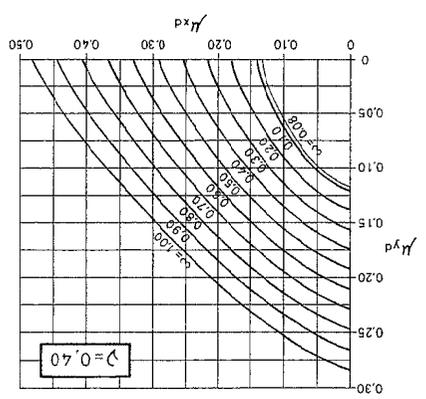
GT-125



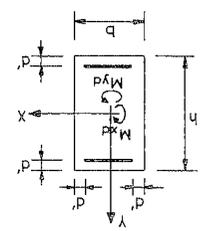
$400 \leq f_k \leq 500 \text{ N/mm}^2$   
 $\gamma_s = 1.15$   
 $\lambda = \frac{A_s f_{yd}}{N_d} = \frac{f_{cd} b h}{N_d}$   
 $\lambda_{yd} = \frac{M_{yd}}{N_d d} = \frac{f_{cd} b h^2}{M_{yd}}$   
 $\lambda_{xd} = \frac{M_{xd}}{N_d d} = \frac{f_{cd} b h^2}{M_{xd}}$

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO  
 ACERO DEFORMADO EN FRÍO  
 DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
 SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESIÓN ESTIADA

GT-126



GT-127  
DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESION ESVIADA

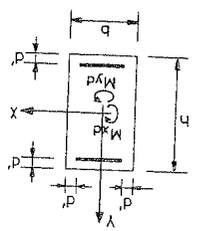


$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$   
 $\gamma_s = 1.15$   
 $\epsilon = \frac{A_s f_{yd}}{N d}$   
 $\gamma = \frac{f_{cd} b h}{N d}$   
 $\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{N d}$   
 $\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{N d}$   
 $A_s = \text{Área total de armadura}$

ACERO DEFORMADO EN FRIO

$d' = 0.10 h$

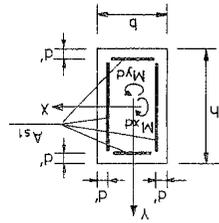
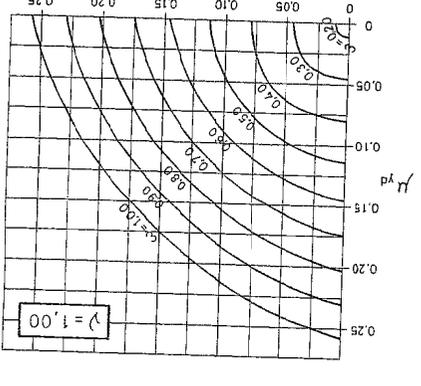
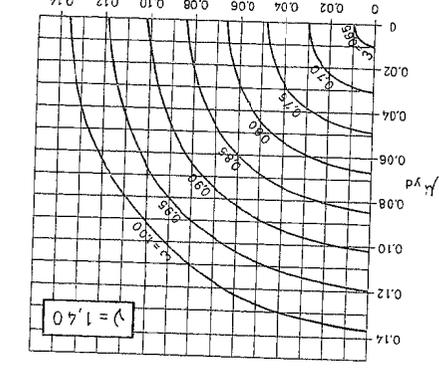
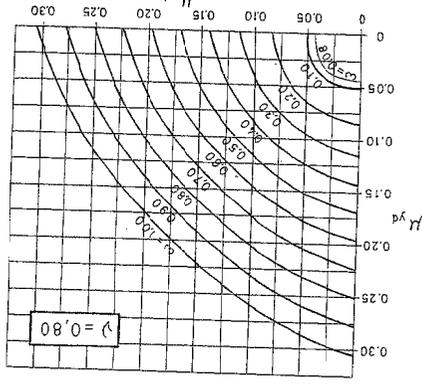
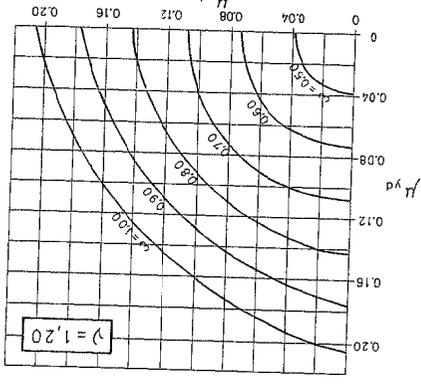
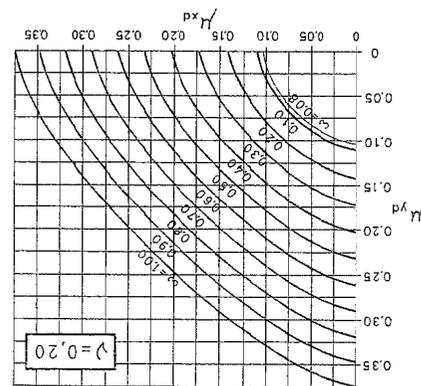
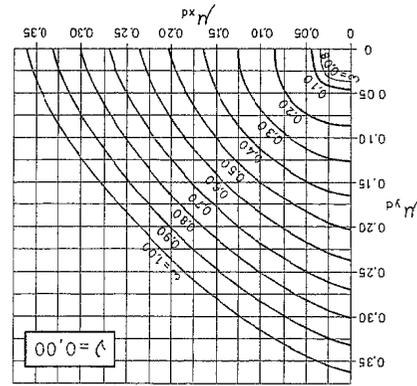
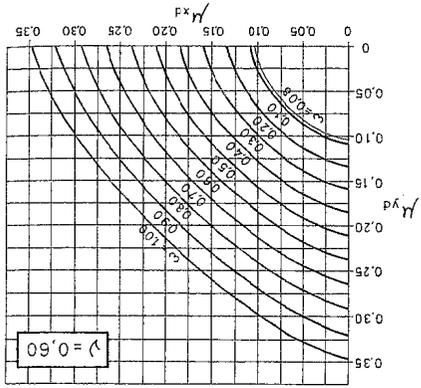
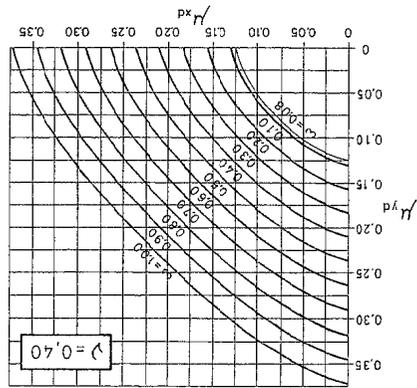
GT-128  
DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESION ESVIADA



$400 \leq f_{yk} \leq 500 \text{ N/mm}^2$   
 $\gamma_s = 1.15$   
 $\epsilon = \frac{A_s f_{yd}}{N d}$   
 $\gamma = \frac{f_{cd} b h}{N d}$   
 $\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{N d}$   
 $\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{N d}$   
 $A_s = \text{Área total de armadura}$

ACERO DEFORMADO EN FRIO

$d' = 0.10 h$

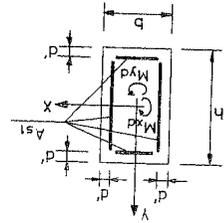


$400 \leq f_k \leq 500 \text{ N/mm}^2$   $\gamma_s = 1.15$   
 $w = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$   
 $\gamma = \frac{f_{cd} b h}{N d}$   
 $A_s = \text{Area total de armadura}$   
 $A_s = 4 A_{s1}$   
 $\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$   
 $\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

$d' = 0.10 h$

DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO  
 ACERO DE DUREZA NATURAL  
 DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
 SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESION ESVIADA

GT-129



$400 \leq f_k \leq 500 \text{ N/mm}^2$   $\gamma_s = 1.15$   
 $w = \frac{A_s f_{yd}}{f_{cd} b h}$   
 $\gamma = \frac{f_{cd} b h}{N d}$   
 $A_s = \text{Area total de armadura}$   
 $A_s = 4 A_{s1}$   
 $\mu_{xd} = \frac{M_{xd}}{f_{cd} b h^2}$   
 $\mu_{yd} = \frac{M_{yd}}{f_{cd} b h^2}$

$d' = 0.10 h$

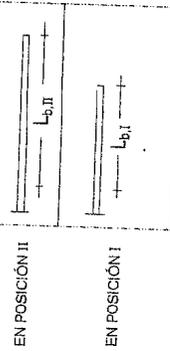
DIAGRAMA PARÁBOLA RECTÁNGULO  
 ACERO DE DUREZA NATURAL  
 DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES  
 SOMETIDAS A FLEJO-COMPRESION ESVIADA

GT-130

GT-131

VALORES DE  $\tau_{bd}$  (N/mm<sup>2</sup>)

$\phi$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)					
	25	30	35	40	45	50
8	7,48	8,45	9,36	10,24	11,07	11,88
10	7,23	8,16	9,05	9,89	10,70	11,48
12	6,98	7,88	8,73	9,54	10,32	11,07
14	6,72	7,59	8,41	9,20	9,95	10,67
16	6,47	7,30	8,10	8,85	9,57	10,27
20	5,96	6,73	7,46	8,16	8,82	9,46
25	5,33	6,02	6,67	7,29	7,88	8,46
32	4,44	5,02	5,56	6,08	6,57	7,05



GT-132

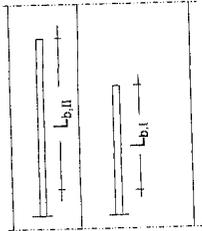
LONGITUDES DE ANCLAJE POR PROLONGACIÓN RECTA DE BARRAS Y ALAMBRES CORRUGADOS, EN TRACCIÓN Y COMPRESIÓN EN mm

ACERO B 400

$\phi$ (mm)	POSICIÓN II											
	HORMIGÓN					HORMIGÓN						
	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50
5	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150
6	171	171	171	171	171	171	150	150	150	150	150	150
7	200	200	200	200	200	200	150	150	150	150	150	150
8	229	229	229	229	229	229	160	160	160	160	160	160
9	257	257	257	257	257	257	180	180	180	180	180	180
10	286	286	286	286	286	286	200	200	200	200	200	200
11	314	314	314	314	314	314	220	220	220	220	220	220
12	343	343	343	343	343	343	240	240	240	240	240	240
14	400	400	400	400	400	400	280	280	280	280	280	280
16	457	457	457	457	457	457	320	320	320	320	320	320
20	672	571	571	571	571	571	480	400	400	400	400	400
25	1050	875	788	714	714	714	750	625	563	500	500	500
32	1720	1434	1290	1147	1004	1004	1229	1024	922	819	717	717
40	2688	2240	2016	1792	1568	1568	1920	1600	1440	1280	1120	1120

GT-133

LONGITUDES DE ANCLAJE POR PROLONGACIÓN RECTA DE BARRAS Y ALAMBRES CORRUGADOS, EN TRACCIÓN Y COMPRESIÓN EN mm



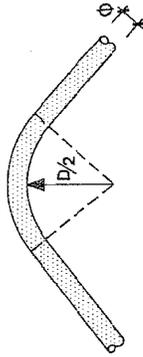
EN POSICIÓN II

EN POSICIÓN I

ACERO B 500

$\phi$ (mm)	POSICIÓN II											
	HORMIGÓN											
	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50	H-25	H-30	H-35	H-40	H-45	H-50
5	179	179	179	179	179	179	150	150	150	150	150	150
6	214	214	214	214	214	214	150	150	150	150	150	150
7	250	250	250	250	250	250	175	175	175	175	175	175
8	286	286	286	286	286	286	200	200	200	200	200	200
9	321	321	321	321	321	321	225	225	225	225	225	225
10	357	357	357	357	357	357	250	250	250	250	250	250
11	393	393	393	393	393	393	275	275	275	275	275	275
12	429	429	429	429	429	429	300	300	300	300	300	300
14	500	500	500	500	500	500	350	350	350	350	350	350
16	571	571	571	571	571	571	400	400	400	400	400	400
20	714	714	714	714	714	714	500	500	500	500	500	500
25	893	893	893	893	893	893	750	750	750	750	750	750
32	1720	1434	1290	1147	1143	1143	1229	1024	922	819	800	800
40	2688	2240	2016	1792	1568	1568	1920	1600	1440	1280	1120	1120

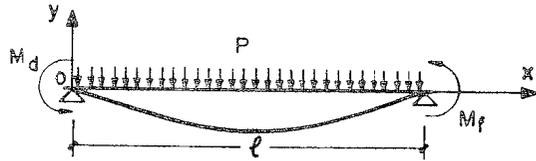
GT-134



DIAMETROS DE DOBLADO (D) DE BARRAS (mm)

$\phi$ (mm)	B 400		B 500	
	Barras dobladas	Ganchos, patillas y ganchos en U	Barras dobladas	Ganchos, patillas y ganchos en U
6	60	24	72	24
8	80	32	96	32
10	100	40	120	40
12	120	48	144	48
14	140	56	168	56
16	160	64	192	64
20	200	140	240	140
25	250	175	300	175
32	384	224	448	224
40	480	280	560	280
50	600	350	700	350

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE LA FLECHA MÁXIMA EN VANO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA Y EXTREMOS ELÁSTICAMENTE EMPOTRADOS



## Notaciones y signos

- $M_d, M_f$ , momentos de empotramiento actuantes sobre los extremos de la pieza.
- La carga  $p$  se considera positiva en el sentido negativo del eje  $oy$ .
- Las flechas se consideran positivas en el sentido negativo del eje  $oy$ .

Abscisa  $x_{m\acute{a}x}$  del punto de flecha máxima

Es la raíz de la ecuación

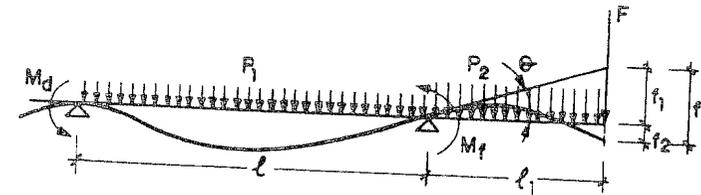
$$\frac{px^3}{6} - \frac{x^2}{2} \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d x + \frac{pl^3}{24} + \frac{l}{6} (M_f - 2M_d) = 0$$

## Flecha máxima

Se obtiene sustituyendo el valor de  $x_{m\acute{a}x}$  en la ecuación de la deformada

$$y = \frac{l}{EI} \left[ \frac{px^4}{24} - \frac{x^3}{6} \left( \frac{pl}{2} + \frac{M_d + M_f}{l} \right) + M_d \frac{x^2}{2} + \left[ \frac{pl^3}{24} + \frac{l}{6} (M_f - 2M_d) \right] x \right]$$

FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE LA FLECHA MÁXIMA EN PUNTA DE VOLADIZO CON VANO INTERIOR ELÁSTICAMENTE EMPOTRADO



## Notaciones y signos

- $M_d, M_f$ , momentos de empotramiento actuantes sobre los extremos de la pieza.
- La carga  $p$  se considera positiva en el sentido negativo del eje  $oy$ .
- Las flechas se consideran positivas en el sentido negativo del eje  $oy$ .

Angulo  $\theta$  de giro en el apoyo frontal

Viene dado por la fórmula

$$\theta = \frac{l}{3EI} \left[ -\frac{p_1 l^2}{8} + \frac{M_d}{2} + \frac{p_2 l_1^2}{2} + Fl_1 \right] \quad [1]$$

(Valores negativos de  $\theta$  corresponden a levantamientos de la punta del voladizo).

Flecha  $f_1$  (Ver figura)

$$f_1 = \frac{l l_1}{3EI} \left[ -\frac{p_1 l^2}{8} + \frac{M_d}{2} + \frac{p_2 l_1^2}{2} + Fl_1 \right] \quad [2]$$

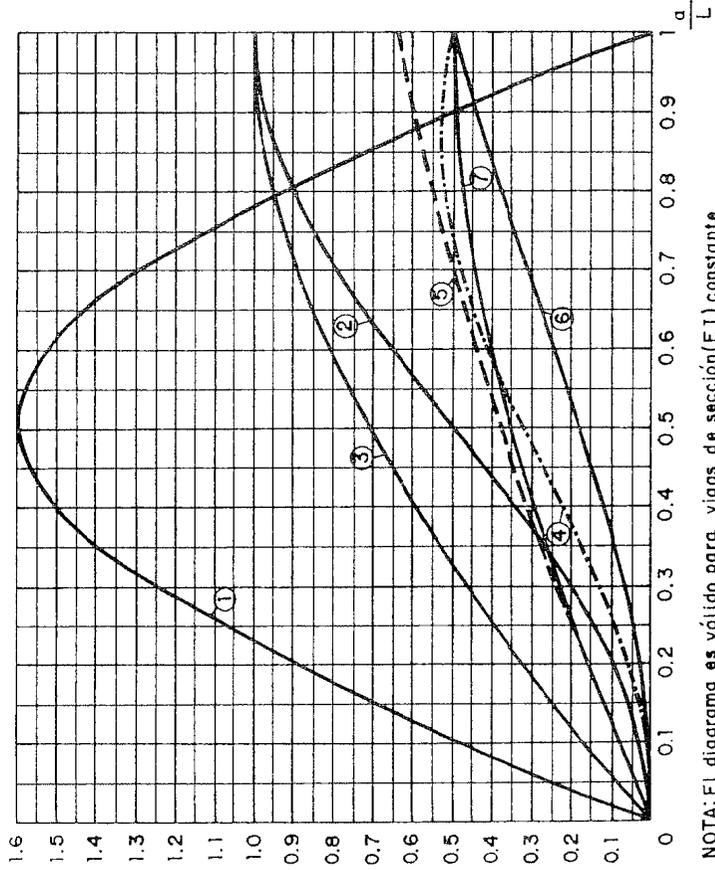
Flecha  $f$  (Ver figura)

$$f = \frac{l_1^3}{EI} \left[ \frac{p_2 l_1}{8} + \frac{F}{3} \right] \quad [3]$$

## Flecha óptica (Ver figura)

$$f_2 = f + f_1$$

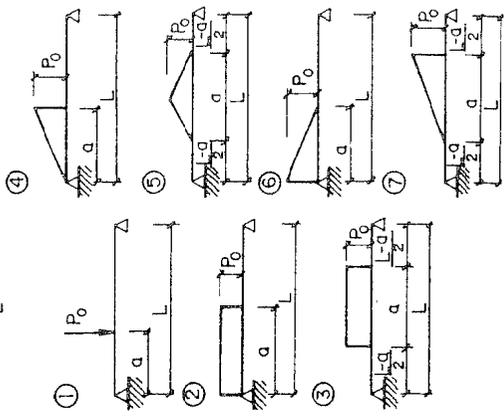
**DIAGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EQUIVALENTE A DISTINTOS TIPOS DE CARGA PARA LA MISMA FLECHA EN EL PUNTO MEDIO DE LA LUZ EN VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS**



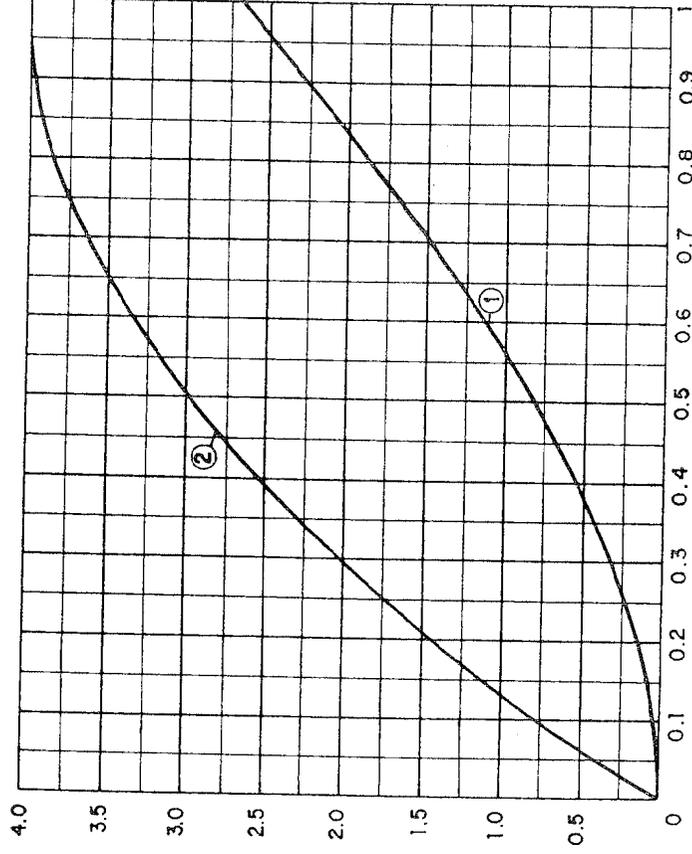
NOTA: El diagrama es válido para vigas de sección (E I) constante.

La flecha en el punto medio de la luz debido a los distintos casos de carga viene dada por la expresión:  $f = f_0$  siendo  $f_0$  la flecha de la viga isostática sometida a una carga uniformemente repartida sobre toda la luz y de valor:  $q = K \frac{P_0}{L}$  excepto para el caso ① en que:

$$q = K \frac{P_0}{L}$$



**DIAGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EQUIVALENTE A DISTINTOS TIPOS DE CARGA PARA LA MISMA FLECHA EN EL EXTREMO LIBRE DEL VOLADIZO**



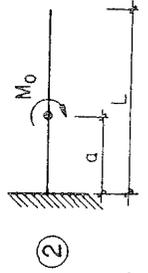
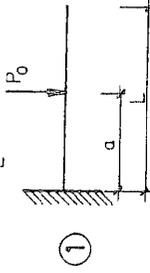
NOTA: El diagrama es válido para voladizos de sección (E I) constante.

La flecha en punta del voladizo debido a los distintos casos de carga viene dada por la expresión:  $f = f_0$

$$f = f_0$$

siendo  $f_0$  la flecha en punta del voladizo sometido a una carga uniformemente repartida sobre toda la luz y de valor:

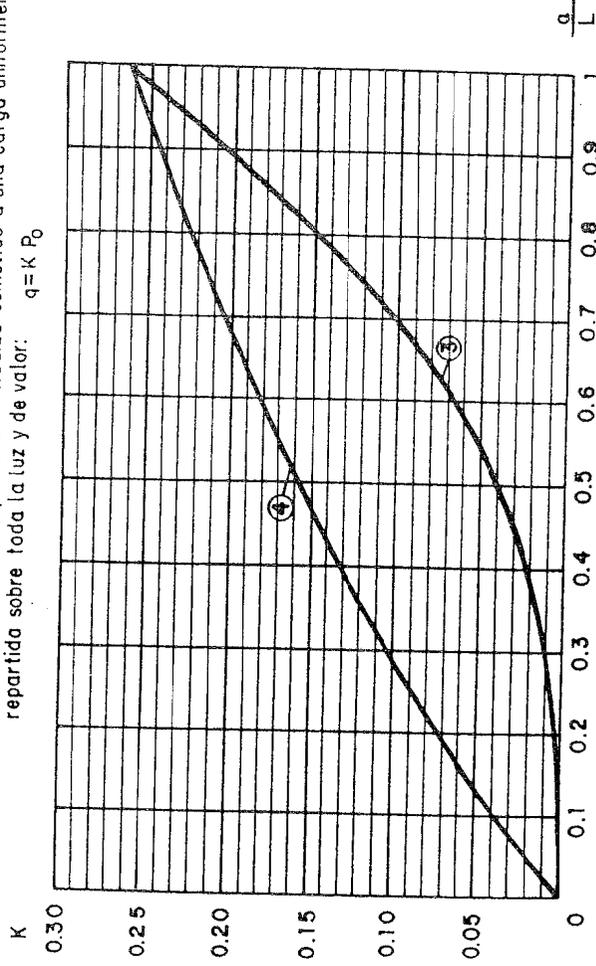
$$\textcircled{1} \quad q = K \frac{P_0}{L} \quad \textcircled{2} \quad q = K \frac{M_0}{L^2}$$



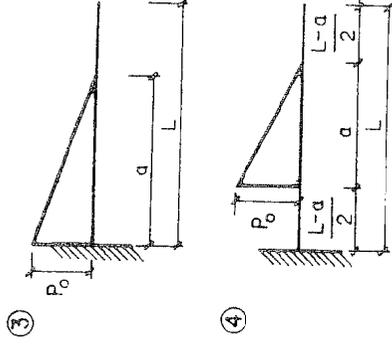
GT-138 (2 DE 3)

DIAGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EQUIVALENTE A DISTINTOS TIPOS DE CARGA PARA LA MISMA FLECHA EN EL EXTREMO LIBRE DEL VOLADIZO

La flecha en punta del voladizo debida a los distintos casos de carga viene dada por la expresión:  $f = f_0$   
 siendo  $f_0$  la flecha en punta del voladizo sometido a una carga uniformemente repartida sobre toda la luz y de valor:  $q = K P_0$



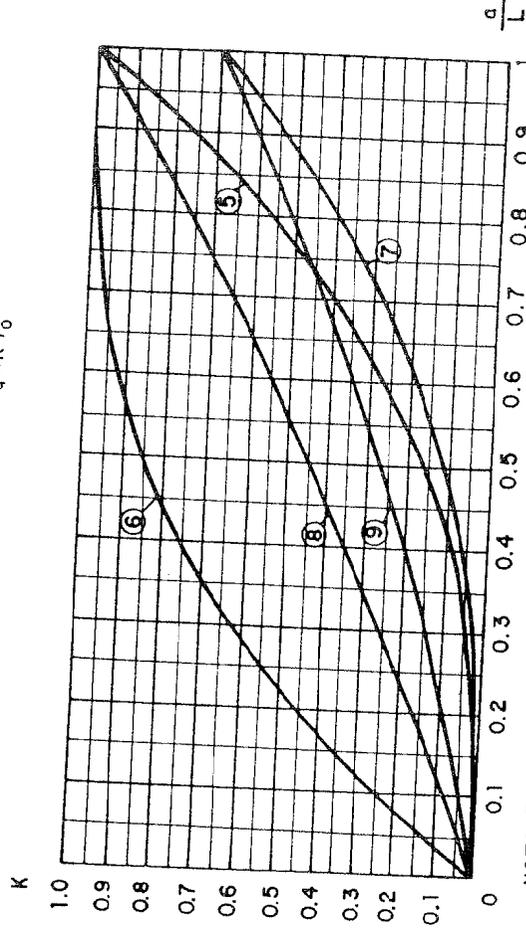
NOTA El diagrama es válido para voladizo de sección de sección (EI) constante.



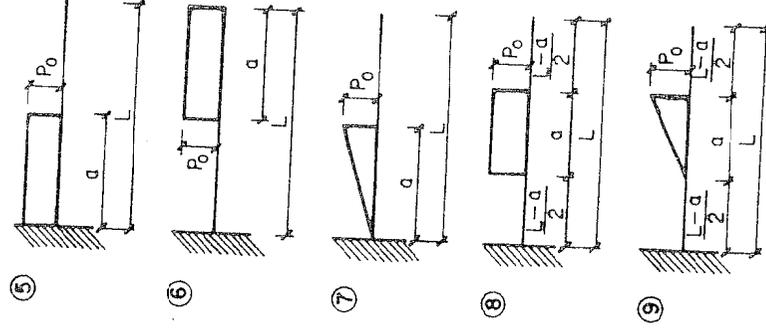
GT-138 (3 DE 3)

DIAGRAMA PARA EL CÁLCULO DE LA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EQUIVALENTE A DISTINTOS TIPOS DE CARGA PARA LA MISMA FLECHA EN EL EXTREMO LIBRE DEL VOLADIZO

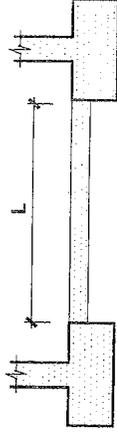
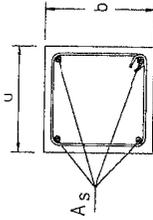
La flecha en punta del voladizo debida a los distintos casos de carga viene dada por la expresión:  $f = f_0$   
 siendo  $f_0$  la flecha en punta del voladizo sometido a una carga uniformemente repartida sobre toda la luz y de valor:  $q = K P_0$



NOTA: El diagrama es válido para voladizo de sección de sección (EI) constante.



PIEZAS DE ATADO ENTRE ZAPATAS



CARGA $N_d$ DE CÁLCULO DE LA ZAPATA MÁS CARGADA DE LAS DOS UNIDAS POR LA PIEZA (kN)													
ACERO B-400													
0.07	a/g (COEFICIENTE DE LA ACCELERACIÓN SISMICA DE CÁLCULO)											LONGITUD MÁXIMA (m)	
	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30		
1561	1366	1093	911	781	683	607	546	487	465	420	390	364	5.00
2248	1967	1574	1311	1124	983	874	787	715	656	605	562	525	6.00
3060	2677	2142	1785	1530	1339	1190	1071	974	892	824	765	714	7.00
3996	3497	2797	2331	1998	1748	1554	1399	1272	1166	1076	999	932	8.00
3996	3497	2797	2331	1998	1748	1554	1399	1272	1166	1076	999	932	9.00
6244	5464	4371	3642	3122	2732	2428	2185	1897	1821	1681	1561	1457	10.00

CARGA $N_d$ DE CÁLCULO DE LA ZAPATA MÁS CARGADA DE LAS DOS UNIDAS POR LA PIEZA (kN)													
ACERO B-500													
0.07	a/g (COEFICIENTE DE LA ACCELERACIÓN SISMICA DE CÁLCULO)											LONGITUD MÁXIMA (m)	
	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30		
1951	1707	1386	1138	976	854	759	683	621	569	525	488	455	5.00
2810	2459	1987	1639	1405	1229	1093	983	894	820	757	702	656	6.00
3825	3346	2677	2231	1912	1673	1487	1339	1217	1115	1030	956	892	7.00
4995	4371	3497	2914	2498	2185	1943	1748	1589	1457	1345	1249	1166	8.00
4995	4371	3497	2914	2498	2185	1943	1748	1589	1457	1345	1249	1166	9.00
7805	6830	5484	4553	3903	3415	3035	2732	2483	2277	2101	1951	1821	10.00

(\*) PARA PIEZAS HORMIGONADAS EN EL TERRENO LA DIMENSIÓN MÍNIMA HA DE SER DE 400mm.  
 (\*\*) LA SEPARACIÓN DE ESTRIBOS SE HA REDONDEADO POR EXCESO A MÚLTIPLOS DE 50 mm.

INDICE DE MATERIAS  
TOMO II

## ÍNDICE DE MATERIAS

NOTACIONES Y UNIDADES .....	3
<b>CAPÍTULO 34. TRACCIÓN CENTRADA O EXCÉNTRICA</b> .....	<b>7</b>
34.1 INTRODUCCIÓN .....	7
34.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	8
34.2.1 TRACCIÓN CENTRADA .....	8
34.2.2 TRACCIÓN COMPUESTA .....	10
34.2.3 ESTIMACIÓN DE LAS TENSIONES ANTES DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN .....	11
34.2.4 INFLUENCIA DE LA RETRACCIÓN SOBRE LAS TENSIONES EN SERVICIO .....	13
34.2.5 CUANTÍA MÍNIMA .....	16
34.2.6 CUANTÍA MÁXIMA .....	19
34.2.7 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS VARIAS .....	19
34.3 PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO .....	22
34.3.1 TRACCIÓN SIMPLE .....	22
34.3.2 TRACCIÓN EXCÉNTRICA .....	28
<b>CAPÍTULO 35. COMPRESIÓN SIMPLE</b> .....	<b>31</b>
35.1 INTRODUCCIÓN .....	31
35.2 PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	32
35.2.1 COMPORTAMIENTO LONGITUDINAL .....	32
35.2.2 TENSIONES EN TEORÍA CLÁSICA .....	34
35.2.3 RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN CONFINADO .....	36
35.2.4 EXCENTRICIDAD MÍNIMA .....	43
35.2.5 CUANTÍA MÍNIMA .....	43
35.2.6 CUANTÍA MÁXIMA .....	44
35.2.7 DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS .....	45
35.3 PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO .....	46
35.3.1 CASO DE CARGA APLICADA A CORTA EDAD .....	48
35.3.2 CASO DE CARGA APLICADA A LARGO PLAZO .....	51
<b>CAPÍTULO 36. ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE FLEXIÓN SIMPLE</b> .....	<b>53</b>
36.1 FLEXIÓN SIMPLE EN PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	53
36.1.1 ECUACIONES GENERALES .....	56
36.1.2 EMPLEO DEL DIAGRAMA RECTANGULAR EN SUSTITUCIÓN DEL DIAGRAMA PARÁBOLA-RECTÁNGULO .....	56
36.1.3 CASO PARTICULAR DE LA SECCIÓN RECTANGULAR .....	57
36.1.3.1 SECCIÓN RECTANGULAR SIN ARMADURA DE COMPRESIÓN .....	57
36.1.3.2 SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA DE COMPRESIÓN NECESARIA .....	68
36.1.3.3 SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA DE COMPRESIÓN NO NECESARIA PERO EXISTENTE .....	71
36.1.4 SECCIÓN EN T .....	75
36.1.4.1 CÁLCULO DE LA SECCIÓN .....	75
36.1.5 ANCHO EFICAZ DE CABEZA COMPRIMIDA DE UNA PIEZA EN T .....	80

36.1.6	ANCHO EFICAZ DE CABEZA TRACCIONADA DE UNA PIEZA EN T.....	81	38.5	CUANTÍAS MÁXIMAS .....	124
36.1.7	CÁLCULO EN TEORÍA CLÁSICA.....	82	38.6	DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS .....	125
	36.1.7.1 SECCIÓN RECTANGULAR.....	85	38.7	PIEZAS PRETENSADAS .....	125
	36.1.7.2 SECCIÓN EN T .....	85		<b>CAPÍTULO 39. ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE ESFUERZO CORTANTE.....</b>	<b>127</b>
36.1.8	CUANTÍAS MÍNIMAS.....	86	39.1	INTRODUCCIÓN .....	127
	36.1.8.1 POR CONDICIONES DE ROTURA AGRIA.....	86	39.2	PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	127
	36.1.8.2 POR CONDICIONES DE RETRACCIÓN Y TEMPERATURA .....	91	39.2.1	DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES CORTANTES EN UNA SECCIÓN DE HORMIGÓN ARMADO.....	128
36.1.9	CUANTÍA MÁXIMA .....	92	39.2.1.1	SECCIÓN NO FISURADA CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	128
36.2	FLEXIÓN SIMPLE EN PIEZAS PRETENSADAS .....	92	39.2.1.2	SECCIÓN FISURADA CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	133
36.2.1	CÁLCULO A FLEXIÓN EN ESTADO LÍMITE ÚLTIMO .....	92	39.2.1.3	SECCIÓN FISURADA CON RELACIÓN NO LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	136
36.2.2	CUANTÍA MÁXIMA EN FLEXIÓN .....	97	39.2.2	FORMAS DE RESISTENCIA DE LA PIEZA A ESFUERZO CORTANTE.....	139
36.2.3	CUANTÍA MÍNIMA EN FLEXIÓN.....	97	39.2.2.1	EFFECTO VIGA .....	140
	<b>CAPÍTULO 37. COMPRESIÓN Y FLEXIÓN COMPUESTAS.....</b>	<b>105</b>	39.2.2.2	EFFECTO ARCO .....	140
37.1	INTRODUCCIÓN.....	105	39.2.3	VARIACIONES DE TENSIÓN DE LAS ARMADURAS LONGITUDINALES Y DE LA FUERZA DE COMPRESIÓN EN EL HORMIGÓN DEBIDAS A LA FISURACIÓN POR ESFUERZO CORTANTE.....	145
37.2	PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	106	39.2.3.1	MÉTODO DE ASIMILACIÓN A LA CELOSÍA .....	145
37.2.1	ECUACIONES GENERALES PARA SECCIÓN DE FORMA CUALQUIERA.....	106	39.2.3.2	MÉTODO DE ANÁLISIS DIRECTO .....	148
37.2.2	SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA SIMÉTRICA.....	108	39.2.4	REGLA DE COSIDO.....	159
	37.2.2.1 FLEXIÓN COMPUESTA.....	108	39.2.5	RESISTENCIA A ESFUERZO CORTANTE DE ELEMENTOS LINEALES.....	162
	37.2.2.2 COMPRESIÓN COMPUESTA.....	110	39.2.5.1	CONDICIONES DE COMPROBACIÓN.....	169
	37.2.2.3 GRÁFICOS PARA DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN.....	111	39.2.6	CÁLCULO A ESFUERZO CORTANTE DE PIEZAS SIN ARMADURA DE CORTE .....	175
37.2.3	SECCIÓN RECTANGULAR CON DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE ARMADURAS.....	112	39.2.7	ESFUERZO CORTANTE EN PIEZAS DE CANTO VARIABLE.....	176
37.2.4	ÁBACOS PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN RECTANGULAR CON ARMADURA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN EL CANTO.....	113	39.2.8	ESTADO DE CORTE-FRICCIÓN .....	177
37.2.5	ÁBACOS PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN RECTANGULAR CON DIVERSAS DISTRIBUCIONES PERIMETRALES DE ARMADURAS.....	113	39.2.9	ESFUERZO CORTANTE EN LAS ALAS DE SECCIONES EN T.....	180
37.2.6	ÁBACOS PARA EL CÁLCULO DE LA SECCIÓN CIRCULAR.....	113	39.2.10	CARGAS PRÓXIMAS A LOS APOYOS.....	186
37.2.7	EXCENTRICIDAD MÍNIMA.....	114	39.2.11	CARGAS SUSPENDIDAS .....	188
37.2.8	CUANTÍA MÍNIMA.....	114	39.2.12	VIGAS COLGADAS .....	189
37.2.9	CUANTÍA MÁXIMA.....	115	39.2.13	ESFUERZO CORTANTE EN PIEZAS COMPUESTAS.....	190
37.2.10	DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS VARIAS.....	115	39.2.14	CUANTÍAS LÍMITES .....	182
37.3	PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO.....	115	39.2.15	DISPOSICIONES RELATIVAS A LA ARMADURA DE ESFUERZO CORTANTE .....	193
	<b>CAPÍTULO 38. FLEXIÓN ESVIADA. FLEXIÓN Y COMPRESIÓN COMPUESTAS ESVIADAS.....</b>	<b>117</b>	39.2.16	TEORÍAS DE ESFUERZO CORTANTE BASADAS EN LOS CAMPOS DE PLASTICIDAD DE TENSIONES.....	197
38.1	INTRODUCCIÓN.....	117	39.3	PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO.....	200
38.2	FLEXIÓN ESVIADA EN PIEZAS ARMADAS.....	118	39.3.1	ESFUERZO CORTANTE EFECTIVO.....	200
38.2.1	PLANTEAMIENTO GENERAL .....	118	39.3.2	FISURACIÓN DE LA PIEZA POR TRACCIÓN DIAGONAL DEL HORMIGÓN.....	201
38.2.2	ÁBACOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE SECCIONES RECTANGULARES.....	119	39.3.3	RESISTENCIA A ESFUERZO CORTANTE DE ELEMENTOS LINEALES.....	204
38.3	FLEXIÓN Y COMPRESIÓN COMPUESTA ESVIADAS EN PIEZAS ARMADAS.....	120	39.3.4	CONDICIONES DE COMPROBACIÓN.....	206
38.3.1	PLANTEAMIENTO GENERAL .....	120	39.3.4.1	CÁLCULO A ESFUERZO CORTANTE DE PIEZAS LINEALES PRETENSADAS SEGÚN EHE.....	207
38.3.2	ÁBACOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO Y COMPROBACIÓN DE SECCIONES RECTANGULARES ARMADAS.....	121			
38.3.3	MÉTODO SIMPLIFICADO DE LA INSTRUCCIÓN EHE PARA PIEZAS ARMADAS.....	121			
38.4	CUANTÍAS MÍNIMAS.....	124			

39.3.4.2	CÁLCULO DE ESFUERZO CORTANTE DE PIEZAS LINEALES PRETENSADAS SEGÚN EL EUROCÓDIGO EC-2.....	207
<b>CAPÍTULO 40. ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE ESFUERZO RASANTE</b>		
40.1	GENERALIDADES.....	211
40.2	CÁLCULO DE LA TENSIÓN RASANTE EN UNA SECCIÓN SOMETIDA A FLEXIÓN SIMPLE.....	212
40.2.1	SECCIONES NO FISURADAS CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	212
40.2.2	SECCIONES FISURADAS CON RELACIÓN LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	215
40.2.3	SECCIÓN FISURADA CON RELACIÓN NO LINEAL ENTRE TENSIONES Y DEFORMACIONES.....	217
40.3	CÁLCULO DE TENSIONES RASANTES EN PIEZAS SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE.....	219
40.3.1	TIPO DE UNIÓN.....	219
40.3.2	CÁLCULO DE LAS TENSIONES RASANTES.....	221
40.4	MÉTODO PARA EL DIMENSIONAMIENTO DE PIEZAS A ESFUERZO RASANTE.....	226
40.4.1	CÁLCULO DE LA TENSIÓN RASANTE.....	226
40.4.2	COMPROBACIÓN DE LA TENSIÓN RASANTE.....	229
40.5	CONSIDERACIONES ADICIONALES SOBRE LA TENSIÓN RASANTE.....	234
<b>CAPÍTULO 41. ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE PUNZONAMIENTO</b>		
41.1	INTRODUCCIÓN.....	239
41.2	MÉTODO DEL ACI 318-95.....	240
41.2.1	SUPERFICIE CRÍTICA DE PUNZONAMIENTO.....	240
41.2.2	PUNZONAMIENTO CENTRADO.....	241
41.2.3	TRANSFERENCIA DE MOMENTOS ENTRE LOSA Y PILAR.....	242
41.2.4	PUNZONAMIENTO EN EL CASO GENERAL.....	243
41.2.5	CASO DE PUNZONAMIENTO EN PLACAS PRETENSADAS.....	257
41.2.6	EMPLEO DE CAPITELES METÁLICOS PARA RESISTIR EL PUNZONAMIENTO.....	257
41.3	MÉTODO DE EHE.....	261
41.3.1	PLACAS SIN ARMADURA DE PUNZONAMIENTO.....	261
41.3.2	PLACAS CON ARMADURAS DE PUNZONAMIENTO.....	262
41.3.3	ZONAS EXTERIORES A LA ARMADURA DE PUNZONAMIENTO.....	264
41.3.4	MÁXIMA COMPRESIÓN EN BIELAS.....	265
41.4	MÉTODO DEL MODEL CODE 90.....	265
41.5	PUNZONAMIENTO EN PLACAS PRETENSADAS SEGÚN EL EUROCÓDIGO EC-2.....	269
41.6	DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS.....	270
41.7	SISTEMAS INDUSTRIALIZADOS DE ARMADURAS DE PUNZONAMIENTO.....	270
<b>CAPÍTULO 42. ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE TORSIÓN</b>		
42.1	INTRODUCCIÓN.....	273
42.2	TORSIÓN EN RÉGIMEN LINEAL.....	275
42.3	RIGIDEZ A TORSIÓN.....	278
42.4	DEFINICIÓN DE LA SECCIÓN HUECA EFICAZ.....	279

42.5	COMPROBACIÓN Y DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES RECTANGULARES.....	280
42.5.1	SECCIONES ARMADAS.....	280
42.5.2	SECCIONES PRETENSADAS O SECCIONES CON ARMADURA ACTIVA Y PASIVA SIMULTÁNEAMENTE.....	284
42.6	COMBINACIÓN DE TORSIÓN Y ESFUERZO CORTANTE.....	285
42.7	COMBINACIÓN DE TORSIÓN, FLEXIÓN Y ESFUERZO AXIL.....	286
42.8	EL EMPOTRAMIENTO DE LOSAS Y FORJADOS EN VIGAS DE BORDE.....	287
42.9	RECOMENDACIONES COMPLEMENTARIAS DEL ACI 318-95.....	287
42.9.1	VALOR MÍNIMO DE $M_{Tsp}$ POR DEBAJO DEL CUAL NO ES NECESARIO EL CÁLCULO A TORSIÓN EN PIEZAS SOMETIDAS A TORSIÓN SECUNDARIA.....	287
42.9.2	VALOR MÁXIMO DE $M_{Tsp}$ A CONSIDERAR EN EL CÁLCULO EN PIEZAS SOMETIDAS A TORSIÓN SECUNDARIA.....	287
42.10	VALORES DE LA RIGIDEZ A TORSIÓN A TOMAR PARA EL CÁLCULO.....	288
42.11	DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS.....	288
<b>CAPÍTULO 43. EL FENÓMENO DE LA ADHERENCIA EN EL HORMIGÓN ESTRUCTURAL</b>		
43.1	INTRODUCCIÓN.....	293
43.2	EL MECANISMO DE LA ADHERENCIA.....	294
43.2.1	DISTINTAS FORMAS DE LA ADHERENCIA.....	294
43.2.2	VARIABLES QUE AFECTAN A LA ADHERENCIA.....	296
43.2.3	ASPECTOS PARTICULARES DE LA ADHERENCIA EN LAS BARRAS Y ALAMBRES CORRUGADOS.....	296
43.2.4	POSICIÓN DE LAS BARRAS DURANTE EL HORMIGONADO. POSICIÓN DE ADHERENCIA.....	297
43.3	MÉTODOS PARA LA MEDIDA DE LA ADHERENCIA.....	299
43.4	LOS REQUISITOS DE ADHERENCIA.....	301
43.5	CÁLCULO DE LAS TENSIONES DE ADHERENCIA.....	302
43.5.1	ADHERENCIA POR TRACCIÓN.....	302
43.5.2	ADHERENCIA POR CORTANTE.....	303
43.5.2.1	PIEZAS DE CANTO CONSTANTE.....	303
43.5.2.2	PIEZAS DE CANTO VARIABLE.....	305
43.6	ADHERENCIA DE GRUPOS DE BARRAS.....	307
<b>CAPÍTULO 44. ANCLAJE Y EMPALME DE ARMADURAS</b>		
44.1	ANCLAJE. CONCEPTOS BÁSICOS.....	311
44.2	LONGITUD BÁSICA DE ANCLAJE EN TRACCIÓN.....	315
44.3	LONGITUD NETA DE ANCLAJE POR BARRAS EN TRACCIÓN.....	316
44.4	ANCLAJE DE LA ARMADURA DE MOMENTOS NEGATIVOS.....	322
44.5	ANCLAJE DE LA ARMADURA DE MOMENTOS POSITIVOS EN VIGAS.....	326
44.6	ANCLAJE DE LA ARMADURA TRANSVERSAL.....	330
44.7	ANCLAJE DE ARMADURAS EN TRACCIÓN DE PILARES.....	331
44.8	LONGITUD BÁSICA DE ANCLAJE DE BARRAS COMPRIMIDAS.....	331
44.9	LONGITUD NETA DE ANCLAJE DE BARRAS COMPRIMIDAS. FACTORES DE CORRECCIÓN.....	331
44.10	ANCLAJE DE ARMADURAS COMPRIMIDAS EN PILARES.....	332
44.11	ANCLAJE DE ARMADURAS DE ESPERA EN LOS CIMIENTOS.....	334

44.12	REQUISITOS ESPECIALES DE ANCLAJE PARA LOS GRUPOS DE BARRAS .....	335
44.13	ANCLAJE DE MALLAS ELECTROSOLDADAS DE ALAMBRE CORRUGADO .....	336
44.14	REGLAS DE ANCLAJE DEL MODEL CODE 90 .....	336
44.14.1	REGLAS PARA BARRAS Y ALAMBRES .....	336
44.14.2	REGLAS PARA MALLAS CON ALAMBRES O BARRAS CORRUGADAS .....	341
44.14.3	REGLAS DE ANCLAJE MECÁNICO MEDIANTE SOLDADURA EN PERFILES METÁLICOS .....	341
44.15	ANCLAJES MECÁNICOS .....	342
44.15.1	REGLAS DE ANCLAJE CON BARRAS TRANSVERSALES SOLDADAS .....	343
44.16	EMPALMES. CONCEPTOS BÁSICOS .....	350
44.17	EMPALMES POR SOLAPO DE BARRAS CORRUGADAS .....	350
44.18	REQUISITOS ESPECIALES DE EMPALMES POR SOLAPO PARA LOS GRUPOS DE BARRAS .....	356
44.19	EMPALME POR SOLAPO DE MALLAS ELECTROSOLDADAS .....	357
44.20	EMPALMES POR SOLAPO DE BARRAS CORRUGADAS DE ACUERDO CON EL MODEL CODE 90 .....	359
44.21	EMPALMES MECÁNICOS. EMPALMES POR SOLDADURA .....	361
<b>CAPÍTULO 45. PANDEO DE PILARES. INESTABILIDAD LATERAL DE VIGAS .....</b>		<b>367</b>
45.1	PANDEO. INTRODUCCIÓN .....	367
45.2	MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE .....	375
45.2.1	ESTRUCTURAS TRASLACIONALES .....	376
45.2.2	ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES .....	376
45.2.2.1	MÉTODO APROXIMADO. FLEXIÓN COMPUESTA RECTA .....	376
45.2.2.2	MÉTODO APROXIMADO. FLEXIÓN COMPUESTA ESVIADA .....	378
45.3	MÉTODO DE LA NORMA ACI 318-95 .....	379
45.4	MÉTODO DE LA COLUMNA MODELO DEL CEB .....	386
45.5	CASO DE EXISTENCIA DE TORSIONES ADEMÁS DE TRASLACIONES .....	386
45.6	CASO DE PANDEO EN SENTIDO PERPENDICULAR AL PLANO MEDIO DEL ENTRAMADO .....	386
45.7	INESTABILIDAD LATERAL DE VIGAS .....	386
<b>CAPÍTULO 46. ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE FATIGA .....</b>		<b>389</b>
46.1	INTRODUCCIÓN .....	389
46.2	PROPIEDADES DE LOS MATERIALES .....	390
46.2.1	HORMIGÓN .....	390
46.2.2	ACERO .....	390
46.3	MÉTODO DE CÁLCULO A FATIGA DE EHE .....	391
46.4	MÉTODO DE CÁLCULO A FATIGA DEL MODEL CODE 90 .....	392
46.4.1	MÉTODO SIMPLIFICADO .....	392
46.4.2	MÉTODO MEDIANTE UN NIVEL ÚNICO DE CARGA .....	394
<b>CAPÍTULO 47. ESTADO LÍMITE DE FISURACIÓN .....</b>		<b>399</b>
47.1	GENERALIDADES .....	399
47.2	RIESGO DE CORROSIÓN .....	399
47.3	RIESGO ESTÉTICO .....	401
47.4	RIESGO PSICOLÓGICO .....	401
47.5	ACCIONES A CONSIDERAR EN LAS COMPROBACIONES DE FISURACIÓN .....	402

47.6	MÉTODO DE EHE .....	403
47.6.1	PLANTEAMIENTO GENERAL .....	403
47.6.2	MÉTODO DEL EUROCÓDIGO EC-2 .....	409
47.7	ARMADURA DE PIEL .....	410
47.8	FISURACIÓN DEBIDA A DEFORMACIONES COARTADAS. CUANTÍA MÍNIMA A EMPLEAR .....	411
47.9	FISURACIÓN DEBIDA AL ESFUERZO CORTANTE .....	412
47.10	LIMITACIÓN DE LA FISURACIÓN POR TORSIÓN .....	414
<b>CAPÍTULO 48. DEFORMACIONES .....</b>		<b>415</b>
48.1	INTRODUCCIÓN .....	415
48.2	ANÁLISIS DE ALGUNOS ASPECTOS RELACIONADOS CON LA DEFORMABILIDAD EXCESIVA DE LAS ESTRUCTURAS .....	416
48.3	CONSIDERACIONES PREVIAS SOBRE EL CÁLCULO Y LIMITACIÓN DE LAS FLECHAS .....	417
48.4	DEFORMACIONES DEL HORMIGÓN .....	418
48.4.1	CARACTERÍSTICAS DE DEFOMABILIDAD .....	418
48.4.2	RELACIONES DE DEFORMACIONES, CURVATURAS Y FLECHAS .....	418
48.5	VALOR DEL MOMENTO DE INERCIA .....	419
48.6	MÉTODO DE LA INSTRUCCIÓN EHE PARA PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	422
48.6.1	CORRECCIONES ADICIONALES AL MÉTODO DE EHE EN FUNCIÓN DE LA HUMEDAD AMBIENTE Y DEL ESPESOR MEDIO DE LA PIEZA .....	426
48.7	CLASES DE FLECHAS A CONSIDERAR .....	428
48.8	INFLUENCIA DEL LÍMITE ELÁSTICO DEL ACERO EMPLEADO .....	431
48.9	CÁLCULO DE LA FLECHA DEBIDA A LA RETRACCIÓN .....	432
48.10	MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE FLECHAS TOTALES DEL MODEL CODE .....	434
48.11	MÉTODO PARA EL CÁLCULO DE FLECHAS DEL EUROCÓDIGO EC-2 .....	436
48.12	DEFORMACIONES EN PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO .....	437
48.13	CÁLCULO DE LA CONTRAFLECHA EN SECCIONES PRETENSADAS .....	440
48.14	FÓRMULAS PARA EL CÁLCULO DE FLECHAS .....	443
48.14.1	FÓRMULAS EXACTAS .....	443
48.14.2	FÓRMULAS APROXIMADAS DEL ACI .....	445
48.14.3	LIMITACIÓN DE FLECHAS .....	446
48.14.4	ESPECIFICACIONES DEL ACI 318-95 .....	447
48.14.5	ESPECIFICACIONES DE LA NORMA FRANCESA BAEL-83 .....	448
48.15	COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS EXPUESTOS .....	469
<b>CAPÍTULO 49. PIEZAS COMPUESTAS .....</b>		<b>473</b>
49.1	INTRODUCCIÓN .....	473
49.2	PIEZAS DE HORMIGÓN ARMADO .....	473
49.2.1	FLEXIÓN SIMPLE .....	473
49.2.1.1	CÁLCULO A FLEXIÓN. MOMENTOS POSITIVOS .....	473
49.2.1.2	CÁLCULO A FLEXIÓN. MOMENTOS NEGATIVOS .....	474
49.2.2	ESFUERZO CORTANTE .....	475
49.2.3	ESFUERZO RASANTE .....	475
49.2.4	DEFORMACIONES .....	475
49.3	PIEZAS DE HORMIGÓN PRETENSADO .....	475
49.4	EFFECTOS DE LA RETRACCIÓN Y LA FLUENCIA EN PIEZAS COMPUESTAS .....	476
49.4.1	PIEZAS SIMPLEMENTE APOYADAS .....	476

49.4.2	PIEZAS CONTINUAS .....	483
49.4.3	FLUENCIA EN PIEZAS PRETENSADAS CONTINUAS .....	483
49.5	CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN PIEZAS COMPUESTAS DE PIEZAS PREFABRICADAS PRETENSADAS ASOCIADAS CON HORMIGÓN "IN SITU" .....	484
<b>CAPÍTULO 50. ELEMENTOS AUXILIARES DE LAS CONSTRUCCIONES DE HORMIGÓN. ELEMENTOS DE ATADO. SEPARADORES. MANGUITOS DE EMPALME. BANDAS DE ESTANQUIDAD. PERNOS DE ANCLAJE. ELEMENTOS DE SUSPENSIÓN. "INSERTS" DIVERSOS .....</b>		
50.1	ATADO DE BARRAS .....	487
50.2	SEPARADORES Y CALZOS .....	489
50.2.1	TIPOS .....	489
50.2.2	REPRESENTACIÓN GRÁFICA .....	493
50.2.3	REGLAS DE COLOCACIÓN .....	494
50.3	SOLDADURA DE BARRAS .....	498
50.3.1	TIPOS DE UNIONES .....	498
50.3.2	DETALLES DE UNIONES .....	498
50.4	MANGUITOS DE EMPALME .....	500
50.5	BANDAS DE ESTANQUIDAD .....	504
50.6	PERNOS DE ANCLAJE .....	504
50.7	ELEMENTOS DE SUSPENSIÓN .....	505
50.8	"INSERTS" DIVERSOS .....	506
<b>CAPÍTULO 51. DETALLES CONSTRUCTIVOS VARIOS .....</b>		
51.1	INTRODUCCIÓN .....	509
51.2	RADIOS DE DOBLADO DE LAS ARMADURAS .....	509
51.3	GANCHOS, PATILLAS Y ANCLAJES ESTÁNDAR .....	510
51.4	RECUBRIMIENTOS .....	511
51.5	SEPARACIÓN ENTRE ARMADURAS .....	511
51.6	RECUBRIMIENTOS SEGÚN EL MODEL CODE 90 .....	511
51.7	RECUBRIMIENTOS SEGÚN EL EUROCÓDIGO EC-2 .....	513
51.8	ARMADURA DE ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS .....	514
51.9	ARMADURA DE PIEL EN VIGAS .....	515
51.10	COLOCACIÓN DE ARMADURAS EN PILARES .....	515
51.11	COLOCACIÓN DE ARMADURAS EN VIGAS .....	516
51.12	CUANTÍAS GEOMÉTRICAS MÍNIMAS .....	518
51.13	GRUPOS DE BARRAS .....	519
51.13.1	GRUPOS DE BARRAS FRENTE A BARRAS DE GRAN DIÁMETRO .....	519
51.13.2	GRUPOS DE POSIBLE EMPLEO .....	520
51.13.3	DIÁMETROS EQUIVALENTES, ÁREAS Y CAPACIDADES MECÁNICAS .....	520
51.13.4	LA COLOCACIÓN DE GRUPOS EN LA SECCIÓN TRANSVERSAL .....	521
51.13.4.1	DISTANCIAS ENTRE GRUPOS O ENTRE GRUPOS Y BARRAS .....	521
51.13.4.2	RECUBRIMIENTOS .....	521
51.13.5	ARMADURA DE PIEL .....	522
51.13.6	ESQUEMAS TÍPICOS DE DISPOSICIÓN DE GRUPOS .....	522
51.13.6.1	VIGAS .....	522
51.13.6.2	PILARES .....	523

51.13.7	ANCLAJE DE GRUPOS .....	524
51.13.8	COMPROBACIÓN DE ADHERENCIA .....	524
51.13.9	SOLAPE DE LOS GRUPOS .....	524
51.14	REPRESENTACIÓN DE ARMADURAS .....	524
51.15	FORMAS DE ACOTAR LA FERRALLA .....	524
51.16	FORMAS PREFERENCIALES DE ARMADO .....	525
51.17	MANUALES DE ARMADURAS .....	526
<b>CAPÍTULO 52. FORJADOS UNIDIRECCIONALES .....</b>		
52.1	INTRODUCCIÓN .....	529
52.2	TIPOLOGÍA .....	530
52.3	FORJADOS DE LOSA MACIZA .....	533
52.3.1	CÁLCULO DE ESFUERZOS .....	533
52.3.2	DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN .....	533
52.3.3	DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE .....	533
52.3.4	ANCLAJE .....	533
52.3.5	FISURACIÓN .....	537
52.3.6	DEFORMACIONES .....	537
52.3.7	ESQUEMAS TÍPICOS DE ARMADO .....	537
52.3.8	ESQUEMA ESTÁNDAR DE ARMADO .....	539
52.3.9	REFUERZOS DE BORDE .....	539
52.4	FORJADOS NERVADOS .....	540
52.4.1	SECCIÓN TRANSVERSAL .....	540
52.4.2	CÁLCULO DE ESFUERZOS .....	540
52.4.3	DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN .....	541
52.4.4	ARMADURA DE LA LOSA SUPERIOR .....	542
52.4.5	DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE .....	543
52.4.6	ANCLAJE .....	544
52.4.7	FISURACIÓN .....	544
52.4.8	DEFORMACIONES .....	544
52.4.9	ESQUEMAS TÍPICOS DE ARMADO .....	544
52.4.10	ESQUEMA ESTÁNDAR DE ARMADO .....	544
52.4.11	REFUERZOS DE BORDE .....	544
52.5	FORJADOS DE VIGUETAS SEMIRRESISTENTES .....	544
52.5.1	SECCIÓN TRANSVERSAL .....	545
52.5.2	CÁLCULO DE ESFUERZOS .....	545
52.5.3	DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN .....	545
52.5.4	ARMADURA DE LA LOSA SUPERIOR .....	546
52.5.5	DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE .....	546
52.5.6	DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO RASANTE .....	547
52.5.7	ANCLAJE .....	547
52.5.8	FISURACIÓN .....	548
52.5.9	DEFORMACIONES .....	548
52.5.10	ESQUEMAS TÍPICOS DE ARMADO .....	548
52.5.11	ESQUEMA ESTÁNDAR DE ARMADO .....	548
52.5.12	REFUERZOS DE BORDE .....	548
52.6	AUTORIZACIÓN DE USO .....	548
52.7	ESFUERZOS DURANTE LA CONSTRUCCIÓN .....	549

<b>CAPÍTULO 53. PIEZAS PRETENSADAS HIPERESTÁTICAS</b> .....	551
53.1 PIEZAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN PRETENSADO .....	551
53.1.1 MOMENTOS HIPERESTÁTICOS .....	552
53.1.2 LÍNEA DE PRESIONES .....	553
53.1.3 CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS TOTALES .....	555
53.1.4 TRANSFORMACIONES LINEALES DE LA LÍNEA DE PRESIONES EN PIEZAS HIPERESTÁTICAS. TEOREMA DE GUYON .....	557
53.1.5 CARGAS EQUIVALENTES .....	557
53.1.6 MÉTODO DEL EQUILIBRIO DE CARGAS .....	559
<b>CAPÍTULO 54. FORJADOS SIN VIGAS. SOLUCIONES EN HORMIGÓN ARMADO</b> .....	561
54.1 INTRODUCCIÓN .....	561
54.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS .....	561
54.3 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN .....	562
54.4 DIMENSIONAMIENTO A PUNZONAMIENTO .....	564
54.5 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE .....	564
54.6 DIMENSIONAMIENTO A TORSIÓN .....	564
54.7 ANCLAJE .....	564
54.8 FISURACIÓN .....	564
54.9 DEFORMACIONES .....	564
<b>CAPÍTULO 55. FORJADOS SIN VIGAS. SOLUCIONES EN HORMIGÓN PRETENSADO</b> .....	565
55.1 INTRODUCCIÓN .....	565
55.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS .....	567
55.2.1 MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO DE FORJADOS SIN VIGAS .....	567
55.2.2 VIGAS Y LOSAS EN DIRECCIONES ORTOGONALES. MÉTODO DE LAS BANDAS DEL ACI-ASCE JOINT COMMITTEE 423 .....	567
55.2.3 MÉTODO BIDIRECCIONAL DE LAS CARGAS EQUILIBRADAS .....	568
55.3 RECOMENDACIONES GENERALES DE PROYECTO .....	569
55.3.1 CANTOS MÍNIMOS DE PLACA .....	570
55.3.2 RECUBRIMIENTOS .....	571
55.3.3 NIVEL MEDIO DE PRETENSADO .....	572
55.3.4 COEFICIENTES DE SEGURIDAD .....	572
55.3.5 TENSIÓN ÚLTIMA DE LAS ARMADURAS ACTIVAS .....	572
55.3.6 CUANTÍA MÍNIMA DE ARMADURA PASIVA .....	573
55.4 DISPOSICIÓN DE TENDONES .....	573
55.4.1 TRAZADO DE TENDONES .....	573
55.4.2 DISTRIBUCIÓN GENERAL DE LOS TENDONES .....	575
55.4.3 SEPARACIÓN DE TENDONES .....	576
55.5 DETALLES Y ASPECTOS CONSTRUCTIVOS .....	577
55.5.1 REFUERZOS DE BORDE DE PLACA .....	577
55.5.2 COLOCACIÓN DE TENDONES EN PLACAS NERVADAS .....	578
55.5.3 ABERTURAS EN LA PLACA .....	578
55.5.4 MÁXIMA LONGITUD ENTRE JUNTAS DE TRABAJO .....	579
55.5.5 JUNTAS .....	579
55.5.6 SEPARADORES Y CALZOS .....	579
55.5.7 CIMBRADO DE PLANTAS CONSECUTIVAS .....	580
55.5.8 ORDEN DE TESADO .....	580
55.5.9 TOLERANCIAS .....	580

<b>CAPÍTULO 56. PLACAS</b> .....	583
56.1 GENERALIDADES .....	583
56.2 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN .....	583
56.3 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE .....	585
56.4 ANCLAJE .....	585
56.5 FISURACIÓN .....	585
56.6 DEFORMACIONES .....	585
56.7 MÉTODO DE JOHANSEN .....	585
56.8 OBSERVACIONES PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE JOHANSEN .....	595
<b>CAPÍTULO 57. ZONAS DE ANCLAJE DE LOS TENDONES DE PRETENSADO</b> .....	601
57.1 INTRODUCCIÓN .....	601
57.2 ARMADURAS PRETESAS .....	601
57.2.1 TENSIONES DE ESTALLIDO .....	603
57.2.2 TENSIONES DE EXFOLIACIÓN .....	605
57.2.3 TENSIONES DE HENDIMIENTO .....	607
57.2.4 RECOMENDACIONES .....	608
57.3 ARMADURAS POSTESAS .....	608
57.4 TENSIONES DE CORTE EN LAS ALAS DE PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS PRETESAS .....	611
57.5 MACIZADOS EN ZONAS DE ANCLAJE .....	612
57.6 ANCLAJES INTERMEDIOS DE ARMADURAS POSTESAS .....	612
<b>CAPÍTULO 58. DINTELES Y VOLADIZOS</b> .....	615
58.1 INTRODUCCIÓN .....	615
58.2 DIMENSIONAMIENTO .....	618
58.3 ESQUEMA DE ARMADO .....	618
58.3.1 DINTELES DE VARIOS VANOS .....	618
58.3.2 DINTELES DE UN SOLO VANO .....	621
58.3.3 BROCHALES .....	621
58.3.4 VOLADIZOS .....	621
58.3.5 DINTELES QUEBRADOS .....	623
58.3.6 NUDOS .....	625
58.3.7 SECCIONES .....	625
<b>CAPÍTULO 59. VIGAS PLANAS, VIGAS PARED</b> .....	627
59.1 VIGAS PLANAS. INTRODUCCIÓN .....	627
59.2 DIMENSIONAMIENTO .....	629
59.3 VIGAS PARED .....	633
<b>CAPÍTULO 60. TIRANTES. MÉNSULAS CORTAS. MACIZOS DE APOYO.</b> .....	639
60.1 TIRANTES .....	639
60.2 MÉNSULAS CORTAS .....	640
60.2.1 MÉTODO DE CÁLCULO DE EHE .....	642
60.2.2 MÉTODO DEL ACI .....	644
60.3 MACIZOS DE APOYO .....	651
<b>CAPÍTULO 61. PILARES. MUROS PORTANTES</b> .....	659
61.1 PILARES .....	659

<b>CAPÍTULO 53. PIEZAS PRETENSADAS HIPERESTÁTICAS</b> .....	551
53.1 PIEZAS HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN PRETENSADO.....	551
53.1.1 MOMENTOS HIPERESTÁTICOS.....	552
53.1.2 LÍNEA DE PRESIONES.....	553
53.1.3 CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS TOTALES.....	555
53.1.4 TRANSFORMACIONES LINEALES DE LA LÍNEA DE PRESIONES EN PIEZAS HIPERESTÁTICAS. TEOREMA DE GUYON.....	557
53.1.5 CARGAS EQUIVALENTES.....	557
53.1.6 MÉTODO DEL EQUILIBRIO DE CARGAS.....	559
<b>CAPÍTULO 54. FORJADOS SIN VIGAS. SOLUCIONES EN HORMIGÓN ARMADO</b> ..	561
54.1 INTRODUCCIÓN.....	561
54.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS.....	561
54.3 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN.....	562
54.4 DIMENSIONAMIENTO A PUNZONAMIENTO.....	564
54.5 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE.....	564
54.6 DIMENSIONAMIENTO A TORSIÓN.....	564
54.7 ANCLAJE.....	564
54.8 FISURACIÓN.....	564
54.9 DEFORMACIONES.....	564
<b>CAPÍTULO 55. FORJADOS SIN VIGAS. SOLUCIONES EN HORMIGÓN PRETENSADO</b> .....	565
55.1 INTRODUCCIÓN.....	565
55.2 CÁLCULO DE ESFUERZOS.....	567
55.2.1 MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO DE FORJADOS SIN VIGAS.....	567
55.2.2 VIGAS Y LOSAS EN DIRECCIONES ORTOGONALES. MÉTODO DE LAS BANDAS DEL ACI-ASCE JOINT COMMITTEE 423.....	567
55.2.3 MÉTODO BIDIRECCIONAL DE LAS CARGAS EQUILIBRADAS.....	568
55.3 RECOMENDACIONES GENERALES DE PROYECTO.....	569
55.3.1 CANTOS MÍNIMOS DE PLACA.....	570
55.3.2 RECUBRIMIENTOS.....	571
55.3.3 NIVEL MEDIO DE PRETENSADO.....	572
55.3.4 COEFICIENTES DE SEGURIDAD.....	572
55.3.5 TENSIÓN ÚLTIMA DE LAS ARMADURAS ACTIVAS.....	572
55.3.6 CUANTÍA MÍNIMA DE ARMADURA PASIVA.....	573
55.4 DISPOSICIÓN DE TENDONES.....	573
55.4.1 TRAZADO DE TENDONES.....	573
55.4.2 DISTRIBUCIÓN GENERAL DE LOS TENDONES.....	575
55.4.3 SEPARACIÓN DE TENDONES.....	576
55.5 DETALLES Y ASPECTOS CONSTRUCTIVOS.....	577
55.5.1 REFUERZOS DE BORDE DE PLACA.....	577
55.5.2 COLOCACIÓN DE TENDONES EN PLACAS NERVADAS.....	578
55.5.3 ABERTURAS EN LA PLACA.....	578
55.5.4 MÁXIMA LONGITUD ENTRE JUNTAS DE TRABAJO.....	579
55.5.5 JUNTAS.....	579
55.5.6 SEPARADORES Y CALZOS.....	579
55.5.7 CIMBRADO DE PLANTAS CONSECUTIVAS.....	580
55.5.8 ORDEN DE TESADO.....	580
55.5.9 TOLERANCIAS.....	580

<b>CAPÍTULO 56. PLACAS</b> .....	583
56.1 GENERALIDADES.....	583
56.2 DIMENSIONAMIENTO A FLEXIÓN.....	583
56.3 DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE.....	585
56.4 ANCLAJE.....	585
56.5 FISURACIÓN.....	585
56.6 DEFORMACIONES.....	585
56.7 MÉTODO DE JOHANSEN.....	585
56.8 OBSERVACIONES PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DE JOHANSEN.....	595
<b>CAPÍTULO 57. ZONAS DE ANCLAJE DE LOS TENDONES DE PRETENSADO</b> .....	601
57.1 INTRODUCCIÓN.....	601
57.2 ARMADURAS PRETESAS.....	601
57.2.1 TENSIONES DE ESTALLIDO.....	603
57.2.2 TENSIONES DE EXFOLIACIÓN.....	605
57.2.3 TENSIONES DE HENDIMIENTO.....	607
57.2.4 RECOMENDACIONES.....	608
57.3 ARMADURAS POSTESAS.....	608
57.4 TENSIONES DE CORTE EN LAS ALAS DE PIEZAS PRETENSADAS CON ARMADURAS PRETESAS.....	611
57.5 MACIZADOS EN ZONAS DE ANCLAJE.....	612
57.6 ANCLAJES INTERMEDIOS DE ARMADURAS POSTESAS.....	612
<b>CAPÍTULO 58. DINTELES Y VOLADIZOS</b> .....	615
58.1 INTRODUCCIÓN.....	615
58.2 DIMENSIONAMIENTO.....	618
58.3 ESQUEMA DE ARMADO.....	618
58.3.1 DINTELES DE VARIOS VANOS.....	618
58.3.2 DINTELES DE UN SOLO VANO.....	621
58.3.3 BROCHALES.....	621
58.3.4 VOLADIZOS.....	621
58.3.5 DINTELES QUEBRADOS.....	623
58.3.6 NUDOS.....	625
58.3.7 SECCIONES.....	625
<b>CAPÍTULO 59. VIGAS PLANAS, VIGAS PARED</b> .....	627
59.1 VIGAS PLANAS. INTRODUCCIÓN.....	627
59.2 DIMENSIONAMIENTO.....	629
59.3 VIGAS PARED.....	633
<b>CAPÍTULO 60. TIRANTES. MÉNSULAS CORTAS. MACIZOS DE APOYO.</b> .....	639
60.1 TIRANTES.....	639
60.2 MÉNSULAS CORTAS.....	640
60.2.1 MÉTODO DE CÁLCULO DE EHE.....	642
60.2.2 MÉTODO DEL ACI.....	644
60.3 MACIZOS DE APOYO.....	651
<b>CAPÍTULO 61. PILARES. MUROS PORTANTES</b> .....	659

61.1.1	NUDOS .....	659
61.1.2	ENLACE PILAR CIMIENTO .....	663
61.1.3	PILARES DE FACHADA EN ÚLTIMA PLANTA .....	663
61.1.4	CÓDIGO DE REFERENCIAS EN PLANTA DE PILARES Y VIGAS .....	664
61.1.5	CUADRO DE PILARES .....	664
61.1.6	DETALLES ESPECIALES PARA PILARES ARMADOS CON GRUPOS DE BARRAS .....	665
61.1.7	EMPLEO DE DIÁMETROS MUY GRUESOS .....	667
61.2	MUROS PORTANTES .....	667
61.2.1	DIMENSIONAMIENTO .....	667
61.2.2	ARMADURA MÍNIMA .....	667
61.2.3	MÉTODO EMPÍRICO PARA EL CÁLCULO DE MUROS (ACI 318-95) .....	669
61.2.4	DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS .....	670
61.2.5	CASO DE VIGAS PARED .....	671
<b>CAPÍTULO 62. ESCALERAS .....</b>		
62.1	INTRODUCCIÓN .....	673
62.2	TRAZADO DE LA ESCALERA .....	673
62.3	ESFUERZOS EN LOS TIROS .....	673
62.4	CÁLCULO DE ESFUERZOS EN ESCALERAS DE UN TRAMO .....	675
62.5	DIMENSIONAMIENTO Y ESQUEMAS DE ARMADO EN ESCALERAS DE UN TRAMO .....	675
62.6	DIMENSIONAMIENTO DE ESCALERAS CON CONTINUIDAD EN LOS FORJADOS DE PISO .....	678
62.7	TRAMOS CON DESCANSILLO INTERMEDIO .....	679
62.8	ESCALERAS DE DOS TRAMOS .....	679
62.9	ESCALERAS DE TRES TRAMOS .....	680
62.10	ESCALERAS CON DESCANSILLO EN VUELO .....	681
<b>CAPÍTULO 63. CIMENTACIONES SUPERFICIALES Y PROFUNDAS .....</b>		
63.1	INTRODUCCIÓN .....	687
63.2	CIMENTACIONES SUPERFICIALES Y PROFUNDAS .....	687
63.3	TIPOLOGÍA .....	688
63.4	ZAPATAS CORRIDAS .....	688
63.5	ZAPATAS RÍGIDAS Y ZAPATAS FLEXIBLES .....	689
63.6	CÁLCULO DE ZAPATAS CORRIDAS RÍGIDAS POR EL MÉTODO DE BIELAS Y TIRANTES .....	691
63.6.1	CASO DE PRESIONES SOBRE EL SUELO LINEALMENTE VARIABLES .....	691
63.6.2	CASO DE PRESIONES UNIFORMES SOBRE EL SUELO .....	692
63.7	MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO PARA ZAPATAS CORRIDAS, TANTO RÍGIDAS COMO FLEXIBLES .....	697
63.8	CASO DE ZAPATAS CORRIDAS SOMETIDAS A CARGA VERTICAL Y MOMENTO FLECTOR .....	702
63.9	ZAPATAS AISLADAS .....	704
63.10	MÉTODO GENERAL DE CÁLCULO PARA ZAPATAS SOMETIDAS A CARGA CENTRADA .....	704
63.11	ZAPATAS AISLADAS SOMETIDAS A MOMENTOS FLECTORES .....	711
63.12	RECOMENDACIONES CONSTRUCTIVAS PARA TODO TIPO DE ZAPATAS .....	714
63.13	PIEZAS DE ATADO ENTRE ZAPATAS .....	715

63.14	ZAPATAS DE MEDIANERÍA .....	720
63.15	ZAPATAS DE ESQUINA .....	729
63.16	ZAPATAS COMBINADAS .....	735
63.17	VIGAS DE CIMENTACIÓN .....	740
63.18	EMPARRILLADOS DE CIMENTACIÓN .....	742
63.19	PLACAS DE CIMENTACIÓN .....	743
63.20	ZAPATAS DE HORMIGÓN EN MASA .....	744
63.21	CIMENTACIONES DE HORMIGÓN PRETENSADO .....	744
63.22	PILOTES .....	744
63.23	ENCEPADOS .....	745
63.23.1	ENCEPADOS DE UN SOLO PILOTE .....	745
63.23.2	ENCEPADOS DE DOS PILOTES .....	745
63.23.3	ENCEPADOS DE TRES PILOTES .....	746
63.23.4	ENCEPADOS DE CUATRO PILOTES .....	747
63.23.5	ENCEPADOS DE SERIES GRANDES DE PILOTES .....	748
63.24	VIGAS CENTRADORAS .....	749
63.25	RECOMENDACIONES CONSTRUCTIVAS PARA PIEZAS DE ATADO Y VIGAS CENTRADORAS .....	751
<b>CAPÍTULO 64. MUROS DE CONTENCIÓN .....</b>		
64.1	INTRODUCCIÓN .....	753
64.2	FUNCIONAMIENTO .....	755
64.3	CÁLCULO DEL EMPUJE .....	756
64.4	COMPROBACIÓN EN SERVICIO Y COMPROBACIÓN BAJO EMPUJE MAYORADO .....	759
64.5	PREDIMENSIONAMIENTO .....	760
64.6	DIMENSIONAMIENTO .....	772
64.6.1	VERIFICACIÓN DEL PREDIMENSIONAMIENTO .....	772
64.6.2	DIMENSIONAMIENTO DE LA ESTRUCTURA .....	775
64.7	DETALLES CONSTRUCTIVOS .....	775
<b>CAPÍTULO 65. MUROS DE SÓTANO .....</b>		
65.1	INTRODUCCIÓN .....	781
65.2	CÁLCULO DEL EMPUJE .....	781
65.3	ESQUEMA DE FUNCIONAMIENTO .....	782
65.4	CÁLCULO DE MURO EN SENTIDO TRANSVERSAL .....	785
65.4.1	CASO DE UN SOLO SÓTANO .....	785
65.4.2	CASO DE DOS SÓTANOS .....	790
65.5	CÁLCULO DEL MURO COMO VIGA DE CIMENTACIÓN .....	790
65.6	DIMENSIONAMIENTO DEL MURO .....	793
65.7	OBSERVACIONES GENERALES .....	794
65.8	TRACCIONES HORIZONTALES PRODUCIDAS EN EL MURO POR LA CARGA CONCENTRADA DE LOS PILARES .....	796
65.9	EFFECTO DE ESQUINA EN MUROS DE SÓTANO .....	797
65.10	ESQUEMA DE ARMADO .....	798
<b>CAPÍTULO 66. PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LOS EDIFICIOS DE GRAN ALTURA .....</b>		
66.1	CONSIDERACIONES GENERALES .....	799

66.2	ACCIONES .....	802
66.3	EL PROBLEMA DE LA DEFORMABILIDAD .....	802
66.4	VIBRACIONES .....	803
66.5	LOS TIPOS ESTRUCTURALES .....	803
66.6	OTROS ASPECTOS ESTRUCTURALES .....	805
<b>CAPÍTULO 67. PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE LAS ESTRUCTURAS SITUADAS EN ZONAS SÍSMICAS</b>		
67.1	INTRODUCCIÓN .....	809
67.2	DUCTILIDAD .....	812
67.3	CONFIGURACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN .....	812
67.4	MATERIALES .....	813
67.5	DETALLES CONSTRUCTIVOS .....	813
67.5.1	CIMENTACIONES .....	813
67.5.2	MUROS DE CONTENCIÓN .....	813
67.5.3	PIEZAS EN FLEXIÓN SIMPLE O FLEXIÓN COMPUESTA CON FLEXIÓN DOMINANTE .....	813
67.5.4	PIEZAS EN COMPRESIÓN O FLEXIÓN COMPUESTA .....	816
67.5.5	MUDOS .....	819
67.5.6	MUROS Y PANTALLAS .....	820
67.5.7	REGLAS ADICIONALES DE ANCLAJE Y SOLAPE DE ARMADURAS .....	821
67.5.8	FORJADO .....	822
67.5.8.1	ACCIÓN DIAFRAGMA DE LOS FORJADOS .....	822
67.5.8.2	REGLAS ESPECIALES PARA CÁLCULO A ESFUERZO RASANTE .....	822
67.5.9	REGLAS ESPECIALES PARA MANGUITOS DE EMPALME .....	823
67.5.10	SOLDADURA DE ATADO DE ESTRIBOS .....	823
<b>CAPÍTULO 68. APLICACIONES VARIAS DEL HORMIGÓN PRETENSADO</b>		
68.1	INTRODUCCIÓN .....	827
68.2	LAS APLICACIONES .....	827
68.2.1	PILOTES .....	827
68.2.2	CIMENTACIONES SUPERFICIALES .....	829
68.2.3	PAVIMENTOS .....	829
68.2.4	POSTES .....	829
68.2.5	MUROS DE CONTENCIÓN .....	830
68.2.6	ACEQUIAS .....	831
68.2.7	PIEZAS PARA FORJADOS .....	831
68.2.8	NAVES .....	832
68.2.9	EDIFICIOS COLGADOS .....	832
68.2.10	CUBIERTAS DE GRANDES LUCES .....	832
68.2.11	PLACAS POSTESADAS .....	833
68.2.12	TRIBUNAS .....	833
68.2.13	TRAVIESAS PREFABRICADAS DE FERROCARRIL .....	834
68.2.14	TÚNELES .....	834
68.2.15	PUENTES .....	835
68.2.16	DEPÓSITOS PARA LÍQUIDOS .....	840
68.2.17	TORRES .....	842
68.2.18	APLICACIONES A PROBLEMAS DE PATOLOGÍA, RECALCES Y REFUERZOS .....	843
68.2.19	SOLUCIONES ESPECIALES .....	844

<b>CAPÍTULO 69. ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN EN MASA</b>		847
69.1	INTRODUCCIÓN .....	847
69.2	ACCIONES DE CÁLCULO .....	850
69.3	PIEZAS EN COMPRESIÓN SIMPLE Y COMPUESTA .....	850
69.4	CASO DE COMPRESIÓN SIMPLE O COMPUESTA COMBINADA CON ESFUERZO CORTANTE .....	851
69.5	COMPROBACIÓN DE LA INESTABILIDAD DE PIEZAS EN COMPRESIÓN SIMPLE O COMPUESTA .....	851
69.6	ZAPATAS DE HORMIGÓN EN MASA .....	853
<b>CAPÍTULO 70. PAVIMENTOS DE HORMIGÓN</b>		855
70.1	INTRODUCCIÓN .....	855
70.2	ACCIONES SOBRE LOS PAVIMENTOS .....	859
70.3	COMPROBACIÓN DE TENSIONES EN EL PAVIMENTO .....	863
70.4	CÁLCULO DE LA ARMADURA EN PAVIMENTOS CON ARMADURA DE RETRACCIÓN Y TEMPERATURA .....	864
70.5	MÉTODO DE LA NORMA ACI 330 R-92 .....	865
70.6	JUNTAS Y OTROS DETALLES CONSTRUCTIVOS .....	869
<b>ANEJO Nº 1. COMPLEMENTOS SOBRE CÁLCULO NO LINEAL</b>		875
A-1.1	CÁLCULO DE LA ROTACIÓN .....	875
A-1.2	COMPROBACIÓN DE DUCTILIDAD .....	877
A-1.3	DIAGRAMAS MOMENTOS-ROTACIONES .....	878
A-1.4	DIAGRAMAS MOMENTOS-CURVATURAS Y DIAGRAMAS MOMENTOS-AXIL CURVATURAS .....	878
<b>ANEJO Nº 2. CÁLCULO DE NUDOS</b>		879
<b>ANEJO Nº 3. RESISTENCIA DEL HORMIGÓN AL FUEGO</b>		883
A-3.1	INTRODUCCIÓN .....	883
A-3.2	MECANISMOS DE DAÑO DEL FUEGO SOBRE LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN .....	884
A-3.3	RESISTENCIAS NORMALIZADAS AL FUEGO .....	887
A-3.4	COMBINACIÓN DE ACCIONES A CONSIDERAR EN EL PROYECTO .....	877
A-3.5	COMPROBACIÓN MEDIANTE TABLAS .....	888
A-3.6	TABLAS DE COMPROBACIÓN .....	889
<b>ANEJO Nº 4. TOLERANCIAS DE EJECUCIÓN EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN</b>		895
A-4.1	NECESIDAD DE LOS SISTEMAS DE TOLERANCIAS .....	895
A-4.2	TERMINOLOGÍA .....	896
A-4.3	SELECCIÓN DEL SISTEMA DE TOLERANCIAS .....	897
A-4.4	PRINCIPIOS GENERALES .....	898
A-4.5	DESVIACIONES ADMISIBLES .....	899
A-4.5.1	ARMADURAS .....	899
A-4.5.1.1	ARMADURAS ACTIVAS .....	899
A-4.5.1.2	ARMADURAS PASIVAS .....	899
A-4.5.2	CIMENTACIONES .....	903
A-4.5.3	ESTRUCTURAS DE EDIFICIOS CONSTRUIDAS "IN SITU" .....	904

A-4.5.4	PIEZAS PREFABRICADAS.....	907
A-4.5.4.1	TOLERANCIAS DE FABRICACIÓN DE ELEMENTOS LINEALES.....	907
A-4.5.4.2	TOLERANCIAS DE FABRICACIÓN DE ELEMENTOS SUPERFICIALES.....	908
A-4.5.4.3	DESVIACIONES DE MONTAJE.....	909
A-4.5.5	PANTALLAS, NÚCLEOS, TORRES, CHIMENEAS, PILAS Y OTROS ELEMENTOS HORMIGONADOS CON ENCOFRADO DESLIZANTE.....	910
A-4.5.6	MUROS DE CONTENCIÓN Y MUROS DE SÓTANO.....	911
A-4.5.7	OBRAS HIDRÁULICAS Y SANITARIAS.....	911
A-4.5.7.1	CANALES.....	911
A-4.5.7.2	ALCANTARILLAS, SIFONES, ETC.....	912
A-4.5.8	PUENTES HORMIGONADOS "IN SITU".....	912
A-4.5.9	PAVIMENTOS Y ACERAS.....	914
A-4.5.10	OBRAS CIVILES DE ELEMENTOS DE GRAN ESPESOR NO INCLUIDAS EN OTROS APARTADOS.....	914

**ANEJO N° 5. RECOMENDACIONES PARA HORMIGÓN DE ALTAS PRESTACIONES.....**

A-5.1	INTRODUCCIÓN.....	919
A-5.2	DESARROLLO DE LOS HAP.....	919
A-5.3	ASPECTOS DIFERENCIALES DE LOS HAP RESPECTO A LOS HORMIGONES ORDINARIOS.....	922
A-5.3.1	CAMPO DE APLICACIÓN.....	922
A-5.3.2	PESO PROPIO.....	922
A-5.3.3	CEMENTOS.....	922
A-5.3.4	ÁRIDOS.....	922
A-5.3.5	ADITIVOS.....	922
A-5.3.6	ADICIONES.....	923
A-5.3.7	LA DOSIFICACIÓN.....	923
A-5.3.8	EL ENSAYO DE PROBETAS.....	923
A-5.3.9	ASPECTOS RELACIONADOS CON LA DURABILIDAD.....	923
A-5.3.10	DATOS DE LOS MATERIALES PARA EL PROYECTO.....	924

<b>GRÁFICOS Y TABLAS GT-81 A GT-139.....</b>	<b>933</b>
--	------------

**ÍNDICE DE AUTORES<sup>1</sup>**

AEBERHARD, H.U., 568, 581	424, 425, 429, 430, 469, 470, 487, 498, 500, 507, 509, 527, 549, 581, 618, 625, 687, 691, 697, 720, 721, 729, 737, 742, 751, 752, 753, 759, 760, 776, 779, 780, 781, 784, 790, 791, 795, 796, 798, 813, 822, 824, 825, 830, 845, 850, 854, 869, 873, 884, 894, 895, 896, 915, 916, 927, 928, 931, 932
AJDUKIEWICZ, A. 246, 271	
AGUIRRE DE YRAOLA, F., 803, 807	
AHMAD, SH., 919, 930	
APARICIO, A.C., 174, 209, 926, 930	
ARENAS DE PABLO, J.J., 549	
ARNAL, E., 114, 116	
ARNOLD, C., 824	CAMPBELL-ALLEN, D., 400, 401, 407, 411, 414
ARTHUR, P.D., 356, 365	
BAES, R., 637	CARBAJAL, J., 580, 581
BARBERA, E., 399, 414	CHEN, K.C., 657
BASCOY, S.A., 391, 397	CLARKE, J.N., 806, 807
BAUMANN, T., 140, 208	COLLINS, M.P., 172, 177, 198, 199, 209, 287, 292
BELES, A.A., 824	
BELLUZI, O., 275, 292	CORLEY, W.G., 258, 259, 271
BENLLOCH, J., 399, 414	CORNING, L.H., 812, 824
BERANEK, W.J.,	CORRAL FOLGADO, C., 895, 896, 915
BERGSTROM, S.G., 470	CORRES, H., 376, 388, 424, 470
BERNANDER, K.G., 219, 238	CORTES BRETON, J., 67, 103, 194, 209, 895, 896, 915
BERTERO, V.V., 301, 309	
BLANCO GARCIA, F., 60, 66, 103, 112, 116, 414, 895, 896, 915	COULOMB, 757
BLUME, J.A., 812, 824	CONWAY, D.J., 806
BOUTIN, J.P., 672	COWAN, H.J., 281, 292
BRANSON, D.E., 417, 418, 422, 423, 426, 433, 434, 437, 439, 468, 470, 471	CREIXELL, J., 824
BREDT, 278, 286	CREASY, L.R., 842, 846
BREEN, J.E., 380, 388	CROSS, H., 799, 806
CABRERA BELLMONT, A., 759, 760, 780	CUVILLO, R. DEL, 549
CAIRNS, J.W., 356, 365	DELIBES, A., 161, 208, 219, 237, 301, 309
CALAVERA, J., 103, 112, 138, 161, 167, 174, 184, 208, 209, 219, 232, 235, 237, 244, 271, 334, 341, 343, 355, 363, 364, 402, 414, 415,	DEL POZO FRUTOS, F.J., 174, 209, 596, 599, 928, 932
	DEL RÍO.C., 238
	DÍAZ LOZANO, J., 895, 896, 915
	DI STASIO, J., 244, 246, 248, 271

<sup>1</sup> Los números indican las páginas donde están citados los autores correspondientes

TOMO II

Capítulo	Página	Línea	DICE	DEBE DECIR
35	45	18	es inferior a 15 $\phi_{m\acute{a}x}$	es inferior a 15 $\phi_{min}$
35	46	13	la fórmula [ 35.24]	la fórmula [ 35.23]
35	46	16	$N_d = \frac{250 + 50}{250} \cdot N_d = 1269 \text{ kN}$	$N_d = \frac{250 + 50}{250} \cdot N_d = 2349 \text{ kN}$
35	46	20	$A_s = \frac{1269000 - 0,85 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 250}{348} = 1097 \text{ mm}^2$	$A_s = \frac{1269000 - 0,85 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 250}{348} = 4201 \text{ mm}^2$
35	46	21	$A_s < > 4 \phi 20$	$A_s < > 6 \phi 32$
35	49	-2	un serio incremento de corte	un serio incremento de coste
36	67	16	$U_s = 436.870 \text{ kN}$	$U_s = 436.870 \text{ N}$
36	68	1	$\mu = 0,264$	$\mu = 0,195$
36	68	3	$M_d = 0,264 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 470^2 \cdot 10^{-6} = 243,48 \text{ mkN}$	$M_d = 0,264 \cdot 16,7 \cdot 250 \cdot 470^2 \cdot 10^{-6} = 179,84 \text{ mkN}$
37	111	13	manejamos el ábaco GT-96	manejamos el ábaco GT-99
37	112	22	Entrando en el ábaco GT-105, se obtiene	Entrando en el ábaco GT-107, se obtiene
37	113	15	$\omega = 0,22 \quad U_{st} = 2 U_s = 0,22 \cdot 16,7 \cdot 300 \cdot 600 = 661,320 \text{ N} = 661,3 \text{ kN}$	$\omega = 0,45 \quad U_{st} = 2 U_s = 0,45 \cdot 16,7 \cdot 300 \cdot 600 = 1.352,700 \text{ N} = 1.352,7 \text{ kN}$
37	113	17	$U_s = \frac{661,3}{2} = 330,7 \text{ kN} \rightarrow 4 \phi 20$	$U_s = \frac{1.352,7}{2} = 676,4 \text{ kN} \rightarrow 5 \phi 20$
37	113	18	4 $\phi 20$	5 $\phi 20$
39	148	-7	en sentido paralelo será $\sigma_{CII}$	en sentido paralelo será $\sigma_{CI}$
39	155	10	rectangular de ancho b	rectangular de ancho a
39	163	12	$\rho_1 = \frac{A_s}{b_0 d} > 0,02$	$\rho_1 = \frac{A_s}{b_0 d} \neq 0,02$
39	170	8	[ 39,67]	[39,77]
39	171	12	T y $\pi$ ).	T y $\pi$ ).
39	172	-3	$V_{cu} = [ \tau_{Rd} k (1,2 + 40 \rho_1) + 0,15 \sigma_{cd} ] b_0 d$	$V_{cu} = [ \tau_{Rd} k (1,2 + 40 \rho_1) - 0,15 \sigma_{cd} ] b_0 d$
39	173	2	Tabla T-39.3.	Tabla T-39.3. ( k = -1,6 - d, con d expresado en m.)
39	175	22	significados que se emplearon en ella	significados que se emplearon en [ 39.85].
39	177	16	$V_{d,ef}$	$V_{rd}$
39	182	2	$S_d = \frac{A F_d}{a_r}$	$S_d = \frac{\Delta F_d}{a_r}$

Capítulo	Página	Línea	DICE	DEBE DECIR
39	182	4	$A F_d$	$\Delta F_d$
39	182	6	$A F_d$	$\Delta F_d$
39	182	-7	de longitud y $f_{ya,d}$	de longitud y $f_{ya,d}$
39	183	6	de rozamiento $\rho = 1$	de rozamiento $\mu = 1$
39	183	7	el alma igual a $A_s f_{yd}$	el ala igual a $A_s f_{yd}$
39	185	12	de $A F_d$	de $\Delta F_d$
39	185	13	$A F_d = A_{s2} f_{yd}$	$\Delta F_d = A_{s2} f_{yd}$
39	185	19	$S_d \leq S_{ul} = 0,2 f_{cd} b_o$	$S_d \leq S_{ul} = 0,2 f_{cd} h_2$
39	185	-6	( $f_{yca,d} > 400 \text{ N/mm}^2$ ).	( $f_{yca,d} > 400 \text{ N/mm}^2$ ).
39	186	3	(fig. 39-41)	(fig. 39-42)
39	186	12	( $V_{su}$ toma los valores [39.118], [39.119] ó [39.120] con $h_2$ en lugar de $h_1$ ).	( $V_{cu}$ toma los valores [39.118], [39.119] ó [39.117] con $h_2$ en lugar de $h_1$ ).
39	188	19	la figura como sesiones de discontinuidad	la figura como regiones de discontinuidad.
39	189	3	en la figura 39-49 b),	en la figura 39-49 a),
39	193	13	$V_{cu} = 0,018 \cdot \frac{25}{1,5} 250 \cdot 565 = 42375$	$V_{su, min} = 0,018 \cdot \frac{25}{1,5} 250 \cdot 565 = 4237$
39	198	-7	de la figura 39-38	de la figura 39-65
39	201	6	de la figura 39-70	de la figura 39-69
41	241	-6	$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{A_{cp}} \leq 0,08 \left( \frac{\alpha_s d}{u_1} + 2 \right) \sqrt{f_{cd}} \neq 0,32 \sqrt{f_{cd}}$	$\tau_{pd} = \frac{F_{pd}}{A_{cp}} \leq 0,08 \left( \frac{\alpha_s d}{u_1} + 2 \right) \sqrt{f_{cd}} \neq 0,32 \sqrt{f_{cd}}$
41	245	6	el valor máximo de $\tau_{pd}$	el valor máximo de $\tau_{pd}$
41	257	4	$F_{pd} = (0,007 \beta_p \sqrt{f_{ck}} + 0,0026 \sigma_{po}) b_o d + F'_{pd}$	$F_{pd} = (0,007 \beta_p \sqrt{f_{ck}} + 0,3 \sigma_{po}) b_o d + F'_{pd}$
41	271	9	(41.2) ACI 318-89	(41.2) ACI 318-95
44	337	19	$l_b = \frac{\phi \cdot f_{yd}}{h \cdot f_{bd}}$	$l_b = \frac{\phi \cdot f_{yd}}{4 \cdot f_{bd}}$
44	344	4	$F_{btd} = L_{td} \cdot \phi T \sigma_{TD} \leq F_{wd}$	$F_{btd} = L_{td} \cdot \phi T \sigma_{TD} \leq F_{wd}$
44	344	6	$F_{bTd}$	$F_{btd}$
44	344	8	$L_{TD} = 1,16 \phi_T \sqrt{\frac{f_{yd}}{\sigma_{Td}}} \leq L_T$	$L_{td} = 1,16 \phi_T \sqrt{\frac{f_{yd}}{\sigma_{Td}}} \leq L_T$